ठोस पदार्थ यांत्रिकी

लेखक
प्रो० डी० पी० शुक्ला

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
मानव संसाधन विकास मंत्रालय, शिक्षा विभाग,
भारत सरकार

ठोस पदार्थ यांत्रिकी

डी० पी० शुक्ला
प्रोफेसर
यांत्रिक एवं औद्योगिक इंजीनियरी विभाग
रुड़की विश्वविद्यालय, रुड़की
(उ०प्र०)

सत्यमेव जयते

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
मानव संसाधन विकास मंत्रालय
(शिक्षा विभाग)
भारत सरकार

COMMISSION FOR SCIENTIFIC & TECHNICAL TERMINOLOGY
MINISTRY OF HUMAN RESOURCE DEVELOPMENT
DEPARTMENT OF EDUCATION
GOVT. OF INDIA

प्रकाशक :
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग,
मानव संसाधन विकास मंत्रालय,
पश्चिमी खंड-7, रामकृष्णपुरम,
नई दिल्ली-110 066

मूल्य : (देश में) रुपए 995 (विदेश में) पौंड 116.02 अथवा डालर 358 20 सेंट्स

मुद्रक : महाप्रबंधक, भारत सरकार मुद्रणालय, नासिक-422 006.

बिक्री का पता :
बिक्री अनुभाग,
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग,
मानव संसाधन विकास मंत्रालय,
पश्चिमी खंड-7, रामकृष्णपुरम,
नई दिल्ली-110 066.

प्रस्तावना

भारतीय भाषाओं को स्नातक तथा स्नातकोत्तर स्तर पर शिक्षा के माध्यम के रूप में अपनाने के लिए आवश्यक है कि इन भाषाओं में उच्च कोटि के प्रामाणिक ग्रंथ पर्याप्त संख्या में उपलब्ध हों। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए भारत सरकार ने विभिन्न विषय-क्षेत्रों में हिंदी तथा अन्य भारतीय भाषाओं में पारिभाषिक शब्दावली के निर्माण तथा विकास और विश्वविद्यालय स्तरीय मानक ग्रंथों के मौलिक लेखन तथा अनुवाद की विस्तृत योजना बनाई। 1962-63 में यह दायित्व वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग को सौंपा गया। आयोग अब तक विज्ञान, प्रौद्योगिकी, मानविकी, प्रशासन आदि विषय-क्षेत्रों के लगभग 5 लाख पारिभाषिक शब्द विकसित कर चुका है। विभिन्न भारतीय भाषाओं में इनके समरूप पर्यायों का निर्धारण करने के लिए अखिल भारतीय शब्दावली का निर्माण कार्य भी चल रहा है। शब्दावली के प्रयोग पक्ष को सुदृढ़ करने के लिए विभिन्न विषयों के कई परिभाषा कोश भी आयोग द्वारा प्रकाशित हो चुके है और कई विश्वविद्यालयों में विभिन्न विषयों के अध्यापकों के लिए शब्दावली कार्य शाला/प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित किए जाते है। इसके अलावा ज्ञान-विज्ञान की हिंदी पत्रिकाएं भी आयोग द्वारा प्रकाशित की जाती हैं।

हिंदी तथा भारतीय भाषाओं में पर्याप्त मात्रा में पारिभाषिक शब्दावली के उपलब्ध हो जाने के बाद इसका प्रयोग करते हुए विभिन्न विषयों में विश्वविद्यालय स्तर के मौलिक ग्रंथों के निर्माण तथा अनुवाद का विशाल कार्य हाथ में लिया गया। भारत सरकार ने राज्य सरकारों, विश्वविद्यालयों और प्रकाशकों के सहयोग से 1962-63 में ग्रंथ निर्माण का यह कार्य शुरू किया। सन् 1967 के अखिल भारतीय कुलपति सम्मेलन में यह निर्णय लिया गया कि स्नातक स्तर पर भारतीय भाषाओं को शिक्षा एवं परीक्षा का माध्यम बना देना चाहिए। सन् 1968 में संसद के दोनों सदनों द्वारा अपनाई गई राष्ट्रीय शिक्षा नीति के कार्यान्वियन के लिए शिक्षा मंत्रालय ने माध्यम परिवर्तन की आवश्यक तैयारी के तौर पर ग्रंथ-निर्माण का एक व्यापक कार्यक्रम बनाया, जिसके लिए चौथी पंचवर्षीय योजना में 18 करोड़ रुपए का प्रावधान दिया गया और प्रत्येक राज्य को अपनी प्रादेशिक भाषा में विश्वविद्यालय स्तर की पुस्तकें तैयार करने के लिए एक-एक करोड़ रुपए की धन-राशि देने की व्यवस्था की गई। इसी क्रम में भारत सरकार के शत-प्रतिशत अनुदान से सन् 1969-70 में हिंदी भाषी राज्यों में हिंदी ग्रंथ अकादमियों और अहिंदी भाषी राज्यों में ग्रंथ निर्माण मंडलों की स्थापना

की गई। इसके अतिरिक्त दिल्ली, बनारस, हिसार और पंतनगर स्थित विश्वविद्यालयों में हिंदी के प्रकाशन सैल भी स्थापित किए गए। विश्वविद्यालय स्तरीय ग्रंथ निर्माण के इस कार्यक्रम के अंतर्गत विज्ञान, मानविकी तथा सामाजिक विज्ञान से संबंधित महत्वपूर्ण विषयों की पाण्डुलिपियों के निर्माण और प्रकाशन का दायित्व इन संस्थाओं को सौंपा गया और इनके समन्वयन का कार्य वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग को सौंपा गया।

तीन केन्द्रीय विषय—इंजीनियरी, आयुर्विज्ञान तथा कृषि की पाण्डुलिपियों का निर्माण और प्रकाशन सीधे आयोग के तत्वावधान में हो रहा है। इन विषयों की कुछ पुस्तकों का मुद्रण आयोग विभिन्न हिंदी ग्रंथ अकादमियों के माध्यम से भी करवा रहा है। मौलिक और अनूदित साहित्य में आयोग द्वारा स्वीकृत शब्दावली का ही प्रयोग करने का प्रयास किया जाता है ताकि अखिल भारतीय स्तर पर इनकी ग्राह्यता और सुबोधता बनी रहे।

अब तक किए गए प्रयासों के फलस्वरूप लगभग 11,247 मानक ग्रंथों का निर्माण किया जा चुका है। इन ग्रंथों के तैयार हो जाने से भारतीय भाषाओं में विज्ञान तथा मानविकी के लगभग सभी विषयों में स्नातक स्तर की पाठ्य-पुस्तकों की आवश्यकता काफी हद तक पूरी हो गई है। स्नातकोत्तर तथा व्यावसायिक पाठ्यक्रमों के क्षेत्र में भी काफी पुस्तकें प्रकाशित हो चुकी हैं। लेकिन काफी कार्य करना शेष है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में भी इस बात पर विशेष जोर दिया गया है कि भारतीय भाषाओं को विश्वविद्यालयों में शिक्षा माध्यम के रूप में यथाशीघ्र प्रतिष्ठित किया जाए और इस ध्येय की पूर्ति के लिए अपेक्षित शिक्षण सामग्री पर्याप्त मात्रा में उपलब्ध कराई जाए। केंद्रीय स्तर पर ग्रंथ निर्माण कार्यक्रम के अनुवीक्षण (मोनिटरिंग) का दायित्व वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग को सौंपा गया है। तदनुसार आयोग कार्यक्रम में वांछित गति लाने का पूरा प्रयास कर रहा है। राष्ट्र की उन्नति के लिए इंजीनियरी क्षेत्र में प्रगति आवश्यक है। इंजीनियरी के विद्यार्थियों को अपनी भाषा में आधुनिकतम ज्ञान उपलब्ध कराने के लिए शब्दावली आयोग ने पहले सिविल, विद्युत व यांत्रिक विषयों के क्षेत्र में शब्दावली निर्माण का कार्य अपने हाथ में लिया। इन विषयों के वरिष्ठ विशेषज्ञों की सहायता से अत्यधिक परिश्रम करके स्नातक स्तर तक इन विषयों के लगभग 50,000 शब्दों का संग्रह प्रकाशित करवाया गया है।

उपर्युक्त तीन विषयों के अलावा आयोग ने वैमानिकी, रसायन, खनन, मुद्रण, वस्त्र उद्योग, वास्तुकला तथा दूर संचार विषयों की शब्दावली का भी प्रकाशन करवाया है। इसमें लगभग 15,000 शब्द हैं।

प्रस्तुत पुस्तक "ठोस पदार्थ यांत्रिकी" रुड़की विश्वविद्यालय के यांत्रिक इंजीनियरी विभाग के प्रोफेसर डी० पी० शुक्ला द्वारा लिखी गई है। उक्त पुस्तक उन्होंने कड़ी मेहनत और लगन से लिखी है। श्री शुक्ला तकनीकी शब्दावली का कार्य पिछले 25-30 वर्षों से कर रहे है। इसलिए शब्दावली के सही प्रयोग के बारे में कोई संशय नहीं होना चाहिए। उक्त पुस्तक में उन्होने ठोस पदार्थ यांत्रिकी के मूलभूत सिद्धान्तो का विवेचन करते हुए उसे बी०ई० के स्तर पर तक लाए है। इस कार्य के लिए उन्होंने गणितीय सूत्रों और चित्रों इत्यादि का भरपूर प्रयोग किया है जो कि विद्यार्थियों के लिए अत्यंत उपयोगी और लाभप्रद है।

पुस्तक में आयोग द्वारा अंतिम रूप से अनुमोदित शब्दावली का ही प्रयोग किया गया है। इंजीनियरी के क्षेत्र में हिंदी का स्वागत किया जाए, इसे ध्यान में रखते हुए अंतर्राष्ट्रीय शब्दों का प्रयोग प्रचुर मात्रा में किया गया है, जिन्हे आयोग ने अनुमोदन प्रदान किया गया है। आशा है, इस पुस्तक में हिंदी भाषी पाठकों की एक महती आवश्यकता की पूर्ति होगी और लेखकों, अनुवादकों और पुनरीक्षकों को समुचित मार्गदर्शन मिलेगा। साथ ही यह भी आशा है कि यह पुस्तक तकनीकी छात्रों तथा शिक्षकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी।

प्रेम स्वरूप सकलानी

नई दिल्ली-110 066
मार्च, 1995

प्रो० प्रेम स्वरूप सकलानी
अध्यक्ष
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग

प्रामुख

इस पुस्तक के लेखक डॉ० देवीप्रसाद शुक्ल को मैं एक छात्र तथा बाद में सहयोगी अध्यापक के रूप में पिछले लगभग 30 वर्षों से जानता हूँ। डॉ० शुक्ल की अपने सहयोगियों तथा छात्रों में एक श्रेष्ठ अध्यापक की छवि है तथा ये ठोस पदार्थ यांत्रिकी विषय को पिछले कई वर्षों से इंजीनियरी के स्नातक एवं स्नातकोत्तर छात्रों को कुशलता पूर्वक पढ़ाते रहे हैं। इन्हें हिंदी का भी अच्छा ज्ञान है तथा तकनीकी एवं इंजीनियरी में हिंदी के प्रयोग में इनका सराहनीय योगदान रहा है। इंजीनियरी विषय में हिंदी माध्यम से पुस्तक लिखने का इनका यह प्रयास निश्चय ही प्रशंसनीय है।

प्रस्तुत पुस्तक में लेखक ने विषय वस्तु का वर्णन बड़े ही सरल तथा सुरुचिपूर्ण ढंग से किया है। पुस्तक की भाषा सरल तथा बोधगम्य है। इन्होंने विभिन्न अध्यायों का अनुक्रम इस प्रकार रखा है कि पाठक स्वाभाविक ढंग से प्रस्तुत विषय का ज्ञान प्राप्त कर सकेगा।

मुझे पूर्ण विश्वास है कि डॉ० शुक्ल की यह पुस्तक ठोस पदार्थ यांत्रिकी विषय को हिन्दी माध्यम से पढ़ाने हेतु बहुत उपयोगी सिद्ध होगी तथा इंजीनियरी स्नातक छात्र इससे समुचित रूप से लाभान्वित होंगे।

डॉ० हरिकृष्ण वर्मा
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष
यांत्रिक एवं औद्योगिक इंजीनियरी विभाग
रुड़की विश्वविद्यालय, रुड़की

भूमिका

प्रस्तुत पुस्तक, लेखक के अनेक वर्षों के प्रयास तथा 'ठोस पदार्थ सामर्थ्य' विषय को पढ़ाने के लंबे अनुभव पर आधारित है। इसकी विषय वस्तु इंजीनियरी स्नातक कक्षा के द्वितीय वर्ष के छात्रों तथा इंस्टिट्यूशन ऑफ इंजीनियर्स के छात्रों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी। पुस्तक की भाषा एवं विषय-वस्तु को यथासंभव सरल तथा बोधगम्य रखने का प्रयास किया गया है। अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य S I मात्रकों का ही प्रयोग पुस्तक में किया गया है। तकनीकी शब्दों के हिन्दी पर्याय वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग द्वारा प्रकाशित शब्दकोशों से ही लिए गए हैं।

पुस्तक की विषय-वस्तु को 10 अध्यायों में बाँटा गया है। विषय क्रम इस प्रकार का है जिससे विषय ज्ञान का संवर्धन उत्तरोत्तर अध्यायों में सहज रूप से हो सके, अतः विषय के आरंभिक अध्ययन के लिए छात्रों को पुस्तक में अपनाये गए क्रम का अध्यायवार अनुसरण करना ही उचित होगा। प्रत्येक अध्याय में वर्णित विषयों के अनुप्रयोग को ध्यान में रखते हुए समुचित संख्या में प्रश्नों को हल करने के उदाहरण दिए गए हैं। अध्याय के अंत में अभ्यास हेतु पर्याप्त संख्या में प्रश्न दिए गए है तथा छात्रों की सुविधा हेतु संख्यात्मक प्रश्नों के उत्तर भी दिए गए हैं।

जब कभी भी इंजीनियरी विषयों को हिन्दी माध्यम से पढ़ाने का प्रश्न उठता है तब प्रायः यह दलील दी जाती है कि हिन्दी में पुस्तकें उपलब्ध नहीं हैं तथा समुचित तकनीकी शब्दावली के अभाव में हिन्दी में इंजीनियरी विषयों की पुस्तकें लिखना कठीन है। इस पुस्तक की पांडुलिपि तैयार करने के पश्चात मुझे बड़ी ही सुखद अनुभूति हुई तथा मेरा निष्कर्ष यही है कि उपर्युक्त दलील पूर्णतः सही नहीं है तथा प्रयत्न करने पर अच्छे स्तर की पुस्तकें हिंदी में लिखी जा सकती हैं तथा लिखी गई हैं।

मैं उन सभी लेखकों का आभारी हूँ जिनकी पुस्तकों के अध्ययन से मैंने इस विषय का ज्ञान अर्जित किया है तथा जिसके कारण मेरा यह प्रयास सफल हो पाया है। वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय (शिक्षा विभाग), भारत सरकार का मैं विशेष आभारी हूँ, जिन्होंने इस पुस्तक लेखन हेतु आर्थिक सहायता प्रदान की तथा इसके प्रकाशन की व्यवस्था की है।

यद्यपि प्रयत्न यही किया गया है कि पुस्तक में मुद्रण तथा बषय-वस्तु संबंधी कोई त्रुटि न रहने पाये तथापि इस दिशा में लेखक का नवधा अनुभव तथा पुस्तक का प्रथम संस्करण होने के कारण यदि कोई त्रुटि रह गई हो तो पाठकगण उसके लिए क्षमा करेंगे। मैं अपने सभी पाठकों से सविनय अनुरोध करता हूँ कि वे पुस्तक की त्रुटियों एवं अन्य सुझावों का स्पष्ट उल्लेख करेंगे जिससे पुस्तक के भावी संस्करण में सुधार किया जा सके।

देवी प्रसाद शुक्ल

पाण्डुलिपि एकक

श्री जय सिंह	सहायक निदेशक
श्री सत्यपाल आरोड़ा	वैज्ञानिक अधिकारी

प्रकाशन

1. डॉ० एस० के० धिंगरा
   सहायक निदेशक (आयुर्विज्ञान)
2. श्री भगत सिंह नेगी
   अनुसंधान सहायक
3. श्री आलोक वाही
   कलाकार
4. श्रीमती कमला त्यागी
   प्रूफ वाचक

विषय सूची

J—23 M. of HRD/ND/95

अध्याय 1

इंजीनियरी पदार्थ एवं उनके बलकृत गुणधर्म

1.1 विषय प्रवेश

इंजीनियरी कार्यों विशेषतः संरचनाओं एवं मशीन उत्पादन कार्यों में प्रयुक्त पदार्थों को सामान्यतः दो वर्गों में बाँटा जा सकता है; (1) धातु एवं (2) अधातु। प्रथम वर्ग में आने वाले पदार्थ हैं लोहा, इस्पात, एलुमीनियम एवं विभिन्न प्रकार की मिश्र धातुयें इत्यादि। दूसरे वर्ग के अंतर्गत सीमेंट कंक्रीट, प्रकाष्ठ, रबड़ एवं प्लास्टिक आते हैं।

उपर्युक्त दोनों वर्गों के पदार्थों के संयोजन से प्राप्त पदार्थ का एक तीसरा वर्ग भी प्रयोग में आने लगा है जैसे, तन्तु प्रबलित प्लास्टिक (FRP)। इस प्रकार के पदार्थ में दोनों ही वर्गों के लाभकारी गुण विद्यमान होते हैं अतः धीरे धीरे इनका उपयोग इंजीनियरी कार्यों में बढ़ रहा है।

यदि हम किसी यंत्र, भवन संरचना अथवा वैद्युत सयंत्र को ध्यानपूर्वक देखें तो यह पायेंगे कि उनकी उपयोगिता एवं सार्थकता तभी तक होती है जब उसके अंग प्रति-अंग सही ढंग से सुनिश्चित रूप से कार्य करते रहें। क्रियाशील अवस्था में इन प्रत्येक अवयवों पर किसी न किसी प्रकार का भार लगता है; यदि यह भार एक निश्चित सीमा से अधिक बढ़ जाय तब मशीनी अवयव में विरूपण उत्पन्न हो जाता है और वह वाँछित उद्देश्य नहीं संपन्न कर पाता है। कभी-कभी अधिक भार के कारण इनके टूटने की भी संभावना हो जाती है। अतः विभिन्न प्रकार के पदार्थ एक निश्चित सीमा तक ही भार सहन कर सकते हैं तथा इंजीनियरी उपयोगों के लिए इनके सामर्थ्य एवं बाह्य बलों के प्रति इनकी अभिक्रिया का ज्ञान अत्यंत आवश्यक है।

1.2 अवयवों पर लगने वाले भार

किसी भी यांत्रिक अवयव पर लग रहे बल को उस पर लगने वाला भार कहा जाता है। यदि अवयव मुक्त अवस्था में है तो उस पर केवल गुरुत्वाकर्षण का बल लगेगा जिसे उसका जड़ भार कहते हैं। यदि यह अवयव किसी विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में अवस्थित है तो उस पर विद्युत चुम्बकीय भार (आकर्षण, विकर्षण, आघूर्ण) लगता है तथा यदि एक अवयव किसी दूसरे अवयव के संपर्क में रहते हुए शक्ति संचारण में

2—23 M. of HRD/ND/95

भाग लेता है अथवा किसी बाह्य भार को सहन करता है तो उसपर संपर्क जनित भार लगता है। हम यहां पर इस अंतिम प्रकार के भार पर ही अपना ध्यान केंद्रित करते हुए भार के प्रकार एवं उसके अभिलक्षण का अध्ययन करेंगे।

किसी भी यांत्रिक अवयव पर लगने वाले भार पर को अनेकों वर्गों में उसके स्वरूप के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है कुछ मुख्य निम्न लिखित हैं।

1. स्थैतिक अथवा जड़ भार : जब अवयव पर लगने वाले भार का परिमाण दिशा एवं भारण स्थल अपरिवर्तनी रहता है तो इसको स्थैतिक अथवा जड़ भार कहा जाता है जैसे भवनों में प्रयुक्त धरनों एवं स्तंभो पर छत के कंक्रीट, लोहा आदि का भार। अवयव का स्वयं का भार भी जड़ भार की श्रेणी में ही आता है।

2. गतिक भार : जब अवयव पर लगने वाले भार का परिमाण अथवा दिशा अथवा भारण बिन्दु समय का फलन होता है, ऐसे भार को गतिक भार कहा जाता है। जड़त्व भार जो गतिज भार होता है वह भी इसी श्रेणी में आता है। उदाहरण स्वरूप अपकेंद्री भार, इंजन के पिस्टन तथा संयोजी दंड के गतिशील अवस्था में जड़त्व भार, भवनों अथवा पुलों पर वायु अथवा रेल गाडी एवं मोटार गाडियों के चलने से उत्पन्न भार इस श्रेणी में आते हैं।

3. प्रघाती अथवा संघट्ट भार : यदि सूक्ष्म रूप से देखा जाय तो प्रघाती, आकस्मिक एवं संघट्ट भार का स्वरूप परस्पर भिन्न होता है परन्तु स्थूल रूप से ये तीनों प्रकार के भार प्रघाती भार की श्रेणी में ही आते हैं। जब भी अवयव पर सहसा अथवा आकस्मिक भारण होता है तो उसके द्वारा अवयव पर लगने वाला भार प्रघाती भार कहलाता है। उदाहरण स्वरुप जब बंदूक से गोली दागी जाती है तब बंदूक की नली पर प्रघाती भार लगता है, जब गियर के दांते शक्ति पारेषण अवस्था में एक दूसरे के संपर्क में आते हैं तब उनपर भी प्रघाती भार लगता है, जब रेलपटरी पर तीव्र गति से रेलगाडी आती है तो पटरी पर प्रघाती भार लगता है।

यह आवश्यक नहीं है कि अवयव यदि एक प्रकार की भारण श्रेणी के लिए अभिकल्पित है तो वह सभी भारण श्रेणियों के लिए उपयुक्त होगा। अतः विभिन्न भारण श्रेणी के अनुसार ही उसकी भारवहन क्षमता ज्ञात की जाती है तथा तदनुसार उसका अभिकल्पन होता है।

उपर वर्णन किए गए तीनों प्रकार के भार को पुनः तीन तीन उपश्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है जो निम्नलिखित हैं।

(अ) अक्षीय भार : ऐसा भार जो अवयव के अक्ष की दिशा में लगे। वह तनन अथवा संपीडन दोनों प्रकार का हो सकता है एवं अवयव में क्रमशः तनाव अथवा दबाव (संकुचन) उत्पन्न करेगा। जैसे किसी भारी छड़ को ऊर्ध्वाधर लटका कर उसके एक सिरे पर जड़ भार लगाया जाना।

(ब) वंकन भार : इस प्रकार के भार की प्रवृत्ति अवयव में बंकन उत्पन्न करने की होती हैं जिसके कारण उसके परिच्छेद के विभिन्न भागों में तनन एवं संपीडन दोनों ही उत्पन्न होता है। उदाहरण स्वरूप किसी धरन पर अनुप्रस्थ दिशा में भार लगने पर उसमें बंकन उत्पन्न होता है।

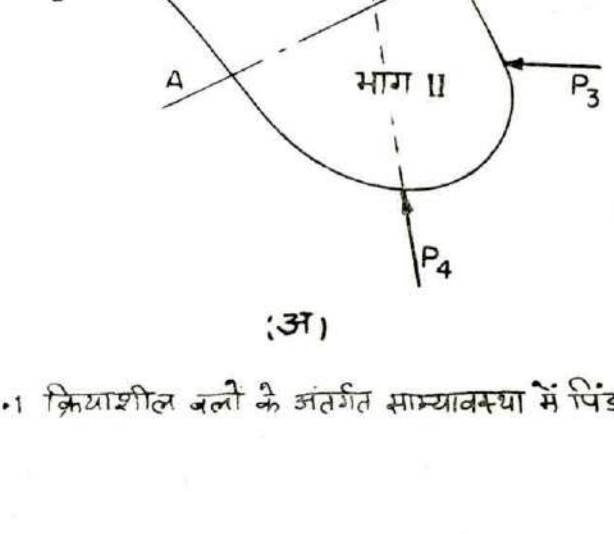
(स) मरोड़ी अथवा ऐंठनी भार : ऐसा भार, जो किसी अवयव के अक्ष के सापेक्ष ऐंठन अथवा मरोड़ उत्पन्न करे, ऐंठनी भार कहलाता है। उदाहरण स्वरूप जब किसी शैफ्ट द्वारा शक्ति संचारित होती है तब उस पर मुख्यतः ऐंठनी भार लगता है।

उपर वर्णन किए गए भारण श्रेणियों के अतिरिक्त प्रायः ऐसा होता है कि तीनों ही श्रेणियों के संयुक्त रूप से भार अवयव पर लगते हैं अतः अवयव की अभिकल्पना करते समय इस तथ्य को ध्यान में रखा जाता है।

1.3 प्रतिबल

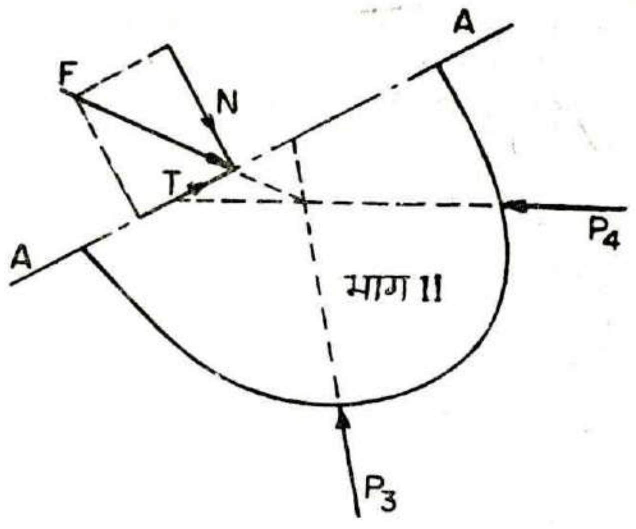
जब किसी अवयव अथवा पिंड पर कोई बाह्य बल लगाया जाता है तो उसमें विरूपण उत्पन्न होता है। जिसके फलस्वरूप अवयव के पदार्थ में आंतरिक बल सक्रिय हो जाते हैं। इन्ही आंतरिक बलों के कारण ही अवयव साम्यावस्था अथवा संतुलन की स्थिति में बना रहता है तथा अवयव का और अधिक विरूपण नहीं होने पाता है। चित्र 1.1 (अ) पर ध्यान देने से स्पष्ट होता है कि पिंड पर P_1 P_2 P_3 एवं P_4 बल इस प्रकार लग रहे हैं कि वह साम्यावस्था में है। अब यदि यह कल्पना की जाय कि पिंड को समतल A–A द्वारा 2-खंडो में विभाजित कर दिया गया है; तब भी ये दोनों भाग साम्यावस्था में ही होने चाहिए। अतः यदि केवल निचले भाग पर ही ध्यान दें तो स्पष्ट है कि यह भाग P_3P_4 एवं F, भारों के अंतर्गत साम्यावस्था

में बना रहेगा जैसा कि चित्र 1.1(ब) में दर्शाया गया है। यहाँ F परिच्छेद A–A पर दूसरे भाग (ऊपर) वाले द्वारा लगाया जाने वाला आंतरिक बल है। 'F' बल को समतल A–A के सापेक्ष दो घटकों में वियोजित किया जा सकता है। पहला 'घटक' उस बल को दर्शाता है जो समतल A–A के अभिलम्ब की दिशा में लगता है तथा दूसरा घटक समतल के स्पर्शी अथवा समांतर दिशा में लगता है। चित्र में इन घटकों को क्रमशः 'N' तथा 'T' से दर्शाया गया है। अब हम यदि इन घटकों की परिच्छेद के विभिन्न स्थलों पर बल तीव्रता ज्ञात करना चाहें तो हमे उस स्थल पर प्रति इकाई क्षेत्र पर लगने वाले भार का मान ज्ञात होना चाहिए। यह अवश्यक नही है



(अ)

चित्र 1.1 क्रियाशील बलों के अंतर्गत साम्यावस्था में पिंड



(ब)

चित्र 1·1 पिंड के भाग-II का युक्त पिंड आरेख

कि परिच्छेद के प्रत्येक स्थल पर अभिलंब एवं स्पर्शी घटकों की तीव्रता एक समान रहेगी अतः हमे इसकी गणितीय परिभाषा करनी होगी ।

परिच्छेद के जिस बिंदु पर हमको बल की तीव्रता ज्ञात करनी है इसके चारो ओर उसी समतल में एक अत्यंत सूक्ष्म क्षेत्र की कल्पना कर ली जाती है ; मान लीजिए कि उस बिंदु को घेरे हुए इस सूक्ष्म क्षेत्रफल का मान $\triangle A$ है तथा इस क्षेत्र पर लगने वाले आंतरिक बल का मान $\triangle F$ है जो संपूर्ण बल F का ही एक सूक्ष्म अंश होगा ।

यदि इस बिन्दु पर प्रति इकाई क्षेत्र पर लगने वाले 'बल' के मान को S द्वारा व्यक्त किया जाय तो S की गणितीय परिभाषा निम्न लिखित होगी :

$$S = \lim_{\triangle A \to O} \frac{\triangle F}{\triangle A} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.1)$$

इस प्रकार 'S' को प्रतिबल कहा जाता है । अतः किसी बिन्दु पर प्रतिबल की परिभाषा उस बिन्दु के आस-पास प्रति इकाई क्षेत्र पर लगने वाले बल का परिमाण

होता है । स्पष्ट है कि यदि हम प्रतिबल के मात्रक पर ध्यान दे तों बल को क्षेत्रफल से विभाजित करने पर जो मात्रक प्राप्त होता है प्रतिबल का वही मात्रक प्राप्त होगा । SI पद्धति में प्रतिबल का मात्रक न्यूटन/मी² (N/m^2) होगा । चूंकि दाब का मात्रक भी यही होता है अतः इसको पॉस्कल (Pa)से भी व्यक्त किया जाता है अर्थात N/m^2 अथवा Pa

$$1\ N/m^2 = 1\ Pa \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.2)$$

चूंकि N/m^2 का संख्यात्मक मान अधिक होगा अतः इसको लिखने की सुविधा की दृष्टि से MN/M^2 अथवा MPa द्वारा व्यक्त किया जाता है । यहाँ M का अर्थ मेगा अर्थात 10^6 से होता है । इस प्रकार प्रतिबल का संख्यात्मक मान लिखने में सुविधा रहती है । और अधिक बड़ी संख्या होने पर GPa प्रयुक्त होता है । यहाँ G का अर्थ 10^9 होता है जिसको गेगा कहा जाता है । परिच्छेद के

संपूर्ण क्षेत्र पर प्रति इकाई क्षेत्रबल का मान एक समान भी हो सकता है ऐसी दशामें प्रतिबल का गणितीय मान व्यक्त करना और भी सरल हो जाता है एवं वह प्रति इकाई क्षेत्रपर लगने वाला औसत भार होता है इसे यह व्यक्त किया जा सकता है :

$$S = \frac{F}{A} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.3)$$

यहाँ परिच्छेद A–A पर लगने वाले आंतरिक बल का मान 'F' तथा परिच्छेद का क्षेत्रफल 'A' है ।

यदि हम चित्र 1.1(ब) पर फिर ध्यान दें तो ज्ञात होगा कि परिच्छेद के किसी भी बिन्दु पर दो प्रकार के प्रतिबल क्रियाशील होंगे । ये परिणामी बल 'F' के दो घटकों क्रमशः N तथा T के कारण उत्पन्न होंगे । अतः अभिलंब बल N के कारण प्रति इकाई क्षेत्र पर क्रियाशील बल अभिलंब प्रतिबल तथा T के कारण प्रति इकाई क्षेत्र पर क्रियाशील बल अपरूपण प्रतिबल अथवा स्पर्शी प्रतिबल कहलाता है । व्यंजक (1.3) के भाँति ही इन दोनों प्रतिबलों को गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{अभिलंब प्रतिबल } (\sigma) = \lim_{\triangle A \to o} \dfrac{\triangle N}{\triangle A} \\ \text{अपरूपण प्रतिबल } (\tau) = \lim_{\triangle A \to o} \dfrac{\triangle T}{\triangle A} \end{array}\right\} (1.4)$$

सामान्यत: अभिलंब प्रतिबल को ग्रीक अक्षर σ (सिगमा) तथा अपरुपण प्रतिबल को एक अन्य ग्रीक अक्षर τ (टॉव) द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा किसी भी समतल पर इनकी दिशा परस्पर लंबवत होती है।

अभिलंब प्रतिबल (σ) के दो स्वरूप हो सकते हैं; इसके कारण किसी अवयव में तनन अथवा संपीडन हो सकता है जब इसके कारण अवयव में तनाव उत्पन्न हो तब तनन प्रतिबल सक्रिय होता है तथा जब अवयव में अभिलंब प्रतिबल के कारण संकुचन अथवा संपीडन उत्पन्न हो तब इसे संपीडन प्रतिबल कहते हैं। तनन प्रतिबल का बीजीय स्वरूप धनात्मक (+) तथा संपीडन प्रतिबल का बीजीय स्वरूप ऋणात्मक (−) माना जाता है।

यहाँ यह स्पष्ट करना उचित होगा कि प्रतिबल सामान्य आदिश अथवा सदिश राशि से भिन्न राशि होती है इसको द्विघाती टेन्सर माना जाता है। शून्य घाती टेन्सर अदिश राशियाँ होती है; एकलघाती टेन्सर सदिश राशियाँ होती हैं तथा द्विघाती टेन्सर ऐसी राशियां होती हैं जिनको पूर्णत: व्यक्त करने के लिए तीन लक्षण अर्थात परिमाण, दिशा एवं एक अन्य लक्षण बताना आवश्यक होता है।

अत: यदि हम किसी बिंदु पर प्रतिबल का मान ज्ञात करना चाहते हैं तो निम्नलिखित लक्षण निर्धारित करने आवश्यक हैं :

(1) अभिलंब अथवा अपरुपण प्रतिबल का परिमाण

(2) प्रतिबल का बीजीय मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक जिसके द्वारा प्रतिबल की दिशा निर्धारित होती है।

(3) वह समतल जिस पर वांछित बिन्दु स्थित है समतल सुनिश्चित करने के लिए उसके अभिलंब के दिशा निर्देशांकों को बताना आवश्यक होता है। ये दिशा निर्देशांक वाँछित बिन्दु को समकोणिक निर्देशांक अक्षों का मूल बिन्दु मानकर इसके सापेक्ष दिशा निर्देशांक व्यक्त किए जाते हैं। ऐसा करना इसलिए आवश्यक है क्योंकि किसी भी बिन्दु से होते हुए अनन्त समतलों की कल्पना की जाती है तथा प्रत्येक समतल के लिए उस बिन्दु पर प्रतिबल का मान भिन्न भिन्न होगा।

अत: किसी बिन्दु पर प्रतिबल व्यक्त करने के लिए उपर्युक्त तीनों बातों को सुनिश्चित करना परम आवश्यक है इसीलिए प्रतिबल सामान्य सदिश राशि से भिन्न होती है तथा यह द्विघाती टेंसर राशि कहलाती है। इस बात को हम अगले अध्याय में और अधिक स्पष्ट करेंगे जब किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था का विश्लेषण करेंगे।

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि अवयव पर चाहे किसी प्रकार का भार लगे उसके परिणाम स्वरूप उसके प्रत्येक बिन्दु पर दो प्रतिबल ही सक्रिय होंगे एक अभिलंब प्रतिबल तथा दूसरा अपरुपण प्रतिबल। अभिलंब प्रतिबल सदैव उस समतल के जिस पर बिन्दु अवस्थित होता है उसके लंबवत् दिशा में सक्रिय होता है। अपरूपण प्रतिबल सदैव समतल के स्पर्शी दिशा में सक्रिय होता है। ये दोनों ही अवयव के विरुपण पर अलग अलग प्रभाव डालते है। अभिलंब प्रतिबल अवयव के रेखीय विमा में परिवर्तन उत्पन्न करता है जब कि अपरुपण प्रतिबल इसके ज्यामितीय आकृति में परिवर्तन उत्पन्न करता है। अत. जब भी किसी अवयव पर भार लगता है तो उसमें उत्पन्न विरुपण को दो पदो में विभाजित किया जा सकता है प्रथम अवयव की रेखीय विमाओं में परिवर्तन अथवा उसके आयतन में परिवर्तन तथा दूसरा उसके ज्यामितीय आकृति में परिवर्तन।

1.4 विकृति

जैसा कि अनुच्छेद 1.3 में स्पष्ट किया गया है कि जब किसी अवयव पर भार लगाया जाता है तो उसके फलस्वरूप उसमें विरुपण उत्पन्न होता है। जिस प्रकार 'प्रतिबल' को गणितीय रूप में व्यक्त करके उसका परिमाण सुनिश्चित किया जाता है उसी प्रकार विरुपण को गणितीय रुप में व्यक्त करके उसका परिमाण सुनिश्चित किया जाता है। विरुपण को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए प्रतिबल के समान ही इसको दो घटकों में विभाजित किया जाता है जिसको विकृति कहा जाता है। पहला घटक अभिलंब प्रतिबल के कारण उत्पन्न विरुपण को व्यक्त करता है जिसे अभिलंब विकृति कहते है तथा दूसरा घटक अपरुपण प्रतिबल के कारण होने वाले विरुपण को दर्शाता है तथा इसे अपरुपण विकृति कहते हैं।

यहाँ यह स्पष्ट करना उचित होगा कि भार के कारण उत्पन्न प्रतिबल एवं विरुपण में से प्रतिबल को प्रत्यक्ष रूप से नापा नहीं जा सकता है परंतु विरुपण को नापा जा सकता है।

1.4.1 अभिलंब विकृति

जैसा कि ऊपर वर्णन किया गया है, अभिलंब प्रतिबल की दिशा में उत्पन्न विकृति अभिलंब विकृति कहलाती है। इसको दैर्ध्यवृद्धि मापी अथवा डायल प्रमापी की साहयता से ज्ञात किया जाता है। चित्र 1.2 पर ध्यान दीजिए। यहाँ छड के दो बिन्दुओं A तथा B को चिह्नांकित कर लिया गया है तथा उनके मध्य दूरी नाप ली गई है। कल्पना किजिए कि यह दूरी 'l' है। अब इस छड़ पर तनन भार 'P' लगाया

चित्र 1.2 छड़ पर क्रियाशील अक्षीय तनन बल

गया है । भार लगने से बिन्दु A तथा B के मध्य लंबाई में दैर्ध्यवृद्धि होगी । मान लीजिए यह बढ़ी हुई लंबाई $e + \triangle e$ है । अतः छड़ में उत्पन्न विरुपण का मान $\triangle l$ है । परंतु इंजीनियरी विश्लेषण में मुख्यतः प्रयुक्त राशि विकृति होती है अभिलंब विकृति को ग्रीक अक्षर ϵ (एप्साइलन) द्वारा व्यक्त किया जाता है । एवं इसको गणितीय व्यंजक के रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

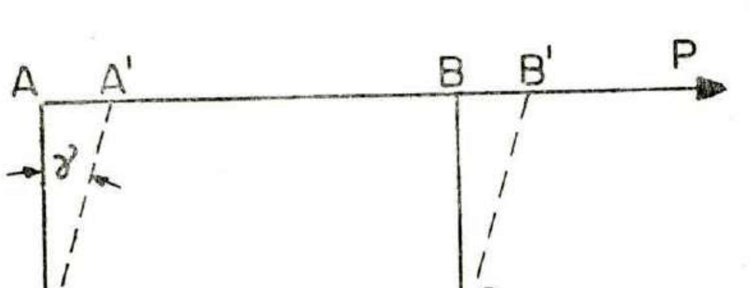
$$\epsilon = \frac{\triangle l}{l} \quad \cdots\cdots \quad (1.5)$$

उपर्युक्त व्यंजक से स्पष्ट है कि विकृति एक बिमा रहित राशि होती है । भार के स्वरूप के अनुसार $\triangle e$ दैर्ध्यवृद्धि अथवा संकुचन दोनों ही संभव हो सकता है । यदि $\triangle e$ दैर्ध्यवृद्धि हो तो इसको धनात्मक माना जाता है एवं उस दशा में इसको तनन विकृति कहते हैं । यदि $\triangle e$ संकुचन हो तब इसको ऋणात्मक माना जाता है एवं उसे संपीडन विकृति कहा जाता है । कभी कभी विकृति को एकांक विकृति शब्द द्वारा भी व्यक्त किया जाता है; ऐसा इसकी परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए किया जाता है क्योंकि व्यंजक (1.5) से स्पष्ट है कि अभिलंब विकृति (ϵ) प्रति एकांक लंबाई में परिवर्तन को दर्शाता है । जिस प्रकार तनन प्रतिबल धनात्मक एवं संपीडन प्रतिबल ऋणात्मक होता है उसी प्रकार तनन विकृति धनात्मक एवं संपीडन विकृति ऋणात्मक मानी जाती है ।

1.4.2 अपरुपण विकृति

भार लगने के कारण अवयव में केवल दैर्ध्यवृद्धि अथवा संकुचन ही नहीं होता है अपितु उसकी आकृति भी परिवर्तित हो जाती है अर्थात उसका अपरूपण हो जाता है जिसके लिए अपरुपण प्रतिबल उत्तर दायी होता है । अपरुपण विकृति को समझने के लिए चित्र 1.3 पर ध्यान दीजिए । मान लीजिए एक खंडक ABCD एक समतल पर इस प्रकार स्थित है कि उसका निचला पार्श्व CD आधार समतल से संयुक्त है । अब पार्श्व AB पर एक अपरुपण बल 'P' लगाया गया है । बल लगाने के पश्चात मूल खंडक ABCD का स्वरूप A'B'CD हो जाता

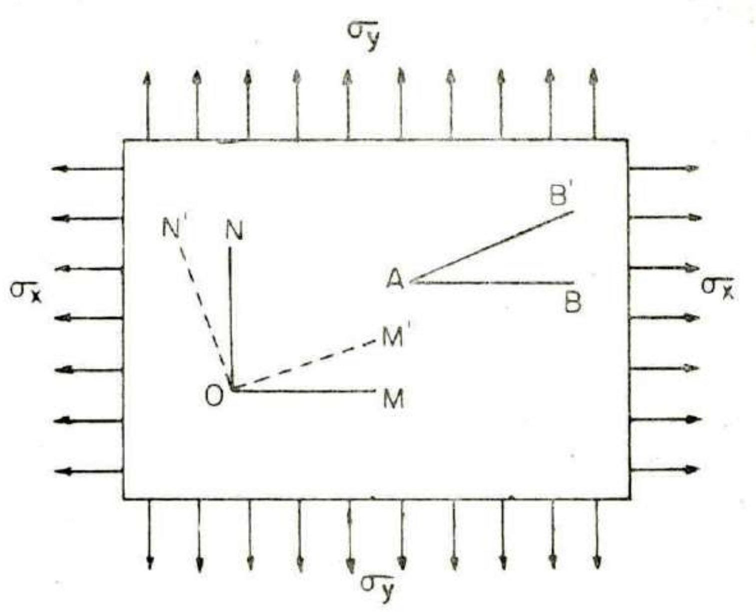
है । हम देखते है कि दो रेखायें AD एवं BC जो आरंभ में DC के लंबवत् थीं विरुपित होकर A'D एवं B'C हो जाती हैं । यदि कोण ADA' अथवा कोण BCB' को ग्रीक अक्षर (गामा) द्वारा व्यक्त किया जाय, तब रेडियन में व्यक्त कोण को अपरुपण विकृति कहा जायेगा । अतः अपरुपण विकृति, परस्पर समलंबी दो रेखाओं के मध्य कोण के परिवर्तन (रेडियन) को व्यक्त करता है । स्पष्ट है कि अपरुपण विकृति भी बिमा रहित राशि होती है ।



चित्र 1.3 अपरूपण विकृति

1.5 द्विबिमीय विकृति क्षेत्र

विकृति को समझने के लिए हमने ऊपर के अनुच्छेदों में बहुत ही सरल उदाहरण प्रस्तुत किए है । इसको और अधिक व्यापक दृष्टि में इस प्रकार समझा जा सकता है । मान लीजिए चित्र 1.4 में एक धातु की चादर के एक अंश को दिखाया गया है । इसके लंबाई एवं चौड़ाई की दिशा में क्रमशः अभिलंब प्रति बल σ_x तथा σ_y लग रहे हैं । मान लीजिए कि चादर पर प्रतिबल लगने से पूर्व तीन रेखायें AB, OM तथा ON चादर पर चिह्नांकित कर ली जाती हैं । प्रतिबल σ_x



चित्र 1.4 द्वि-अक्षीय प्रतिबल क्षेत्र में अभिलम्ब एवं अपरूपण विकृति

तथा σ_y के लगने पर ये रेखायें क्रमशः AB', OM' तथा ON' हो जाती हैं । यहाँ यह स्पष्ट है कि प्रतिबल लगने से पूर्व रेखायें OM तथा ON परस्पर लंबवत हैं परन्तु प्रतिबल लगने के बाद कोण MON सामान्यतः $\frac{\pi}{2}$ नहीं रहेगा अपितु इसका मान ϕ रेडियन हो जायगा (कल्पना कीजिए) ।

गणितीय रूप में हम लिख सकते है कि :

$$\epsilon_{AB} = \frac{AB'-AB}{AB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.6)$$

$$\text{तथा } \gamma_{MN} \Big|_{\substack{O \\ \text{बिन्दुपर}}} = \phi - \pi/2 \quad (\text{रेडियन}) \quad . \quad (1.7)$$

इस प्रकार यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी भी द्विविमीय विकृति क्षेत्र में यदि किसी बिन्दु पर किसी दिशा में अभिलंब विकृति ज्ञात करनी हो तो उस बिन्दु से निश्चित दिशा में एक रेखीय अवयव के लंबाई में अंतर ज्ञात कर सूत्र (1.6) द्वारा प्राप्त की

जा सकती है; परंतु अपरुपण विकृति केवल एक रेखीय अवयव द्वारा नहीं ज्ञात की जा सकती । इसके लिए जिस बिन्दु पर अपरुपण विकृति ज्ञात करना हो उस बिन्दु पर दो अभिलंबी रेखीय अवयवों के मध्य रेडियन में प्राप्त कोण परिवर्तन द्वारा ही सूत्र (1.7) को प्रयोग करते हुए ज्ञात किया जा सकता है ।

1.6 प्रत्यास्थता

यह पहले बताया गया है कि पदार्थ पर बाह्य बल लगाने से उसमें विरुपण उत्पन्न होता है । परन्तु यदि पदार्थ को लग रहे बाह्य बल से पूर्णतः मुक्त कर दिया जाय अर्थात् बाह्य बल पूर्णतः हटा लिया जाय तब वह अपनी पूर्वावस्था प्राप्त कर लेता है । अर्थात् बाह्य बल के लगने से उत्पन्न विरुपण पूर्णतः लुप्त हो जाता है । पदार्थ के इस गुण को 'प्रत्यावस्था' कहते है । यदि बाह्य बल के हटाने पर उत्पन्न विरुपण अंशतः ही लुप्त होता है तो ऐसे पदार्थ को अंशतः प्रत्यास्थ अथवा इलास्टो प्लॉस्टिक कहा जाता है, परन्तु यदि बाह्यबल के पूर्णतः हटा लेने पर उत्पन्न विरुपण उतना ही बना रहता है और उसका कोई अंश लुप्त नहीं होता तो उसे सुवह्य अथवा प्लैस्टिक कहा जाता है । साधारणतया इंजीनियरी अनुप्रयोगों में अवयवों पर लगने वाले भार 'प्रत्यास्थता' सीमा में ही होते हैं, जिससे कि अवयव में स्थाई विरुपण न उत्पन्न हो सके ।

1.7 प्वांसों (Poisson) अनुपात

जब एक छड़ पर तनन भार लगाया जाता है तब उसमें अनुदैर्घ्य अथवा अक्षीय विकृति उत्पन्न होती है अथवा उसकी लंबाई में वृद्धि होती है परन्तु उसके साथ ही साथ उसमें अनुप्रस्थ विकृति भी होती है जिसके कारण उसकी अनुप्रस्थ विमायें संकुचित होती हैं । इस प्रकार प्रत्यस्थता सीमा में अनुप्रस्थ विकृति एवं अनुदैर्घ्य विकृति का अनुपात, 'प्वांसो अनुपात' कहा जाता है । इसको ग्रीक अक्षर 'ν' द्वारा व्यक्त किया जाता है । इस प्रकार, चित्र 1.5 पर ध्यान दीजिए :

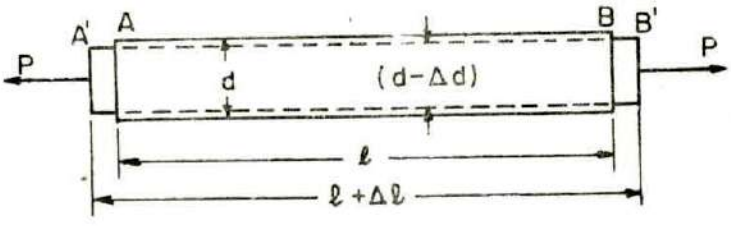
$$\nu = \frac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अक्षीय अथवा अनुदैर्घ्य विकृति}} \quad . \quad . \quad (1.8)$$

$$= (\Delta d/d) \;/\; (\Delta l/l)$$

इस स्थिरांक का नामकरण प्रसिद्ध फ्रांसीसी गणित शास्त्री एस० डी० प्वांसो के नाम पर किया गया है ।

यहाँ यह स्पष्ट रूप से समझ लेना आवश्यक है कि प्रतिबल की संकल्पना अमूर्त है; इसे प्रत्यक्ष रूप से देखा अथवा मापा नहीं जा सकता है जब कि 'विकृति'

को स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है तथा इसका प्रत्यक्ष प्रमापन संभव है । प्रतिबल का सूत्र (1.4) द्वारा गणितीय मान अवश्य ज्ञात किया जा सकता है परन्तु इसका मापन अप्रत्यक्ष रूप से विकृति द्वारा ही संभव हो पाता है जैसा कि हम आगे के अध्यायों में देखेंगे ।



चित्र 1.5 अनुदैर्ध्य एवं पार्श्व विकृति

1.8 बलकृत गुणधर्म एवं पदार्थ परीक्षण

इंजीनियरी उपयोग में पदार्थों को बाह्य बलों अथवा भार को वहन करना पडता है । तथा इनका स्वरूप अनुच्छेद 1.2 के अनुसार कुछ भी हो सकता है । ऐसे भार लगने की स्थिति में भी अवयव (जो विभिन्न पदार्थों के बने होते हैं) अपनी उपयोगिता बनाये रखें तथा वांछित उद्देश्य की पूर्ति संतोषजनक ढंग से करते रहें, यह पदार्थ के बलकृत गुणधर्म पर बहुत कुछ निर्भर करता है । अतः किसी भी इंजीनियरी अवयव का पदार्थ सुनिश्चित करते समय उसके बलकृत गुणधर्म की जानकारी अत्यावश्यक होती है ।

यों तो पदार्थ के गुणधर्म कई वर्गों में विभाजित किए जा सकते है जैसेः बलकृत, रासायनिक, भौतिक, वैद्युत एवं चुंबकीय परंतु यांत्रिक इंजीनियरी उपयोगों के लिए बलकृत गुणधर्म महत्वपूर्ण होता है तथा इसके द्वारा पदार्थ का बाह्य बलों के प्रति व्यवहार का समुचित ज्ञान प्राप्त होता है । अतः यहाँ पर हम पदार्थ के बलकृत गुणधर्म का ही वर्णन करेंगे ।

पदार्थ के बलकृत गुणधर्म ज्ञात करने के लिए प्रयोग शाला में कुछ मानक परीक्षण संपन्न किए जाते हैं, उनमें से कुछ प्रमुख का वर्णन यहाँ किया जा रहा है ।

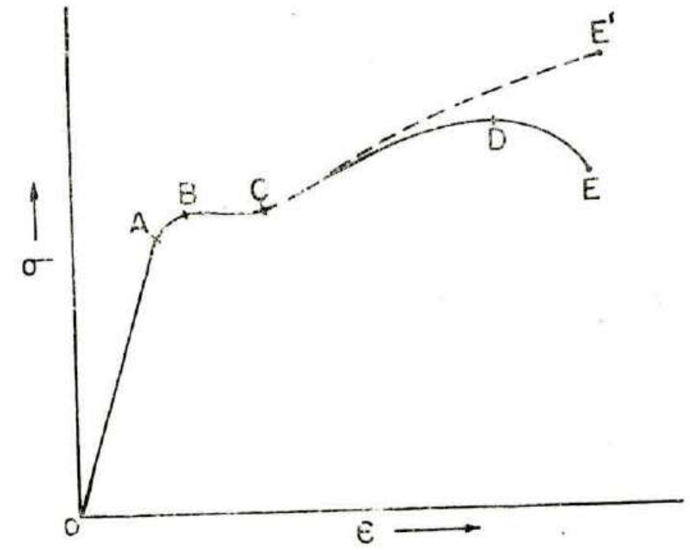
1.8.1 तनन परीक्षण

किसी पदार्थ में प्रतिबल एवं विकृति का परस्पर क्या संबंध है इसको तनन परीक्षण द्वारा ज्ञात किया जाता है । जिस पदार्थ का तनन परीक्षण करना हो सर्वप्रथम उसका 'परख नमूना' तैयार किया जाता है । परख नमूने का परिच्छेद यद्यपि गोल अथवा आयताकार हो सकता है परन्तु सामान्यतः गोल परिच्छेद ही प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह खराद मशीन पर आसानी से बन सकता है; इसका मध्यवर्ती भाग इसके सिरों की अपेक्षा पतला बनाया जाता है जिससे परख नमूने का परीक्षण के दौरान इसी भाग में विभंजन सुनिश्चित किया जा सके । इसके सिरों का निर्माण इस प्रकार किया जाता है जिससे कि उन्हें परीक्षण-मशीन के जबड़ों में दृढ़तापूर्वक जकड़ा जा सके । यह परीक्षण-मशीन के प्रकार पर निर्भर करता है । कुछ मशीनों के जबड़ों में चूड़ियाँ बनी रहती हैं अतएव परख नमूने के सिरे भी तदनुसार चूड़ीदार बने होते हैं जब कि अन्य मशीनों में परख नमूने के सिरों को वेज आकार के घर्षणी जबड़ों में जकड़ा जाता है अतः ऐसे परख नमूनों के सिरे सपाट होते हैं ।

आधुनिक परीक्षण मशीनों में परख नमूने के सिरों को द्रव चालित जबड़ो में जकड़ा जाता है एवं ऐसे जबड़ों में परख नमूने के सिरों एवं जबड़ों के मध्य दाब को नियंत्रित किया जा सकता है क्योंकि पदार्थ की कठोरता के अनुसार ही समुचित दाब द्वारा परख नमूने को जबड़े में जकड़ा जाता है ।

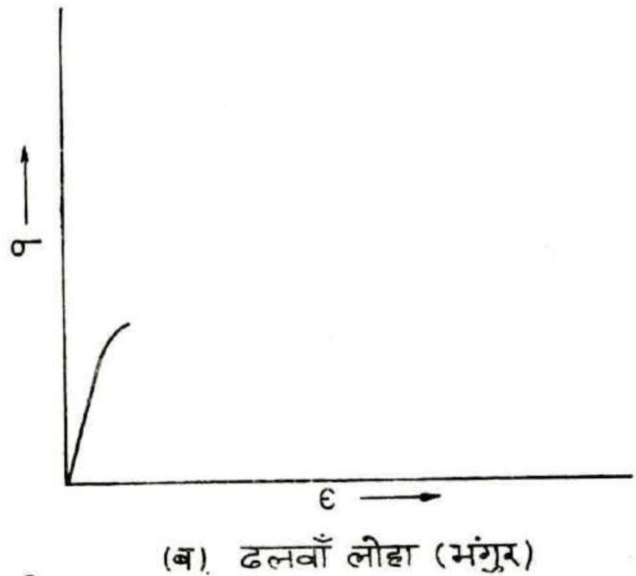
परख नमूने को परीक्षण मशीन के जबड़ों में जकड़ कर उस पर तनन भार लगाया जाता है । सामान्यतः मशीन का एक जबड़ा स्थिर रहता है तथा दूसरा इस प्रकार गतिमान होता है की परख नमूने पर तनन भार लग सके । परीक्षण-मशीन में यह व्यवस्था होती है कि परख नमूने पर लग रहे भार एवं उसमें उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि को ज्ञात किया जा सके । तनन भार का मान धीरे-धीरे बढाया जाता है तथा यह प्रक्रिया तब तक चलती रहती है जब तक कि परख नमूना दो खंडों में विभंजित नहीं हो जाता । परख नमूने में प्रतिबल का मान तात्क्षणिक भार के मान को उसके आरंभिक अनुप्रस्थ परिच्छेद से विभाजित कर एवं विकृति का मान इसके निश्चित लंबाई में उत्पन्न तात्क्षणिक दैर्ध्यवृद्धि को आरंभिक निश्चित लंबाई से विभाजित कर प्राप्त किया जाता है । इस प्रकार परख नमूने के पदार्थ का संपूर्ण प्रतिबल विकृति आरेख प्राप्त किया जा सकता है ।

चित्र 1.6 में तीन पदार्थों के लिए प्रारुपिक प्रतिबल-विकृति आरेख दिखाये गए हैं चित्र 1.6 (अ) एक प्रारुपिक संरचनात्मक इस्पात अथवा मृदु इस्पात का प्रतिबल-विकृति आरेख व्यक्त करता है। इसमें भुज अक्ष अक्षीय विकृति को एवं कोटि अक्ष तदनुरुपी प्रतिबल को दर्शाता है। इस प्रतिबल-विकृति आरेख के बिन्दुओं O, A, B, C, D तथा E पर ध्यान दीजिए ।



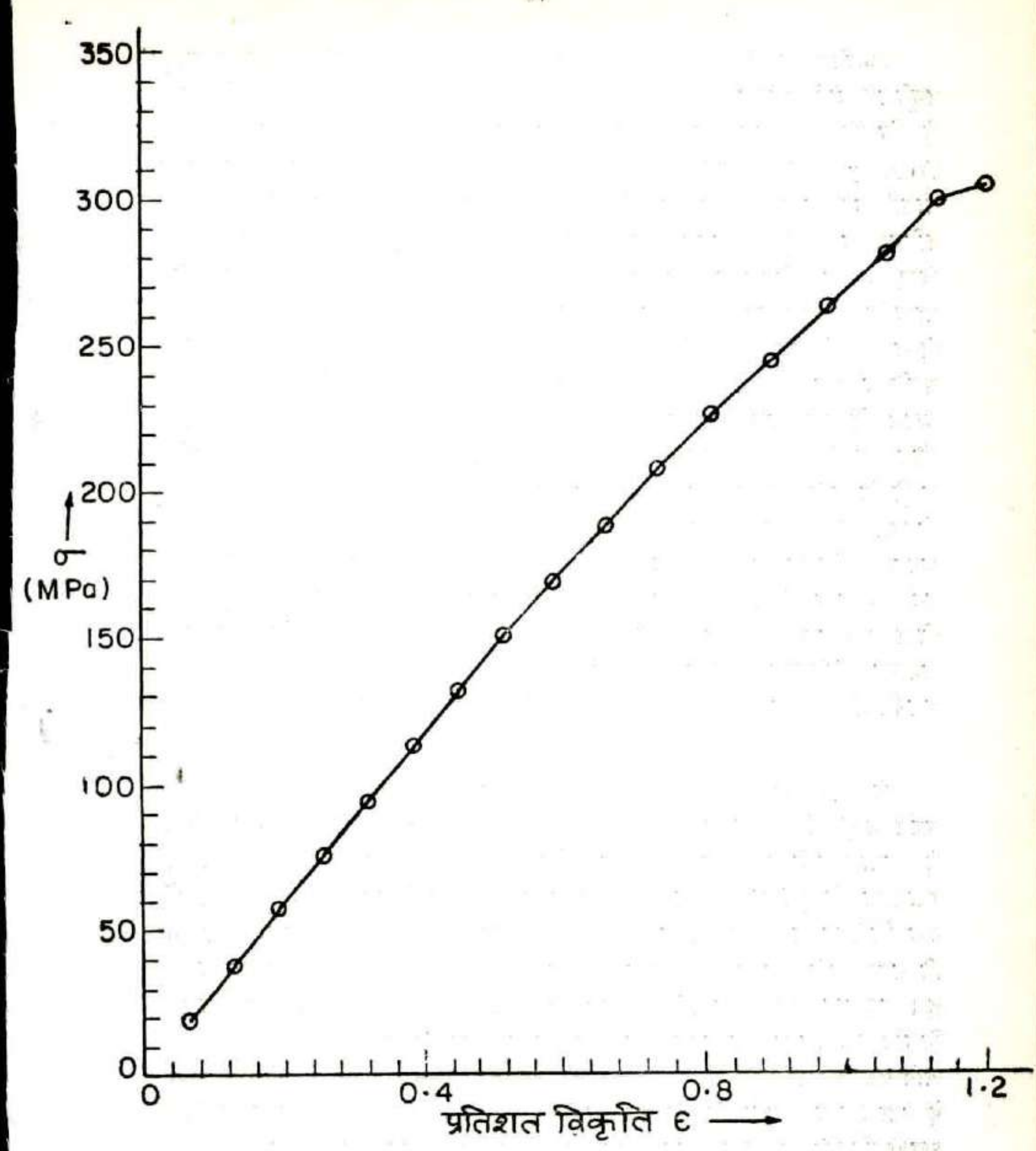
(अ) मृदु-इस्पात (तन्य)

चित्र 1.6 तन्य धातु का प्रतिबल-विकृति आरेख



(ब) ढलवाँ लोहा (भंगुर)

चित्र 1.6 भंगुर पदार्थ का प्रतिबल-विकृति आरेख



(स) तन्तु प्रतिबलित प्लैस्टिक

चित्र 1·6 मिश्रित पदार्थ का प्रतिबल-विरूपण आरेख

3—23 M. of HRD/ND/99

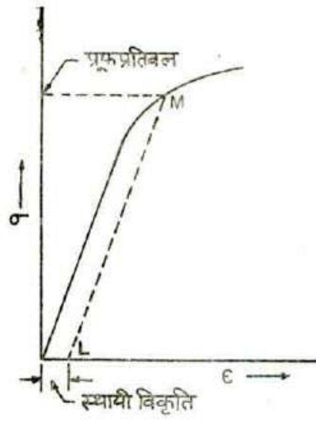
वक्र बिन्दु O से प्रारंभ होता है जिससे यह ज्ञात होता है कि आरंभ में परख नमूने पर कोई प्रतिबल अथवा विकृति नहीं है। OA एक सरल रेखा है जिससे स्पष्ट है कि बिन्दु A तक हुक का समानुपाती नियम (Hook's Law of Proportionality) लागू होता है। A पर प्रतिबल के मान को 'समानुपाती सीमा' कहा जाता है, जिसकी परिभाषा इस प्रकार की जा सकती है कि यह प्रतिबल का वह अधिकतम मान है जहाँ तक हुक का नियम लागू रहता है। बिन्दु A पर प्रतिबल के मान को प्रत्यास्थता सीमा भी कहा जाता है इसकी परिभाषा के अनुसार यह वह अधिकतम प्रतिबल होता है जहाँ तक कि पदार्थ में स्थायी विरूपण नहीं होता है। बिन्दु A तक पदार्थ पूर्ण रूप से प्रत्यास्थ होता है तथा इसके पश्चात वह सुघट्य सीमा को प्राप्त हो जाता है। बिन्दु A तक भार के कारण उत्पन्न विरूपण उसके हटाये जाने पर पूर्ण रूप से लुप्त हो जाता है जब कि सुघट्यता सीमा में ऐसा संभव नहीं हो पाता है। समानुपाती सीमा OA में परख नमूने के परिच्छेद के मान में अंतर अत्यंत न्यून होता है। बहुत से धातुओं जैसे पिटवा, लोहा तथा इस्पात के संदर्भ में समानुपाती एवं प्रत्यास्थता सीमा में भेद करना अत्यंत कठिन है क्योंकि ये दोनों ही बिन्दु लगभग एक दूसरे से मिले जुले रहते है तथा संपूर्ण प्रत्यास्थता सीमा तक हुक का नियम (Hook's Law) लागू होता है। परन्तु बेल्लित एलुमीनियम के संदर्भ में प्रत्यास्थता सीमा के भीतर भी जब कि प्रतिबल का मान कम ही होता है हुक का नियम लागू नहीं रहता। प्रतिबल-विकृति वक्र के द्वारा प्रत्यास्थता सीमा ज्ञात करना कठिन होता है।

बिन्दु B को पराभव बिन्दु कहा जाता है, यहाँ पर बिना भार का मान बढ़ाये परख नमूने में अधिक मात्रा में दैर्घ्यवृद्धि होती है। BC लगभग क्षैतिज होता है तथा उसको पदार्थ का पराभवन (Yield) कहा जाता है। कुछ पदार्थों में पराभवन बिन्दु (Yield Point) प्राप्त करना संभव नहीं होता अतः ऐसे पदार्थों में एक निश्चित मात्रा में स्थायी विकृति प्राप्त करने के लिए आवश्यक प्रतिबल को ही पराभव बिन्दु के समतुल्य व्यक्त किया जाता है। तथा इसे प्रूफ प्रतिबल कहा जाता है। यह पाया गया है कि यदि सुघट्यता सीमा में से भार को हटाया जाय तो प्रतिबल विकृति वक्र मूल वक्र के सरल रेखीय भाग के समान्तर ही होगा। संपूर्ण भार हटाये जाने पर कुछ विकृति शेष रह जाती है जिसको चित्र 1.7 में दिखाया गया है तथा इसको स्थायी विकृति कहा जाता है। प्रूफ प्रतिबल ज्ञात करने के लिए स्थायी विकृति का मान अलग अलग धातुओं के लिए अलग अलग होता है।

इस्पात तथा एलुमीनियम के मिश्र धातुओं के लिए 0.002 पीतल तथा कांस्य के लिए 0.0035 तथा धूसर ढलवा लोहा के लिए यह 0.0005 होती है। किसी

भी स्थायी विरूपण के लिए प्रूफ प्रतिबल ज्ञात करने के लिए विकृति अक्ष पर बिन्दु L अंकित कीजिए। चित्र 11.7 में OA सरल रेखा के समान्तर रेखा LM खींचिए। M बिन्दु पर प्रतिबल का मान प्रूफ प्रतिबल होगा।

बिन्दु D पर (चित्र 1.6 अ) प्रतिबल का मान पदार्थ की चरम तनन सामर्थ्य को व्यक्त करेगा। यह वह अधिकतम प्रतिबल होता है जो कि तनन परीक्षण में प्राप्त होता है। इस बिन्दु D तक परिच्छेद में कमी तथा परख नमूने की समस्त लंबाई में वृद्धि समान रूप से होती है। इस बिन्दु के पश्चात अधिकतम प्रतिबल के परिच्छेद पर अथवा न्यूनतम क्षेत्रफल के परिच्छेद में सहसा स्थानिक दैर्ध्यवृद्धि प्रारंभ हो जाती है। तथा इस प्रकार एक बहुत छोटे भाग में ग्रीवा बन जाती है। इस स्थानीय ग्रीवा के कारण परख नमूने पर भार कम होना प्रारंभ हो जाता है; यद्यपि वास्तविक प्रतिबल का मान अभी भी बढ़ता रहता है। बिन्दु E पर परख नमूना का विभंजन हो जाता है तथा इस बिन्दु के प्रतिबल को अभिहित विभंजन प्रतिबल कहा जाता है क्योंकि यह परख नमूने के मूल विभाओं के आधार पर प्राप्त किया जाता है।



चित्र 1.7 ऐसे पदार्थों का प्रारूपिक प्रतिबल-विकृति आरेख जिनमें पराभवन बिन्दु स्पष्ट परिलक्षित नहीं होता है।

यदि बिन्दु C के पश्चात प्रतिबल का मान ज्ञात करने के लिए वास्तविक क्षेत्रफल प्रयोग किया जाय तब वक्र का रूप बिन्दुकित वक्र के समान होगा जैसा कि चित्र 1.6 (अ) में दिखाया गया है तथा वास्तविक विभंजन प्रतिबल का मान बिन्दु E^1 द्वारा प्राप्त होगा।

इस प्रकार प्रतिबल विकृति वक्र द्वारा हमको पदार्थ के बलकृत गुणधर्म प्राप्त होते हैं जैसे कि समानुपाती सीमा, पराभवन बिन्दु प्रतिबल, चरम तनन प्रतिबल तथा अभिहित विभंजन प्रतिबल। प्रत्यास्थता मापांक को जिसको यंग मापांक कहा जाता है। वह भी रेखा OA की प्रवणता द्वारा इस वक्र से प्राप्त किया जा सकता है। यदि OA रेखा पर कोई बिन्दु लिया जाय तथा इस बिन्दु के प्रतिबल एवं विकृति के मान पढ़ लिए जाय तब यंग मापांक $= \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

वास्तविक विभंजन प्रतिबल का मान, विभंजन भार को विभंजन होने के बाद विभंजन परिच्छेद से विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है।

प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि : यदि विभंजन बिन्दु तक परख नमूने के कुल दैर्ध्यवृद्धि δl हो जिसको प्रमाप लंबाई δl में नापा गया हो तब प्रतिशत लंबाई वृद्धि को $\frac{\delta l}{l} \times 100$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। भारण करने से पूर्व यदि परख नमूने पर l की दूरी पर दो बिन्दु अंकित कर दिया जाय तथा विभंजन के पश्चात यदि इन बिन्दुओं के मध्य की दूरी नापी जाय तब प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि सरलता पूर्वक ज्ञात किया जा सकता है। यदि परख नमूने का अंकित चिह्नों के बाहर विभंजन हो तब प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि का परिकलन संभव नहीं हो पाता। यह पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि संपूर्ण दैर्ध्यवृद्धि, समान रूप से लंबाई l में अधिकतम भार के कारण प्राप्त दैर्ध्यवृद्धि kl तथा ग्रीवा में बढ़ी हुई स्थानिक दैर्ध्यवृद्धि B के योग के बराबर होगी अतः
$\delta l = B + kl$

$$\text{प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि} = \frac{\delta l}{l} \times 100 = 100 \times \left(\frac{B}{l} + k\right) \qquad (1\cdot 9)$$

इसके अतिरिक्त स्थानिक दैर्ध्यवृद्धि B उस स्थान के अनुप्रस्थ क्षेत्रफल पर निर्भर होती है, अतः

$B = C\sqrt{A}$ जहाँ C एक स्थिरांक है।

समीकरण (1.9) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$\text{प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि} = 100 \left(\frac{C\sqrt{A}}{l} + k\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.10)$$

यहाँ C तथा k स्थिरांक हैं, A तथा l क्रमशः परख नमूने के आरंभिक क्षेत्रफल तथा प्रमाप लंबाई को व्यक्त करते हैं।

समीकरण (1.10) से स्पष्ट होता है कि प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि प्रमाप लंबाई एवं अनुप्रस्थ परिच्छेद का फलन होता है। अतः किसी परख नमूने की प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि लिखते समय प्रमाप लंबाई तथा उसका अनुप्रस्थ क्षेत्रफल भी बताना आवश्यक होता है।

अनुप्रस्थ क्षेत्रफल में प्रतिशत ह्रास : इसकी परिभाषा $\frac{A-A'}{A} \times 100$ द्वारा दी जाती है, जहाँ A परख नमूने का प्रारंभिक क्षेत्रफल तथा A' विभंजित परिच्छेद के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है, जहाँ पर ग्रीवा के कारण उसका मान न्यूनतम होता है।

प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि एवं अनुप्रस्थ क्षेत्रफल में प्रतिशत ह्रास दोनों ही पदार्थ के तन्यता के परिचायक होते हैं। यदि इनका मान अधिक है तब पदार्थ अधिक तन्य होता है। तन्यता पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण इसको तार के रुप में कर्षण द्वारा प्राप्त किया जा सके। वे पदार्थ जो तन्य नही होते 'भंगुर' कहे जाते हैं।

भंगुर पदार्थों का तनन परीक्षण : चित्र (1.6 ब) ढलवां लोहे का प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाता है, जो कि एक भंगुर पदार्थ है। यह बहुत न्यून दैर्ध्यवृद्धि एवं अनुप्रस्थ प्रतिशत क्षेत्रफल ह्रास पर ही टूट जाता है। इसके वक्र का थोड़ा सा भाग ही सरल रेखा के रूप में होता है जहाँ से इसका यंग मापांक ज्ञात किया जा सके।

अभ्यास 1.1

एक मृदु इस्पात के तनन परीक्षण के अंतर्गत, जिसमें परख नमूने का मूल व्यास 20 mm तथा प्रमाप लंबाई 100 mm है, निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए हैं।

समानुपाती सीमा पर भार तथा दैर्ध्यवृद्धि का मान क्रमशः 05 kN तथा 0.12 mm है। पराभव बिन्दु भार, अधिकतम भार तथा विभंजन भार क्रमशः 100 kN, 165 kN तथा 125 kN हैं।

विभंजन के पश्चात दोनों खंडों को मिलाने पर दोनों अंकित प्रमाप चिह्नों के मध्य दूरी 130 mm पाई गई तथा ग्रीवा पर न्यूनतम व्यास 16 mm था। अतः निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

यंग मापांक, समानुपाती सीमा का प्रतिबल, चरम तनन प्रतिबल, वास्तविक एवं अभिहित विभंजन प्रतिबल, प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि तथा अनुप्रस्थ क्षेत्रफल में प्रतिशत ह्रास।

हल :

समानुपाती सीमा-प्रतिबल $= \frac{85\times 10^3}{(\pi/4)\times(20)^2} = 270.56$ MPa

समानुपाती सीमा पर विकृति $= \frac{0.12}{100} = 0.0012$

यंग मापांक $= \frac{270.56}{0.0012} = 225$ GPa

पराभव प्रतिबल $= \frac{100\times 10^3}{(\pi/4)\times(20)^2} = 318.3$ MPa

चरम तनन प्रतिबल $= \frac{160\times 10^3}{(\pi/4)\times(20)^2} = 509.3$ MPa

अभिहित विभंजन प्रतिबल $= \frac{125\times 10^3}{(\pi/4)\times(20)^2} = 397.0$ MPa

वास्तविक विभजन प्रतिबल $= \frac{125\times 10^3}{(\pi/4)\times(16)^2} = 621$ MPs

प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि $= \left(\frac{(130-100)}{100}\right) \times 100 = 30$

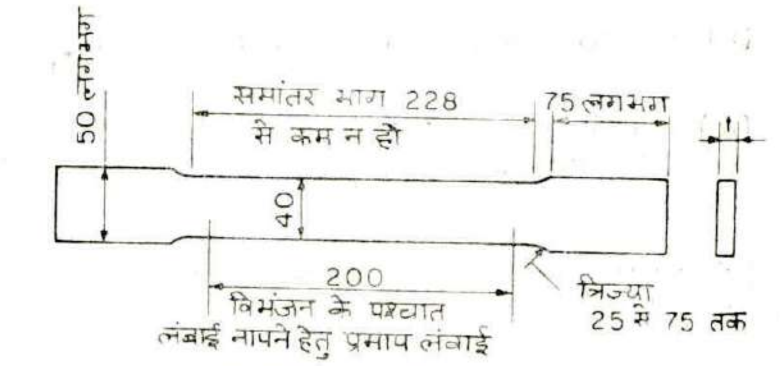
अनुप्रस्थ क्षेत्रफल में प्रतिशत ह्रास $= \frac{\pi/4\,(400-256)}{(\pi/4)\times(20)^2} \times 100 = 36$

परख नमूने का निर्माण : किसी भी परख नमूने को निर्धारित मानक के अनुसार ही बनाया जाता है। इसके लिए भारतीय मानक संस्था ने मानक निर्धारित किए हैं। चित्र 1.8 में सपाट तथा गोल परख नमूने के लिए आवश्यक मार्गदर्शक सिमायें निर्धारित की गई हैं।

यदि सिरे सपाट हों तो उनकी पर्याप्त लंबाई होनी चाहिए जिससे कि जबड़ों में अच्छी तरह पकड़े जा सकें। मध्यवर्ती भाग की लंबाई प्रयुक्त प्रमाप लंबाई के अनुरूप पर्याप्त मात्रा की होनी चाहिए जिससे कि दैर्ध्यवृद्धि-मापी का उपयोग सुचारु रूप से किया जा सके। इसकी दूरी सिरों से पर्याप्त होनी चाहिए जिससे कि जबड़े में पकड़े गये बड़े भाग का इसके ग्रीवा करण में कोई प्रभाव न पड़े तथा वह एक प्रकार की प्रतिबाधा उत्पन्न न करे। यदि ग्रीवा सिरों के समीप प्राप्त होती है तो सिरों के बड़े भाग के कारण इसकी मात्रा कुछ कम हो जाती है क्योंकि उस भाग का पदार्थ सरलतापूर्वक दैर्ध्यवृद्धि में भाग नहीं ले पाता। प्रारंभ में परख नमूने को बनाने के लिए मशीन करते समय सतह पर किसी प्रकार की विषमता न होनी चाहिए।

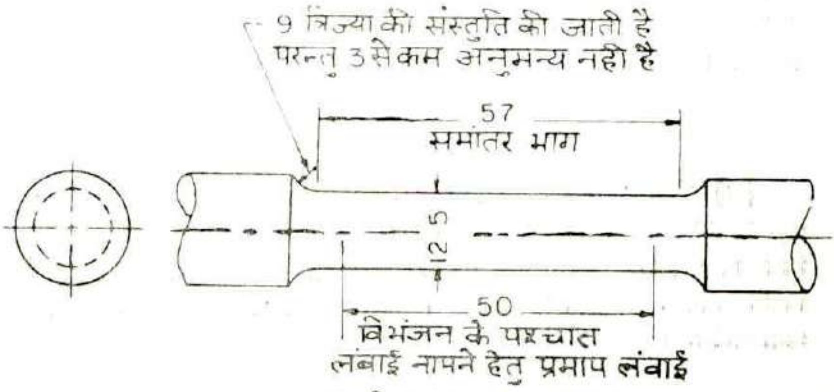
सिरों के बड़े भाग का मध्यवर्ती भाग में संक्रमण सहसा नहीं होना चाहिए तथा एक सुचारु फिलेट द्वारा इसको प्राप्त किया जाना चाहिए ।

ऐसी तीखी उभारों को गोल कर देना चाहिए जिससे कि इन स्थलों पर प्रतिबल का संकेन्द्रीकरण न हो । भंगुर पदार्थों के संदर्भ में इस दिशा में विशेष सावधानी की आवश्यकता होती है ।



(अ) सपाट परख नमूना

चित्र 1.8 तनन परीक्षण परख नमूने के मानक विनिर्देश



(ब) बेलनाकार परख नमूना

चित्र 1.8 : मानक परख नमूने (सभी मापें mm में हैं)

संपीडन परीक्षण :— संपीडन परीक्षण अनुप्रयुक्त प्रतिबल की दृष्टि से तनन परीक्षण का विपरीत ही होता है । परन्तु इसमें कुछ व्यावहारिक कठिनाइयाँ होती हैं, जिससे कि परीक्षण कुछ त्रुटि पूर्ण रह जाता है, जिनका वर्णन नीचे दिया गया है :—

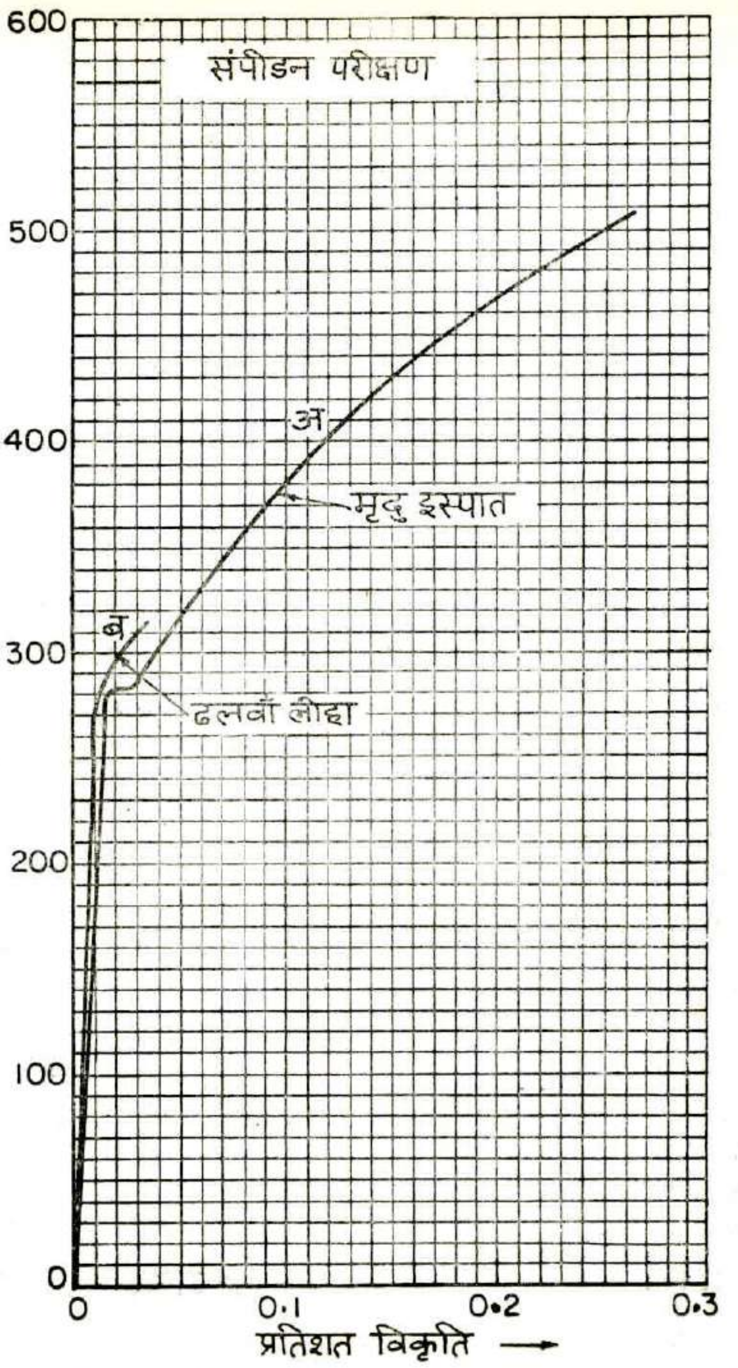
(i) पूर्ण रूप से अक्षीय भारण में कठिनाई ।

(ii) परख नमूने में संकुचन के साथ साथ बंकन भी हो जाता है ।

(iii) मशीन के आधार तथा परख नमूने के सिरों के मध्य घर्षण होता है जिससे परीक्षण-परिणाम पर प्रभाव पड़ता है ।

(अ) तन्य पदार्थ :—चित्र 1.9 में मृदु-इस्पात का प्रतिबल-विकृति वक्र दिखाया गया है । समानुपाती सीमा तक पदार्थ के यंग मापांक का मान तनन परीक्षण द्वारा प्राप्त मान के बराबर ही होता है । वक्र बराबर बढ़ता जाता है तथा सीमित नहीं रहता क्योंकि पदार्थ की तन्यता के कारण परख नमूने की अनुप्रस्थ विमायें भार के साथ बढ़ती जाती है और इसका विभंजन नहीं होता है तथा यदि परख नमूने की लंबाई ऐसी हो कि इसमें व्याकुंचन न हो तो यही स्थिति बनी रहती है । अंत में परख नमूने का आकार बहुत छोटा हो जाता है, तथा यह बाहर की तरफ फूल जाता है । ताँबा, पीतल तथा एलुमिनियम में स्पष्ट पराभव बिन्दु नहीं प्राप्त होता है ।

(ब) भंगुर पदार्थ :— संपीडन परीक्षण मुख्यतः भंगुर पदार्थों के लिए ही प्रयुक्त किया जाता है जैसे कि ढलवा लोहा आदि जिसका प्रतिबल विकृति वक्र चित्र 1.9 (ब) में दिखाया गया है । भंगुर पदार्थ सामान्यतः अपरूपण द्वारा विकर्ण समतलों से विभंजित होते हैं । इसका स्पष्टीकरण अगले अध्यायों में दिया जायेगा ।



चित्र 1.9 संपीडन प्रतिबल-विकृति आरेख

संपीडन परीक्षण का परख-नमूना गोल, वर्गाकार अथवा आयाताकार हो सकता है, परन्तु इसकी लंबाई इस प्रकार की होनी चाहिए जिससे परीक्षण करते समय इसका व्याकुंचन न हो। परख-नमूने की लंबाई जितनी कम होगी उतनी ही व्याकुंचन की संभावना कम होगी परन्तु इस परीक्षण में सिरों पर घर्षण महत्वपूर्ण होता है। सामान्यतः लंबाई तथा व्यास अथवा इसकी न्यूनतम विभा में 2 का अनुपात प्रयुक्त किया जाता है।

तनन तथा संपीडन परीक्षण यंत्र :— इस प्रकार के यंत्र में दो मुख्य अवयव होते हैं, ये हैं : भारण करने वाला भाग तथा दूसरा इसके मान को बतलाने वाला भाग। इसके अतिरिक्त अन्य सहायक उपकरण भी होते हैं जैसे परख नमूने को जकड़ने के लिए, आलेख तथा शक्ति एकक आदि। दैर्ध्यवृद्धि अथवा संकुचन को सदैव विकृति मापी (दैर्ध्यमापी अथवा संकुचन मापी) द्वारा प्राप्त किया जाता है जिसका वर्णन अगले अनुच्छेद में किया जायेगा।

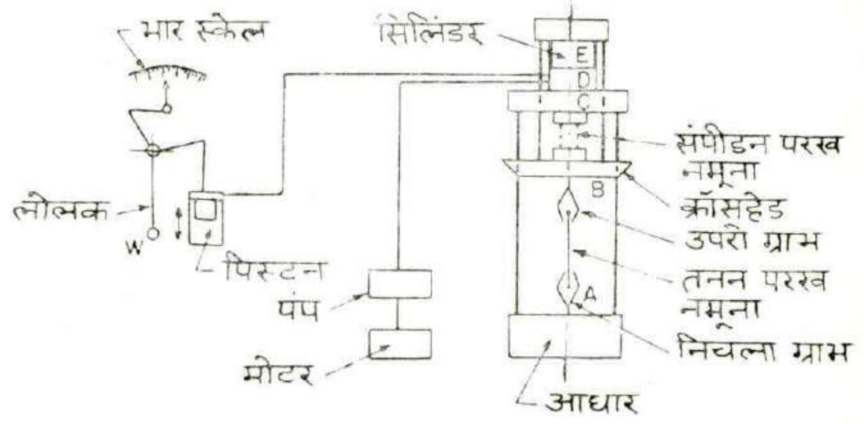
भार यांत्रिक विधि द्वारा लगाया जा सकता है जैसे स्क्रू तथा गियर यंत्रावली आदि, परन्तु आधुनिक यंत्रों में भार द्रवीय दाब द्वारा लगाया जाता है अतः ये यंत्र द्रवीय यंत्र कहे जाते है। अब आधुनिक यंत्र सर्वोहाइड्रालिक पद्धति के प्राप्य हैं जो कंप्यूटर द्वारा नियंत्रित होते हैं।

कुछ यंत्र केवल विशेष परीक्षण के लिए ही उपयुक्त होते है परन्तु सामान्यतः एक ही यंत्र में तनन, संपीडन, दंड बंकन एवं अपरुपण परीक्षण संपन्न करने की व्यवस्था होती है तथा इनको सार्विक परीक्षण यंत्र कहते हैं। कुछ सार्विक परीक्षण यंत्रों में कठोरता परीक्षण तथा पत्ती कमानी की परीक्षण की भी व्यवस्था होती है। सर्वोहाइड्रालिक पद्धति एवं कंप्यूटर प्रणाली के बहुमुखी विकास के कारण अब ये यंत्र स्थैतिक तथा गतिक दोनों प्रकार के परीक्षण संपन्न करने की योग्यता रखते हैं।

चित्र 1.10 में एक प्रारूपिक सार्विक परीक्षण यंत्र के रेखा चित्र को दिखाया गया है। इसमें A तथा C दो स्थिर क्रॉस हेड हैं। क्रॉस हेड में A में निचले जकडने वाले शिकंजे होते हैं तथा इसको एक वर्म गियर एवं मोटर की सहायता से किसी भी उंचाई पर निश्चित किया जा सकता है जिससे कि तनन परीक्षण परख नमूना पकड़ा जा सके। परन्तु फिर भी इसको स्थिर जबड़ा कहा जाता है क्योंकि परीक्षण करते समय यह गतिशील नहीं रहता है। इस जबड़े को उपर करना इस लिए आवश्यक होता है जिससे कि विभिन्न लंबाई के परख नमूनों का परीक्षण किया जा सके। B गतिमान क्रॉस हेड है तथा इसमें ऊपरी गतिमान जबड़े लगे होते हैं। तनन परीक्षण के लिए परख नमूने को चित्र में दिखाये भाँति दोनों जबड़ों में

पकड़ा जाता है, तथा पंप द्वारा सिलिंडर D में तेल का दाब दिया जाता है जिससे कि पिस्टन E ऊपर उठने लगता है जो कि क्रॉस हेड B से जुड़ा रहता है अतः यह परख नमूने पर भार लगाता है। संपीडन परीक्षण के लिए परख नमूने को क्रॉस हेड B तथा C के मध्य जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, रखा जाता है। तथा तनन परीक्षण के समान ही इसपर भी भार लगता है।

भार मापक साधन एक लोलक प्रमापी होता है। सक्रिय सिलिंडर D से तेल का दाब एक अन्य छोटे सिलिंडर में पहुँचाया जाता है जो पिस्टन को नीचे धकेलता है। पिस्टन की इस गति द्वारा लोलक तथा सूचक चलता है। लोलक एवं सूचक का विक्षेप एक ही भार के लिए बदला जा सकता है अतः इसी यंत्रावली का प्रयोग भिभिन्न परिमाणों के भार के लिए किया जा सकता है। यंत्र में विभिन्न भार परिसर के लिए अलग अलग डायल होते हैं अथवा एक ही डायल में विभिन्न भार परिसरों को अंकित किया जा सकता है। भार मापन की यथार्थता की आवश्यकता के अनुसार किसी परीक्षण में समुचित भार परिसर को चुना जाता है।

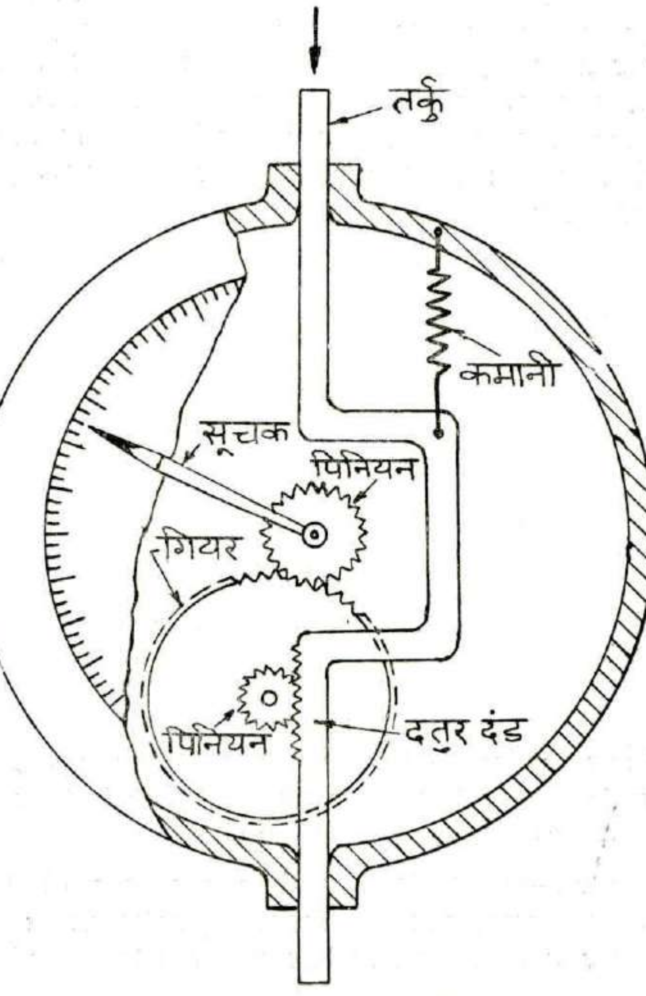


चित्र 1.10 सार्विक परीक्षण मशीन

दंड बंकन परीक्षण के लिए दंड को दो आधारों पर टिकाया जाता है, जिनको क्रास हेड B के मंच पर कहीं भी सरकाया जा सकता है तथा क्रॉस हेड C में एक रोलर द्वारा दंड पर संकेन्द्री भार लगाया जाता है।

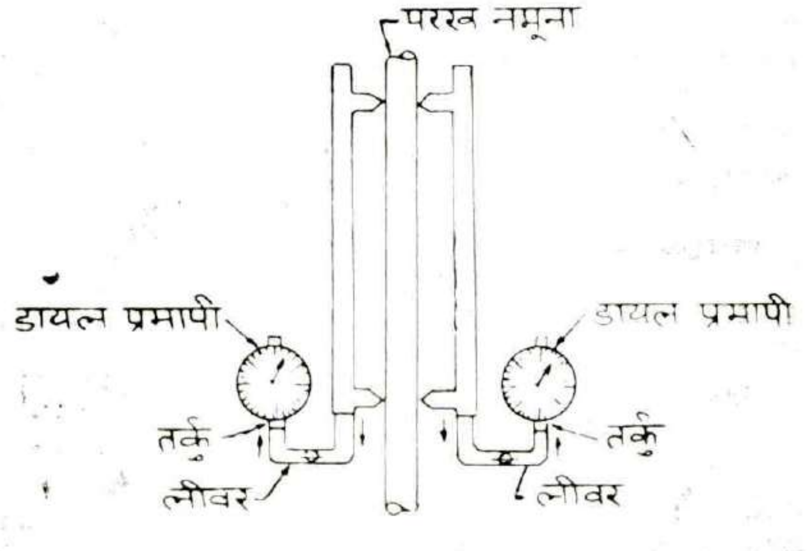
विकृति-मापन :— परीक्षण के दौरान अत्यंत न्यून मात्रा की दैर्ध्यवृद्धि अथवा संकुचन को ज्ञात करने के लिए कुछ उपकरण प्रयुक्त किए जाते है। ये उपकरण परख नमूने की एक निश्चित लंबाई में इस मात्रा को अत्यंत यथार्थता से नाप

सकते हैं तथा इनको यांत्रिक अथवा प्रकाशिक विधियों द्वारा आवर्धित किया जाता है। तनन परीक्षण में दैर्ध्यवृद्धि मापी नामक उपकरण को दो प्रमाप बिन्दुओं के मध्य लगा दिया जाता है तथा यह उन बिन्दुओं के मध्य औसत दैर्ध्यवृद्धि को दर्शाता है। संपीडन परीक्षण के लिए एक सरल उपकरण, जिसका नाम डायल गेज है, प्रयोग किया जा सकता है, यह क्रॉस हेड B की गति के मान को बतलाता है जिससे परख नमूने में संकुचन का मान प्राप्त हो जाता है।



चित्र 1.11 डायल प्रमापी की संरचना

डायल गेज क्रिया विधि को चित्र (1.11) में दिखाया गया है क्योंकि उसका उपयोग, दैर्ध्यवृद्धि तथा संकुचन दोनों को ही ज्ञात करने के लिए, अधिकतर किया जाता है। इस उपकरण में तर्कु की गति एक सूचक को संचालित करती है जो कि अंकित डायल पर रैक तथा गियर माला की सहायता से चलता है। गियर माला का प्रयोग मुख्यतः गति का अवर्धन करने के लिए किया जाता है, तथा यह इसके पश्चात सूचक को संचारित की जाती है। साधारण रूप में प्रयोग किए जाने वाले डायल सूचक में दो सबसे छोटे चिह्नों के मध्य दूरी तर्कु के $\frac{1}{100}$ mm के गति के बराबर होती है। संपीडन परीक्षण में डायल सूचक को इसी रूप में प्रयुक्त किया जाता है परन्तु इसको चुम्बकीय आधार पर स्थित किया जाता है तथा इसका तर्कु क्रॉस हेड के गति के साथ ही चलता रहता है। तनन परीक्षण में प्रमाप लंबाई की दैर्ध्यवृद्धि द्वारा एक लीवर संचलित होता है जो फिर तर्कु को गति प्रदान करता है जैसा कि चित्र (1.12) में दिखाया गया है।



चित्र 1.12 यांत्रिक विकृति मापी

वैद्युत प्रतिरोध विकृति-मापी :—बहुत सी परिस्थितियों में सुदूरपाठी विकृति मापी का प्रयोग आवश्यक होता है जहाँ कि साधारण विकृति मापी का प्रयोग संभव नहीं होता तथा जहाँ संकीर्ण स्थान पर विकृति को नापना आवश्यक होता है जैसे बाँध के भीतरी भागों में। ऐसी दशा में वैद्युत प्रतिरोध विकृति-मापी बहुत उपयोगी सिद्ध होते हैं।

इस विकृति मापी की रचना इस प्रकार की होती है कि जिस वस्तु पर ये चिपकाये जाँय यदि उसमें कोई विकृति हो तो यह प्रमापी के वैद्युत प्रतिरोध में परिवर्तन के समानुपाती होती है। इसकी रचना तथा कार्यविधि अत्यंत सरल है। इसको आकार डाक टिकट के बराबर होता है तथा उससे कुछ ही भारी होता है। इसमें धात्विक तंतु होता है जो दो पतले पत्रों के बीच जुड़ा रहता है। इसमें प्रयोग किए जाने वाले तार में यह गुण होता है कि इसका वैद्युत प्रतिरोध विकृति का समानुपाती होता है। जिस अवयव में विकृति ज्ञात करना हो उस पर इसको दृढ़तापूर्वक चिपका दिया जाता है इसके लिए विशेष प्रकार के आसंजक पदार्थ उपलब्ध हैं इस प्रकार जब अवयव में बाह्य भार के कारण विकृति होती है तो इसमें भी वही विकृति उत्पन्न होती है। विकृति को नापने के लिए साधारणतया विकृति में परिवर्तन को प्रतिरोध में परिवर्तन के अनुपात से व्यक्त करते हैं तथा इसको प्रमापी गुणक कहा जाता है।

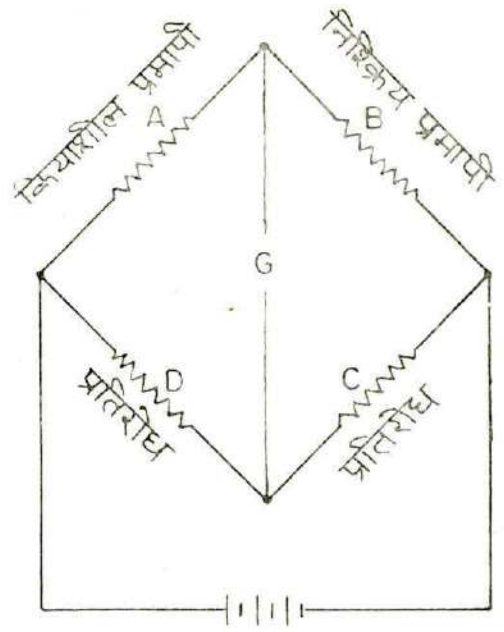
प्रमापी गुणक $= R = \dfrac{dR/R}{dl/l}$

यहाँ dR प्रतिरोधमें कुल परिवर्तन तथा dl तंतु लंबाई में परिवर्तन को व्यक्त करता है। इस प्रकार

विकृति $\dfrac{dl}{l} = \dfrac{dR}{RR}$

प्रमापी गुणक जितना ही अधिक होगा उतनी ही प्रमापी की यथार्थता अधिक होगी। प्रतिरोध में परिवर्तन को साधारण व्हीटस्टोन ब्रिज द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

तापमान तथा आर्द्रता के कारण प्रतिरोध में उत्पन्न किसी प्रकार के परिवर्तन का निराकरण एक उसी प्रकार के विकृति प्रमापी को व्हीटस्टोन ब्रिज में चित्र 1.13 में दिखाए भाँति लगा कर किया जा सकता है।



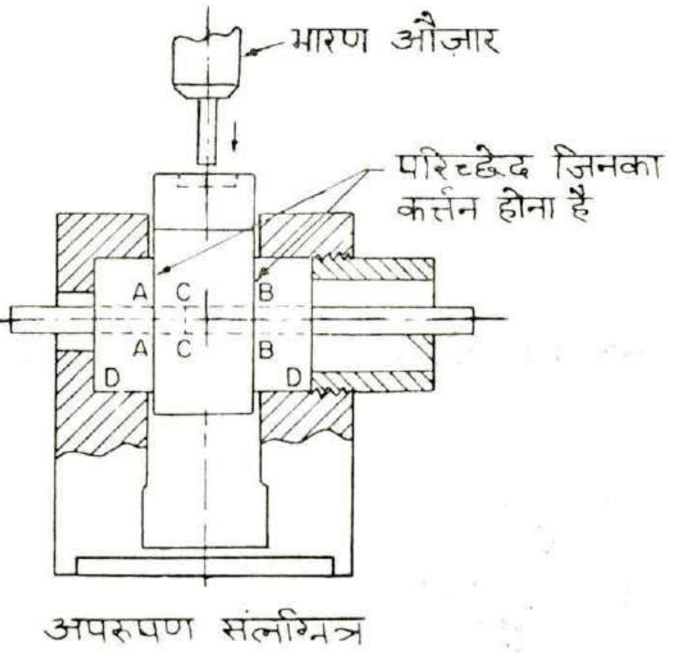
चित्र 1.13 विद्युत प्रतिरोध विकृति प्रमापी

अपरूपण परीक्षण:— यदि परिच्छेद के समान्तर बाह्य बल लगाया जाय तब अपरूपण प्रति बल उत्पन्न होता है। पदार्थ का अपरूपण दो विधियों से हो सकता है।

(अ) अभिलंब अथवा अनुप्रस्थ अपरूपण :— जब बाह्य बल अनुदैर्ध्य अक्ष के अभिलंब परिच्छेद के गुरुत्वीय केन्द्र से होकर लगे तब परिच्छेद का अपरूपण होता है। रिवेटित जोड़ पर भार लगने का कारण रिवेटों का अनुप्रस्थ अपरूपण के कारण विभंजन हो सकता है। अपरूपण केवल एक ही परिच्छेद पर अथवा दो परिच्छेदों पर हो सकता है तथा इस प्रकार इसको एकल अथवा दोहरा अपरूपण कहा जाता है।

धातुओं का अनुप्रस्थ-अपरूपण परीक्षण करने के लिए, परख-नमूने को चित्र (1.14) की भाँति पकड़ा जाता है। इसके मध्य भाग पर समुचित डाई तथा भारण युक्ति से भारण किया जाता है। भारण युक्ति को परीक्षण यंत्र के क्रॉस हेड

C में लगा दिया जाता है तथा अपरूपण समायुक्ति को सार्विक परीक्षण यंत्र के क्रॉस हेड B पर रखा जाता है। धातु का अपरूपण दो परिच्छेदों A-A तथा B-B पर होगा। परख नमूने का एकल अपरूपण में भी परीक्षण किया जा सकता है। ऐसी दशा में परख नमूने को CC तक समायोजित किया जाता है एवं भारण ठीक उसी प्रकार किया जाता है जैसाकि दोहरे अपरूपण परीक्षण विधि में किया जाता है। इस दशा में केवल परिच्छेद BB पर अपरूपण होगा। परख नमूने को पकड़ने के बाद अपरूपण वलय कसा नहीं होना चाहिए जिससे कि भारण करते समय भारण वलय एवं सिरे के व्यास्तरों के मध्य न्यूनतम घर्षण हो।



अपरूपण संलग्नित्र

चित्र 1.14 अपरूपण परीक्षण

(ब) मरोड़ अपरूपण :— यदि बाह्य बल समांतर एवं विमुख दिशा में हों तथा ये वस्तु के अनुदैर्ध्य अक्ष के समतल में न हों तब एक बलयुग्म सक्रिय होता है जिसके कारण ऐंठन तथा अपरूपण प्रतिबल उत्पन्न होगा। इसी ऐंठन उत्पन्न करने

की प्रवृत्ति को मरोड़ अपरुपण कहते हैं जिसका वर्णन अध्याय–7 में किया गया है । मरोड़ अपरुपण प्रतिबल का मान संपूर्ण परिच्छेद पर एक समान नहीं होता है परन्तु गोल परिच्छेद में इसका मान केन्द्र पर शून्य तथा बाह्य तंतुओं पर अधिकतम होता है ।

मरोड़ अपरुपण में परीक्षण करने के लिए परख नमूने को दो जबड़ों के मध्य पकड़ा जा सकता है । एक जबड़े को किसी उपयुक्त गियरों वाली चालक यंत्रावली से संयुक्त किया जाता है । चालन हाथ द्वारा अथवा शक्ति द्वारा किया जा सकता है । दूसरे जबड़े को एक अंकित दंड से, कड़ी एवं लीवर द्वारा संयुक्त कर दिया जाता है जिस पर एक भार को उसकी लंबाई की दिशा में चलाया जा सकता है । चालक सिरे से ऐंठन बल आघूर्ण परख नमूने द्वारा संचारित होता है जो अंकित दंड पर नीचे की दिशा में एक भार लगाता है । अब सर्पण भार को दंड की लंबाई की दिशा में तब तक चलाया जाता है जब तक कि दंड क्षैतिज अवस्था में न आ जाय । दंड पर ऐंठन बल आघूर्ण का मान अंकित होता है अतः भार के नीचे दंड के क्षैतिज होने पर इसको पढ़ा जा सकता है ।

कुछ मशीनों में परख-नमूने से ऐंठन बल आघूर्ण एक लोलक को संचारित किया जाता है जिससे यह अपने साम्यावस्था से विस्थापित होता है एवं डायल पर एक सूचक को चलाता है । यह सूचक डायल पर अंकित ऐंठन बल आघूर्ण को बता देता है । परख नमूने का ऐंठन कोण चालित चक्र की गति द्वारा प्राप्त किया जा सकता है ।

कठोरता परीक्षण :—किसी पदार्थ की कठोरता की परिभाषा उसके प्लैस्टिक दंतुरण अथवा खरोंच के प्रति प्रतिरोध द्वारा दी जाती है ।

खरोंच परीक्षण विधि में परीक्षण सतह पर हीरक द्वारा भार लगाया जाता है तथा फिर इसको सतह पर खींचा जाता है जिससे कि खरोंच उत्पन्न हो जाता है । इस प्रकार कठोरता को एक निश्चित चौड़ाई की खरोंच बनाने के लिए आवश्यक भार के रूप में व्यक्त किया जाता है ।

दंतुरण कठोरता परीक्षण विधि को प्रामाणिक विधि के रूप में प्रयोग किया जाता है । इस विधि में परीक्षण किये जाने वाले पृष्ठ पर एक मानक आकृति के दंतुरक द्वारा निश्चित भार लगाया जाता है जो पृष्ठ पर एक स्थायी चिह्न अंकित कर देता है । कठोरता अंक को इस स्थायी चिह्न की गहराई के आधार पर व्यक्त किया जाता

है । दंतुरण परीक्षण विधि से कठोरता ज्ञात करने के लिए परीक्षण यंत्र के मुख्य अवयव इस प्रकार होंगे :—

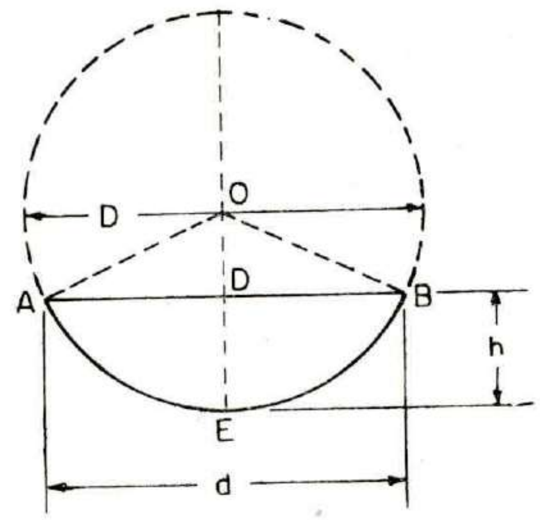
(1) एक निश्चित आकृति एवं आकार का दंतुरक
(2) एक निश्चित भार लगाने की के लिए युक्ति
(3) दंतुरक द्वारा प्राप्त चिह्न के आकार को नापने की युक्ति

यहाँ यह स्पष्ट किया जाना उचित है कि पदार्थ की कठोरता को सापेक्ष राशि के रूप में व्यक्त किया जाता है तथा इसको निरपेक्ष मानक के रूप में नहीं व्यक्त किया जा सकता है । समान प्रकार के पदार्थों का कठोरता के अनुरूप श्रेणी विभाजन किया जा सकता है तथा किसी विशेष उपयोग के लिए समुचित श्रेणी के कठोरता वाले पदार्थ का उपयोग किया जाता है । कठोरता अंक का डिजाइन में उस रूप में प्रयोग नहीं किया जा सकता है जैसे कि पदार्थ के अन्य गुण जैसे तनन, संपीडन एवं अपरुपण सामर्थ्य आदि । सामान्यतः प्रयोग किए जाने वाले दंतुरण कठोरता परीक्षण विधियाँ निम्नलिखित हैं ।

(अ) **ब्रिनेल कठोरता परीक्षण** :—इस विधि में दंतुरक गोली जिसका व्यास 1, 2, 5 अथवा 10 mm हो प्रयुक्त की जाती है । भार का मान (दंतुरक व्यास के अनुसार) 10 kg से 3,000 kg तक हो सकता है । अमेरिकी पदार्थ परीक्षण सोसाइटी (ए० एस० टी० एम०) के विनिर्देश के अनुसार सामान्य कठोर धातुओं के प्रकरण में 10 mm व्यास का दंतुरक एवं 3000 kg का भार प्रयुक्त किया जाता है । मध्यम कठोरता के पदार्थ के लिए भार का मान 1500 kg एवं नर्म धातुओं के लिए 500 kg होता है ।

परख नमूने को आधरण पर रखकर उसको ऊपर उठाया जाता है जिससे कि यह गोली दंतुरक को स्पर्श कर सके जो गोली होल्डर में आबद्ध रहता है । इसके पश्चात् द्रवीय अथवा यांत्रिक विधि से भार लगाया जाता है जो गोली को परख नमूने में दबाता है । 10 mm की गोली के व्यास में स्थायी विरुपण 0.01 mm से अधिक नहीं होना चाहिए । इसी कारण गोली को टंगस्टन कार्बाइड अथवा बहुत ही कठोर पदार्थ से बनाया जाता है ।

संपूर्ण भार को इस्पात में 15 सेकंड तथा अन्य पदार्थों में 30 सेकंड तक लगाया जाना चाहिए । दंतुरण का व्यास 'd' सूक्ष्मदर्शी यंत्र की सहायता से ज्ञात किया जाता है एवं दंतुरण की गहराई 'h' चित्र (1.15) में दिखाई गई विधि के अनुसार प्राप्त की जाती है । यहाँ 'D' गोली के व्यास को व्यक्त करता है ।



चित्र 1.15 ब्रिनेल कठोरता परीक्षण

यहाँ ज्यामिति द्वारा आसानी सें सिद्ध किया जा सकता है :

$$h = D/2 \pm \sqrt{\frac{D^2-d^2}{4}}$$

चूंकि h का मान सदैव D/2 की अपेक्षा न्यून होता है अतः धन चिह्न को छोड़ देने पर

$$h = D/_2 - \sqrt{\frac{D^2-d^2}{4}}$$

दंतुरण का पृष्ठ क्षेत्रफल $= \pi$ Dh

$$= \frac{\pi D}{2}\left\{D - \sqrt{D^2-d^2}\right\}$$

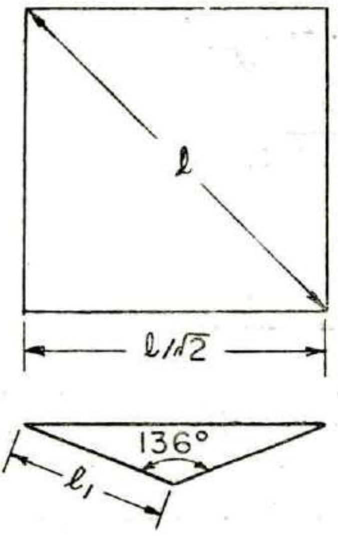
ब्रिनेल कठोरता अक लगाए गए भार P को, जो kg में व्यक्त किया गया हो उसके दंतुरण पृष्ठ क्षेत्रफल, जो mm² में व्यक्त किया गया हो, द्वारा विभाजित कर प्राप्त किया जा सकता है ।

$$\text{ब्रिनेल कठोरता अंक (B.H.N.)} = \frac{P}{\frac{\pi D}{2}\left\{D-\sqrt{D^2-d^2}\right\}}$$

परीक्षण करने के लिए परख नमूने की सतह समतल तथा अच्छी प्रकार पालिश की हुई होनी चाहिए अन्यथा दंतुरण का यथार्थ व्यास ज्ञात करने में कठिनाई हो सकती है ।

यह सुविदित प्रायोगिक तथ्य है कि लगभग सभी धातुओं का ब्रिनेल कठोरता अंक, भार के परिमाण, दंतुरक गोली के व्यास तथा दंतुरक के प्रत्यास्थता द्वारा प्रभावित होता है अतः यह आवश्यक हो जाता है कि पदार्थ के ब्रिनेल कठोरता अंक को व्यक्त करते समय प्रयुक्त भार एवं दंतुरक के व्यास का भी विवरण दिया जाय । दंतुरण पृष्ठ पूर्णतया गोलीय आकार की नहीं होती है क्योंकि भार लगने पर दंतुरक गोली में कुछ न कुछ विरूपण अवश्य हो जाता है तथा भार हटाने पर परख नमूना प्रत्यास्थता के कारण अपनी प्रारंभिक स्थिति में आने का प्रयत्न करता है तथा दंतुरण पृष्ठ का अंतिम रूप कुछ भिन्न ही होता है । अतएव विभिन्न व्यासों की गोलियों द्वारा विभिन्न भारों पर प्राप्त दंतुरण पृष्ठ ज्यामितिय रूप से समरूप नहीं होते है । इसके अतिरिक्त ऐसा विश्वास किया जाता है कि यदि दंतुरण व्यास गोली के व्यास के 0.25 से 0.5 के मध्य ही, अर्थात् औसत रूप में यदि इसका मान गोली व्यास 0.375 गुणा आदर्श रूप में हो तो विभिन्न व्यास की गोलियों एवं भारों द्वारा प्राप्त ब्रिनेल कठोरता अंक के मान में विचरण को न्यूनतम किया जा सकता है ।

(ब) विकर कठोरता परीक्षण :—इस यंत्र द्वारा भी दंतुरण प्राप्त किया जाता है तथा कठोरता अंक kg में भार को दंतुरण पृष्ठ के mm² में क्षेत्रफल द्वारा विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है । इस विधि में दंतुरक वर्गाकार आधार का हीरक पिरामिड के रूप में होता है जिसके सम्मुखी फलकों के मध्य का कोण 136° का होता है जैसा कि चित्र (1.16) में दिखाया गया है । भार को 5 kg से 120 kg के मध्य 5 kg के अंतराल पर रखा जा सकता है ।



चित्र 1.16 विकर कठोरता परीक्षण

परीक्षण करते समय परख नमूने को आधरण पर रखकर इसको एक पेंच की सहायता से ऊपर उठाया जाता है जब तक कि यह दंतुरक को स्पर्श न करे। इसके पश्चात प्रवर्तन लीवर के द्वारा भार लगाया जाता है तो स्वचालित रूप से निश्चित समय के बाद भार हट जाता है। इस समय को आरंभ में ही निश्चित कर लिया जाता है। इसके पश्चात् आधरण को नीचे कर दिया जाता हैं तथा परख नमूने के ऊपर सूक्ष्मदर्शी को घुमाकर लगा दिया जाता है तथा दंतुरण के विकर्ण को 0.001 mm की यथार्थता तक नापा जाता है। विकर यंत्र का मुख्य गुण यह है कि इसके द्वारा दंतुरण का विकर्ण यथार्थता पूर्वक नापा जा सकता है। एक वर्ग के विकर्ण को ब्रिनेल विधि के व्यास की अपेक्षा अधिक यथार्थता से नापा जा सकता है।

विकर का पिरामिड अंक (V.P.N.) चित्र (1.16) में दिखाई गई विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। यदि कर्ण की औसत लंबाई l mm हो तो कुल क्षेत्रफल A=4× एक शंकु पृष्ठ का क्षेत्रफल।

अथवा

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot l_1 \ \text{mm}^2$$

$$= \frac{l^2}{2 \sin (136/2)}$$

$$= \frac{l^2}{1.854}$$

$$\text{V.P.N.} = \frac{P}{A} = \frac{1.854P}{l^2}$$

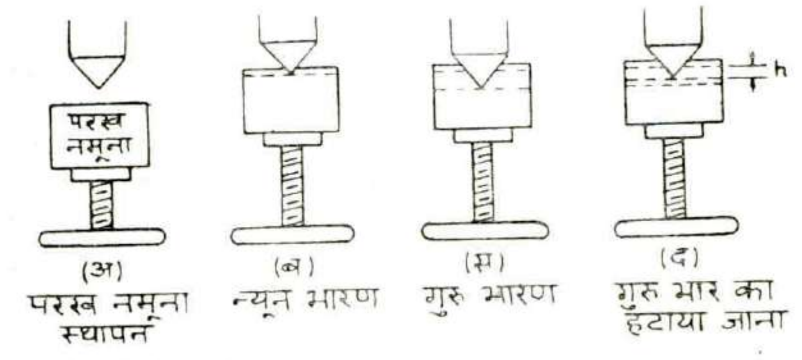
साधारणतया दंतुरण कर्ण को 'ऑकुलर मात्रक' में नापा जाता है तथा इस प्रकार के चार्ट प्राप्य होते हैं जिनमें विभिन्न भार पर 'ऑकुलर मात्रक' के अनुरूप V.P.N. ज्ञात किया जा सकता है। यद्यपि ये चार्ट उपर्युक्त समीकरण द्वारा ही प्राप्त किए जाते हैं। प्रत्येक 'ऑकुलर मात्रक' 0.001mm के तुल्य होता है।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि किसी पदार्थ का विकर पिरामिड अंक परीक्षण में प्रयुक्त भार की मात्रा पर ही निर्भर नहीं करता है अपितु यह पिरामिड के शीर्ष कोण पर निर्भर होता है। अतः यह कहा जा सकता है कि कठोरता अंक दंतुरण के कोणीयता पर निर्भर करता है जो कि ब्रिनेल परीक्षण में प्रयुक्त होने वाली गोली के व्यास के अनुसार बदलता रहता है। ब्रिनेल परीक्षण में यदि दंतुरण का व्यास गोली व्यास का 0.375 हो तो दंतुरण की कोणीयता 136° होती है इसी कारण विकर परीक्षण में मानक कोणीयता का मान 136° लिया गया है। ऐसा विश्वास किया जाता है तथा वास्तविक रूप में पाया गया है कि समान कोणीयता की दशाओं में दोनो परीक्षणों द्वारा एक ही पदार्थ का प्राप्त किया गया कठोरता अंक एकसमान ही होता है।

(स) **रॉकवैल कठोरता परीक्षण** :—रॉकवैल कठोरता अंक एक अल्प भार से गुरु भार दंतुरक पर लगाने के पश्चात, गुरु भार को हटा लेने पर दंतुरण की गहराई में उत्पन्न नेट वृद्धि द्वारा प्राप्त किया जाता है। अल्प भार का मान 10 kg होता है। गुरु भार दंतुरक की आकृति एवं परीक्षण किए जाने वाले पदार्थ पर निर्भर करते हैं। औसत कठोरता वाले पदार्थों, जैसे निम्न एवं मध्यम कार्बन इस्पात के परीक्षण के लिए $\frac{1}{16}$ इंच व्यास का गोली दंतुरक तथा 90 kg का अल्प भार प्रयुक्त किया जाता है। कठोरता अंक का मान डायल सूचक के **B**-स्केल पर पढ़ा

जाता है । अधिक कठोरता वाले पदार्थ के परीक्षण के लिए, एक हीरक शंकु का, जिसका शीर्ष कोण $120°$ का हो तथा शंकु अग्रगोल किया हो (0.2 mm त्रिज्या), प्रयोग किया जाता है, तथा इस स्थिति में गुरु भार का मान 140 kg होता है । कठोरता अंक का मान डायल सूचक के C स्केल पर पढ़ा जाता है रॉकवैल कठोरता अंक व्यक्त करते समय यह बताना आवश्यक होता है कि कौनसा दंतुरक तथा कितना गुरु भार परीक्षण में प्रयुक्त किया गया है । अतः उपर्युक्त अक्षरों B अथवा C का प्रयोग कठोरता अंक व्यक्त करते समय किया जाता है ।

रॉकवैल परीक्षण यंत्र की क्रिया विधि का विवरण चित्र (1.17) में दिया गया है । इसमें पहिले परीक्षण परख नमूने को यंत्र के आधरण पर रखा जाता है इसके पश्चात आधरण को ऊपर उठाया जाता है जिससे कि परख नमूना दंतुरक को स्पर्श कर सके । फिर 10 kg का अल्प भार लगाया जाता है । इसके लिए आधरण को तब तक ऊपर की ओर उठाना चाहिए, जब तक की छोटे सूचक का डायल शून्य (सैट) न बतलाये तथा मुख्य सूचक लगभग ऊर्ध्वाधर न हो जाय । यह अल्प भार दंतुरक को परख नमूने पर परीक्षण के लिए सही स्थिति पर टिका देता है । इसके पश्चात् यदि आवश्यक हो बड़े डायल को इस प्रकार घुमाना चाहिए जिससे कि बडी सुई सैट (C–O अथवा B—30) चिह्नित स्थान पर न आ जाय । अब हस्त लीवर को प्रचालक के विपरीत दिशा में घुमाकर गुरु भार लगाइये । जब बड़ी सुई स्थिर हो जाय तो तो हस्त लिवर को प्रचालक की ओर घुमाकर गुरु भार हटा दीजिए । अब स्केल B अथवा C पर जैसी परिस्थिति हो कठोरता अंक पढ़ लीजिए परन्तु ऐसा गुरु भार हटाने के पूर्व नहीं करना चाहिए ।



चित्र 1.17 रॉकवेल-कठोरता परीक्षण के विभिन्न चरण

रॉकवैल परीक्षण ब्रिनेल अथवा विकर परीक्षणों की अपेक्षा कुछ अधिक सुविधाजनक होता है । आरंभ में एक अल्प भार लगाने के कारण रॉकवैल परीक्षण के परख नमूने में यदि पृष्ठ विषम हो तो उसका कोई प्रभाव नहीं होता । डायल सूचक के कारण, कठोरता अंक सीधा पढ़ा जा सकता है तथा इसमें दंतुरण के आकार को नापने की आवश्यकता नहीं पड़ती । अतः यह परीक्षण शीघ्रता एवं यथार्थता से संपन्न किया जा सकता है । चूंकि दंतुरण का आकार बहुत ही छोटा होता है । अतः यह परीक्षण परिष्कृत अवयवों पर किया जा सकता है ।

कठोरता परीक्षण के लिए सामान्य सावधानियाँ :—परीक्षण पृष्ठ समतल, साफ, सूखा एवं शल्क रहित होना चाहिए । इसके अतिरिक्त पृष्ठ पर गर्त एवं अवांछनीय पदार्थ नहीं होने चाहिए । ब्रिनेल एवं विकर परीक्षण के लिए परख नमूने को अच्छी प्रकार से परीक्षण पृष्ठ पर पालिश करना चाहिए जिनसे कि दंतुरण को नापते समय कोई कठिनाई न अनुभव हो । यदि परख नमूने की मोटाई कम होती है तो स्थायी विरूपण के कारण परख नमूने के निचले पृष्ठ में उभार स्पष्ट दिखाई देने लगता है । अतः ऐसी स्थिति में दंतुरण की गहराई पर नीचे वाले आधरण की कठोरता प्रभाव डालती है । यदि आधरण, परीक्षण-पदार्थ से अधिक कठोर हो तो यह परख नमूने के विरूपण में बाधा उत्पन्न करेगा तथा इस प्रकार प्राप्त दंतुरण गहराई वास्तविक गहराई से कम होगी । यदि आधरण परीक्षण पदार्थ की अपेक्षा कम कठोर हो तब इसका विपरीत प्रभाव होगा । अतः यह सावधानी बरती जाती है कि परीक्षण पदार्थ की मोटाई कम से कम दंतुरण गहराई की दस गुनी होनी चाहिए जिससे कि परीक्षण पदार्थ के नीचे के पृष्ठ पर कोई प्रभाव न पड़े ।

यदि परीक्षण परख नमूने के कोर के बहुत निकट दंतुरण किया जाय तब यह संभव हो सकता है कि यह विषम एवं आवश्यकता से अधिक बड़ा हो जाय, क्योंकि एक कोर पर होने के कारण उस पर आधार पदार्थ कम रहता है । यदि पहले दंतुरण के बहुत समीप ही दुबारा फिर दंतुरण किया जाय तब यह संभव होता है कि पहले दंतुरण कोर के समीप होने के कारण दूसरे दंतुरण का आकार बड़ा हो परन्तु इसके साथ ही साथ यह भी संभव हो सकता है कि पहले दंतुरण के कारण पदार्थ विकृति कठोर हो गया हो तथा इस प्रकार प्राप्त द्वितीय दंतुरण का आकार वास्तविक से कम हो ।

अतः दंतुरण केंद्र की किसी कोर अथवा पहिले किसी अन्य दंतुरण केंद्र से दूरी व्यास अथवा विकर्ण से तीन गुने से कम नहीं होनी चाहिए ।

संघट्ट परीक्षण :—बहुत से यंत्रों अथवा उनके अवयवों पर आकस्मिक भार लगते है जिनको संघट्ट आघात कहा जाता है । यह भार बंकन, तनन, संपीडन अथवा मरोड़ में हो सकता है । संघट्ट परीक्षण में सामान्यतः बंकन भार प्रयुक्त होता है, अन्य प्रकार के भार विशेष परिस्थितियों में ही प्रयोग होते हैं ।

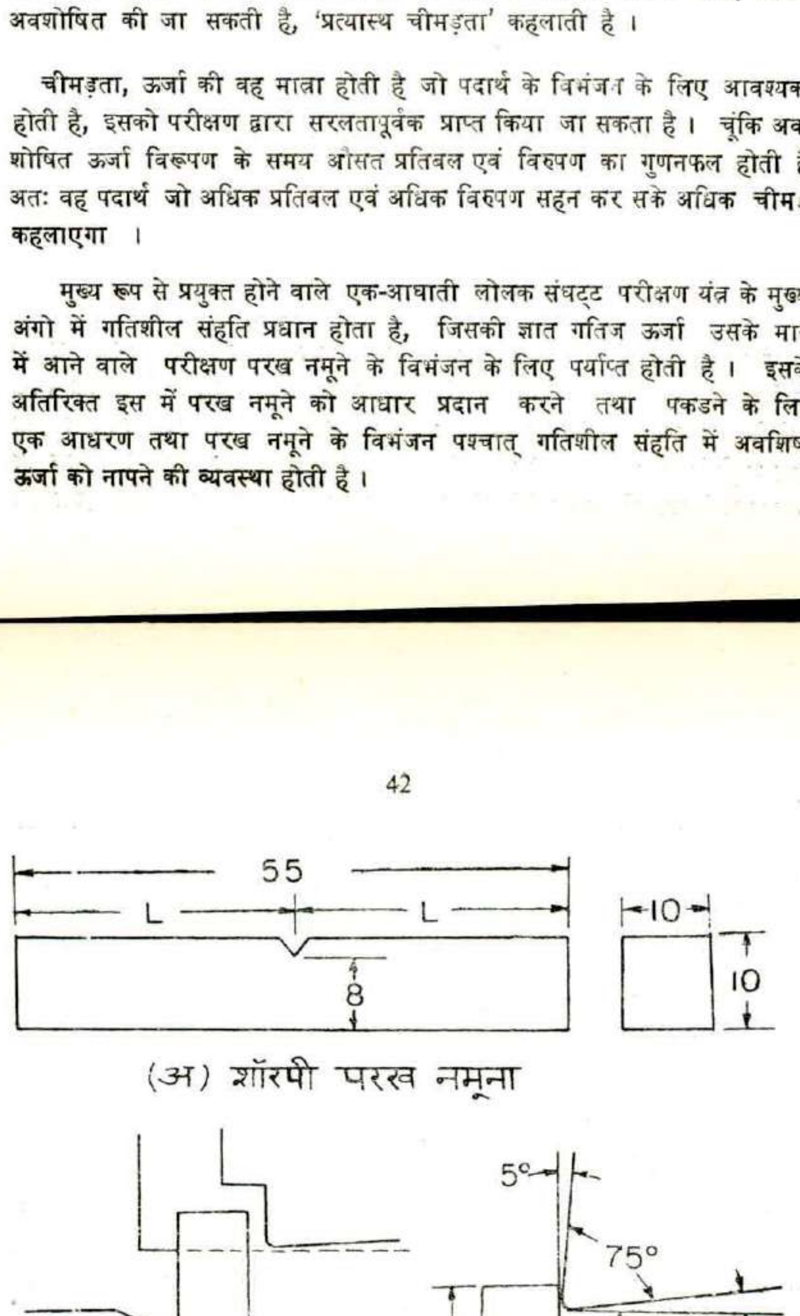
संघट्ट आघात, गिर रहे भार, दोलनी लोलक अथवा घूम रहे गति पाल चक्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है । कुछ परीक्षण इस प्रकार के होते हैं जिनमें परख नमूने का विभंजन एक ही आघात में किया जाता है जब कि कुछ अन्य में बारंबार आघात द्वारा विभंजन होता है ।

सामान्य रूप से प्रयुक्त होने वाले परीक्षण विधियों में शॉरपी तथा आइजॉड मुख्य हैं । दोनों में ही बंकन भार लगता है तथा इसके लिए दोलनी लोलक का प्रयोग किया जाता है । परीक्षण खाँच बने परख नमूनों पर किया जाता है । शॉरपी परीक्षण विधि में परख नमूने का सरल आधारित दंड के रूप में प्रयोग करते हैं जब कि आइजॉड में इसका प्रयोग प्रास दंड के रूप में होता है ।

संघट्ट से केवल प्रतिबल की ही उत्पत्ति नहीं होती अपितु ऊर्जा स्थानांतरण, अवशोषण तथा विसरण पर भी ध्यान दिया जाना चाहिए । संघट्ट भार के द्वारा उत्पन्न प्रतिबल इस पर निर्भर करता है कि विरूपण में ऊर्जा का कितना अंश व्यय होता है । संघट्ट परीक्षण के द्वारा पदार्थ की चीमड़ता प्राप्त होती है । ऊर्जा की वह मात्रा जो पदार्थ में प्रत्यास्थता सीमा के बराबर प्रतिबल उत्पन्न किए बिना, अवशोषित की जा सकती है, 'प्रत्यास्थ चीमड़ता' कहलाती है ।

चीमड़ता, ऊर्जा की वह मात्रा होती है जो पदार्थ के विभंजन के लिए आवश्यक होती है, इसको परीक्षण द्वारा सरलतापूर्वक प्राप्त किया जा सकता है । चूंकि अवशोषित ऊर्जा विरूपण के समय औसत प्रतिबल एवं विरूपण का गुणनफल होती है अतः वह पदार्थ जो अधिक प्रतिबल एवं अधिक विरूपण सहन कर सके अधिक चीमड़ कहलाएगा ।

मुख्य रूप से प्रयुक्त होने वाले एक-आघाती लोलक संघट्ट परीक्षण यंत्र के मुख्य अंगो में गतिशील संहति प्रधान होता है, जिसकी ज्ञात गतिज ऊर्जा उसके मार्ग में आने वाले परीक्षण परख नमूने के विभंजन के लिए पर्याप्त होती है । इसके अतिरिक्त इस में परख नमूने को आधार प्रदान करने तथा पकड़ने के लिए एक आधरण तथा परख नमूने के विभंजन पश्चात् गतिशील संहति में अवशिष्ट ऊर्जा को नापने की व्यवस्था होती है ।



चित्र 1.18 संघट्ट परीक्षण

चित्र (1.18) में आइजॉड तथा शारपी परीक्षण के मानक परख नमूनों को दिखाया गया है । वह ध्यान देने योग्य है कि आइजॉड परीक्षण में लोलक परख नमूने के सिरे पर तथा खांच की ओर टकराता है परन्तु शारपी परख नमूने में यह परख नमूने के मध्य में एवं खांच के ठीक विपरीत दिशा में टकराता है । लोलक की परख नमूने से टकराने वाली कोरें भी दोनों परीक्षणों के लिए भिन्न भिन्न होती हैं ।

परीक्षण करते समय लोलक को पहले एक निश्चित ऊँचाई (स्थितिज ऊर्जा) तक उठाकर एक टेक पर रोक दिया जाता है । इसके पश्चात इसको इस स्थिति से मुक्त गिरने दिया जाता है जिससे परख नमूने का विभंजन हो सके । लोलक की स्थितिज ऊर्जा सर्व प्रथम गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होती है उसके पश्चात् यह परख नमूने को स्थानांतरित कर दी जाती हैं जहाँ परख नमूने द्वारा अवशोषित की जाती है एवं अंत में अवशिष्ट ऊर्जा फिर स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है । परख नमूने के विभंजन के पश्चात् लोलक के साथ दूसरी ओर एक सूचक भी चलता है ।

डायल पर पाठ्यांक इस प्रकार अंशांकित होते है कि अवशोषित ऊर्जा को सीधा पढ़ा जा सकता है । इस ऊर्जा में बेयरिंग में तथा सूचक में घर्षण के कारण व्यय होने वाली ऊर्जा भी निहित होती है अतः इसका विशेष ध्यान रखना चाहिए । लोलक को मुक्त करने वाली यंत्रावली परिष्कृत होनी चाहिए तथा आधरन पर्याप्त दृढ़ होना चाहिए जिससे कि इसके स्वयं के विरूपण के कारण ऊर्जा का व्यय न हो ।

श्रांति परीक्षण :—स्वचालित वाहन, इंजन, पंप तथा आधुनिक इंजीनियरी यंत्रों के कई अवयवों में उत्पन्न प्रतिबल इस प्रकार के होते हैं जिनकी मात्रा अथवा दिशा समय के अनुसार परिवर्तित होती रहती है । ऐसा देखा गया है कि इन अवयवों का, परिवर्तनशील प्रतिबलों के कारण, स्थैतिक परीक्षण द्वारा प्राप्त चरम सामर्थ्य से बहुत कम मान पर विभंजन हो जाता है । पदार्थ के इस विशिष्ट व्यवहार को 'श्रांति' कहा जाता है ।

श्रांति परीक्षण में अवयव पर प्रतिबल चाहे किसी भी प्रकार का (तनन, संपीडन, मरोड़ अथवा संयुक्त प्रतिबल) लग रहा हो, इसका विचरण तीन प्रकार का हो सकता है (i) प्रतिबल दो सीमाओं के मध्य विचरण करता हो, जिनका मान समान हो परन्तु चिह्न विलोम हो, ऐसी दशा में माध्य प्रतिबल शून्य होता है (ii) प्रतिबल, शून्य एवं निश्चित मान के मध्य विचरण करता हो परन्तु उसका चिह्न एक ही रहता हो (iii) प्रतिबल दो सीमा में विचरण करता हो तथा सीमान्त प्रतिबलों का समान अथवा विलोम चिह्न हो सकते हैं ।

पदार्थ के श्रांति-परीक्षण में बहुत से समरूप परख नमूनों का विभिन्न प्रतिबलों के परिसर में परीक्षण किया जाता है जब तक की उनका विभंजन नहीं हो जाता । इसके पश्चात प्रतिबल परिसर एवं विभंजन के लिए आवश्यक चक्रों की संख्या के मध्य ग्राफ खींचा जाता है । जैसे-जैसे चक्रों की संख्या बढ़ती जाती है वक्र एक निश्चित प्रतिबल परिसर पर लगभग समांतर हो जाता है । यदि परी-

क्षण की अवधि में प्रतिबल परिसर का मान इस मान से तनिक कम हो तो पदार्थ असंख्य प्रतिबल चक्रों को सहन कर सकता है तथा इस प्रतिबल के मान को 'श्रांति-सीमा' कहा जाता है । चूंकि सभी यंत्रों की एक निश्चित आयु होती है अतः व्यावहारिक श्रांति-सीमा वह अधिकतम प्रतिबल होता है जब अवयव का 10 लाख प्रतिबल चक्रों के पश्चात् भी विभंजन न हो ।

धातुओं की 'श्रांति-सामर्थ्य' पर प्रभाव डालने वाले अनेक कारक हैं जैसे, अवयव की आकृति, आकार, पृष्ठ परिष्कृति, कण संरचना, ऊष्मा संस्करण आदि; अतः श्रांति-परीक्षण के लिए समरूप परख नमूनों को तैयार करते समय इन बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए ।

मंद-विरुपण-परीक्षण :—उच्च ताप पर ऐसा पाया गया है कि धातुओं का प्रत्यास्थ विरुपण, विस्कासी प्रवाह के रूप में बदल जाता है तथा न्यून दर से यह विरुपण बराबर होता रहता है इसको मंद विरुपण कहा जाता है ।

मंद-विरुपण परीक्षण यंत्र के मुख्य भाग ये हैं :—

(1) एक वैद्युत भट्टी जिसमें परख नमूने को उच्च ताप पर रखने के लिए विशेष नियंत्रण व्यवस्था होती है, (2) एक दैर्ध्यवृद्धि मापी, (3) भारण करने की उपयुक्त व्यवस्था, तथा (4) ताप ज्ञात करने के लिए ताप-वैद्युत-युग्म ।

अभ्यास प्रश्न-माला

1. आपको एक मृदु इस्पात की 40 mm व्यास एवं 500 mm लम्बी छड़ दी गई है । इसके तनन परीक्षण में यंग मापांक तथा चरम सामर्थ्य ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त किए जाने वाले परख नमूने का विमांकित चित्र बनाइये ।

2. तनन परख नमूने का यदि ठीक प्रकार से संरेखण न किया जाय तो इस पर लगने वाले संपूर्ण भार पर क्या प्रभाव पड़ेगा ।

3. यदि एक ही पदार्थ को विभिन्न प्रमाप-लंबाई से परीक्षण किया जाय तो प्रतिशत दैर्ध्यवृद्धि का मान भी विभिन्न क्यों प्राप्त होता है । यदि प्रमाप-लंबाई कम होती जाय तब इसका मान कैसे बढ़ता अथवा घटता है ?

4. तनन परीक्षण से पदार्थ के गुणधर्म के विषय में क्या व्यापक जानकारी प्राप्त होती है ?

5. अंतर बताइये—

(अ) प्रत्यास्थता सीमा एवं समानुपाती सीमा में

(ब) दृढ़ता एवं प्रत्यास्थता में

6. मृदु इस्पात के मरोड़-परीक्षण में, चरम ऐंठन बल-आघूर्ण पर विभंजन होता है, परन्तु तनन परीक्षण में चरम भार से बहुत कम पर विभंजन होता है, कारण स्पष्ट कीजिए।

7. अभिलंब अपरुपण एवं मरोड़ अपरुपण में क्या भेद है ? किस प्रकार का अपरुपण बंकन से अधिक मुक्त होगा ?

8. कठोरता परीक्षण में, भार लगे रहने की अवधि सामान्यतः क्यों निश्चित की जाती है ?

9. परख नमूने की न्यूनतम मोटाई दंतुरण गहराई के 10 गुने के बराबर क्यों रखी जानी चाहिए ?

10. आईजॉड तथा शॉरपी परीक्षण विधियों के अन्तर को स्पष्ट कीजिए।

11. मृदु इस्पात के तनन परीक्षण में प्राप्त होने वाले प्रतिबल-विकृति वक्र को बनाइये। इस वक्र पर पराभव बिंदु तथा समानुपाती सीमा बिन्दु को दिखाइये।

12 यदि किसी पदार्थ के प्रतिबल-विकृति वक्र में पराभव बिन्दु स्पष्ट न हो तब पराभव प्रतिबल आप किस प्रकार ज्ञात करेंगे ?

13. एक तनन परख नमूने का पराभव बिन्दु से आगे तक भारण करने के पश्चात् उसपर से भार को हटा लिया गया है तथा फिर इसको भारित किया गया है जिससे कि इसका विभंजन हो जाय। इस प्रक्रिया को प्रतिबल-विकृति वक्र पर दर्शाइये।

14. एक मृदु इस्पात की छड़ का, जो आरंभ में 20 mm व्यास की थी, तनन परीक्षण किया गया तथा इसके 100 mm प्रमाप लंबाई में 30 mm की दैर्घ्यवृद्धि प्राप्त हुई, जब कि 60 mm प्रमाप लंबाई में यह दैर्घ्यवृद्धि 22 mm प्राप्त होती है। तब उसी पदार्थ की 25 mm व्यास की 150 mm प्रमाप लंबाई की प्रतिशत दैर्घ्यवृद्धि कितनी होगी ?

तालिका 1.1

सामान्यतः प्रयुक्त पदार्थों के कुछ आधारभूत गुणधर्म

पदार्थ	घनत्व kg/m^3	यंग-मापांक GPa	दृढ़ता मापांक GPa	पराभवन प्रतिबल MPa	चरम सामर्थ्य MPa	
					तनन	अपरूपण
मृदु इस्पात	7820	202	78.5	200	480	241
ढलवाँ लोहा (धूसर)	7200	100	41.4	—	124	—
तांबा	8960	120.6	38.3	—	285	—
पीतल	8450	95.1	34.3	103–413	300	—
कांस्य	8730	109	38	69–375	275	—
एलुमीनियम	2730	71	26.2	138	205	—
फॉस्फर कांस्य	8160	111	41.4	—	210	—
जंगरोधी इस्पात	7750	190.3	73.1	241	624	414

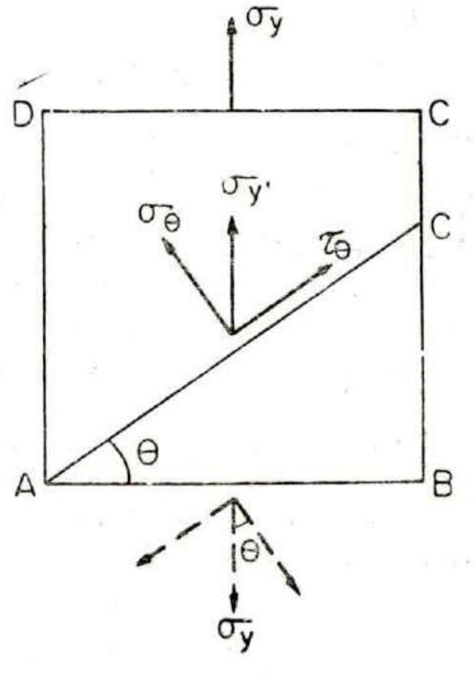
अध्याय 2

प्रतिबल एवं विकृति-विश्लेषण

2.1 अभिलंब भारण द्वारा उत्पन्न प्रतिबल

पिछले अध्यायों में किसी परिच्छेद के अभिलंबवत लग रहे भार के कारण उस पर उत्पन्न प्रतिबल की व्याख्या की जा चुकी है । इस प्रकार लग रहा तनन अथवा संपीडन भार उसकी दिशा के अभिलंब परिच्छेद पर तनन अथवा संपीडन प्रतिबल उत्पन्न करेगा । परन्तु यदि किसी तिर्यक परिच्छेद पर प्रतिबल का परिकलन किया जाय तब ज्ञात होगा की केवल अक्षीय भार भी पदार्थ में अपरुपण प्रतिबल उत्पन्न करता है ।

चित्र (2.1) के अनुसार पदार्थ के एकांक मोटाई वाले अवयव ABCD की कल्पना कीजिए । चित्र में मोटाई कागज के समतल के अभिलंब मानी गई है ।



चित्र 2.1 नत-तल पर प्रतिबल

प्रतिबल AB तथा CD फलकों पर लग रहा है । एक समतल AC' मान लीजिए जो AB से θ° कोण बनाता है । AB फलक पर लग रहे प्रतिबल σ_y के कारण फलक AC पर उत्पन्न प्रतिबल को दो प्रतिबल घटकों में वियोजित किया जा सकता है । एक प्रतिबल $\sigma\theta$ जो फलक AC के अभिलंब है तथा दूसरा अपरुपण प्रतिबल $\tau\theta$ जो AC के स्पर्श रेखीय है ।

पदार्थ का खंड ABC प्रतिबलों σ_y, $\sigma\theta$ तथा $\tau\theta$ के कारण लग रहे बलों द्वारा साम्यावस्था में है ।

AC' के अभिलम्बवत ऊपर की दिशा में लग रहा परिणामी बल

$$= \sigma\theta \times AC - \sigma_y \times AB \times \cos\theta = 0$$

$$\sigma\theta = \delta_y \cos\theta, \frac{AB}{AC'} = \sigma_y \cos^2\theta \text{ --------} \qquad (2.1)$$

AC' के स्पर्श रेखीय ऊपर की दिशा में लग रहा परिणामी बल

$$= \tau\delta AC' - \theta y \; AB \times \sin\theta = 0$$

$$\therefore \tau\theta = \sigma_y . \sin\theta . \frac{AB}{AC} = \sigma y . \sin\theta . \cos\theta .$$

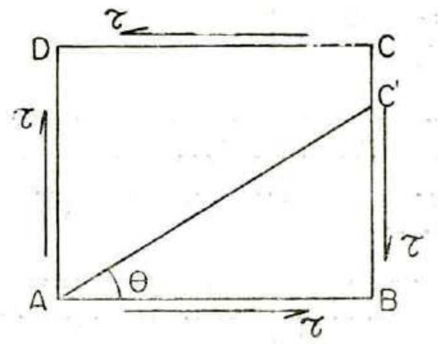
$$\therefore \tau\theta = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta \text{ ----------} \qquad (2.2)$$

समीकरण (2.1) द्वारा $\sigma\theta$ के अधिकतम मान के लिए $\theta = 0$ तथा तब $\sigma\theta$ फलक AB पर लग रहे प्रतिबल σ_y के बराबर होगा ।

समीकरण (2.2) से $\tau\theta$ के अधिकतम मान के लिए $2\theta = 90°$ अथवा $\theta = 45°$ $\tau\theta$ का अधिकतम मान $\sigma \frac{y}{2}$ होगा । इससे यह सिद्ध होता है एक अभिलंब प्रतिबल σy अपने समतल से 45° के कोण पर स्थित समतल पर अधिकतम अपरुपण प्रतिबल उत्पन्न करता है जो कि उसके स्वंय के मान का आधा होता है । अतएवं पदार्थ की अपरुपण सामर्थ्य उसके तनन सामर्थ्य की आधी से अधिक होनी चाहिए अन्यथा पदार्थ का, तनन भार लगने पर उससे 45° के कोण वाले समतल पर अपरुपण के कारण विभंजन हो जायेगा ।

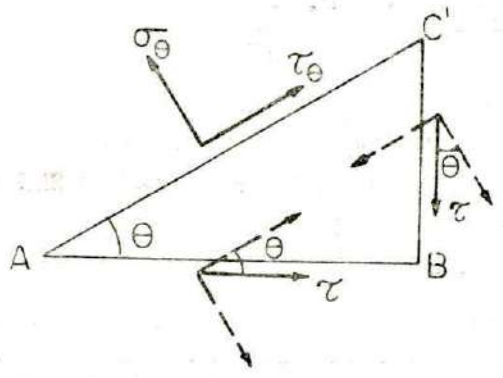
2.2 अपरुपण प्रतिबल

चित्र (2.2) (अ) में दिखाये गये अवयव ABCD के फलकों AB तथा CD तर अपरुपण प्रतिबलτ लग रहा है । इन प्रतिबलों से उत्पन्न बल के कारण एक वामावर्त बल आघूर्ण जिसका परिमाण $\tau \times AB \times CB$ है सक्रिय होगा अतः अवयव को साम्यावस्था में बनाये रखने के लिए यह समान परिमाण के दक्षिणावर्त बल आघूर्ण द्वारा संतुलित होना चाहिए ।



(अ)

चित्र 2.2 अभिलंब समतलों पर लगने वाले अपरूपण प्रतिबल के कारण नत तल पर उत्पन्न प्रतिबल



(ब)

चित्र 2.2

यदि फलकों BC तथा DA में प्रेरित प्रतिबल तीव्रता τ' है तो इससे एक दक्षिणावर्त बल आघूर्ण जिसका परिमाण $\tau' \times BC \times AB$ है प्राप्त होगा तथा अवयव के साम्यावस्था के लिए ये दोनों बल आघर्ण परस्पर संतुलन में होने चाहिए ।

$$\tau' \times AB \times CB = \tau' \times BC \times AB$$

$$\tau = \tau'$$

इससे यह ज्ञात होता है की एक अपरुपण प्रतिबल दूसरे समान परिमाण परन्तु विपरीत दिशा वाले अपरुपण प्रतिबल को उत्पन्न करता है तथा यह मूल प्रतिबल के अभिलंब की दिशा में लगता है । इस प्रकार उत्पन्न अपरुपण प्रतिबल को "पूरक अपरुपण प्रतिबल" कहा जाता है ।

चित्र (2.2 अ) में दिखाया गया खंड ABC फलक AB पर लग रहे अपरुपण प्रतिबल τ फलक BC पर लग रहे पूरक अपरुपण प्रतिबल τ, तथा फलक AC' पर लग रहे अभिलंब प्रतिबल $\sigma\theta$ तथा स्पर्शरेखीय प्रतिबल $\tau\theta$ के कारण उत्पन्न बलों के अंतर्गत साम्यावस्था में है ।

फलक AC' पर ऊपर की दिशा में परिणामी बल

$$= \tau\theta \times AC' - (\tau \times AB) \, Sin\theta - (\tau \times BC'). \, Cos\theta = 0.$$

$$\sigma_\theta = \tau \, Sin\,\theta \, \frac{AB}{AC'} + \tau \, Cos\theta. \, \frac{BC'}{AC'}$$

$$\sigma_\theta = \tau. \;\; Sin2\theta \quad \text{— — — — — — — — —} \quad (2.3)$$

फलक AC' के स्पर्श रेखीय ऊपर की दिशा में लग रहा परिणामी बल :

$$= \tau\theta \times AC' + (\tau \times AB) \, Cos\theta - (\tau \times BC') \, Sin\theta = 0.$$

$$\tau\theta = \tau \, Sin\theta \, \frac{BC'}{AC'} - \tau Cos\theta. \, \frac{AB}{AC'}$$

$$\tau\theta = /\tau \;\; Cos2\theta \quad \text{— — — — — — — — —} \quad (2.4)$$

समीकरण (2.3) से यह ज्ञात होता है कि अभिलंब प्रतिबल का अधिकतम मान अपरुपण प्रतिबल τ के बराबर होगा तथा यह AB से 45° के कोण पर स्थित समतल पर लगेगा ।

2.3 दो अभिलंब प्रतिबलों के कारण अभिलंब तथा अपरुपण प्रतिबल

चित्र (2.3) (अ) में दिखाये गये अवयव के समकोणिक फलकों BC तथा AB पर कल्पना कीजिए कि σn तथा σ_y क्रमशः X तथा Y अक्ष के समान्तर लग रहे प्रतिबल तीव्रता का मान व्यक्त करते है । AB तथा BC के समकोणिक समतलपर Z— अक्ष की दिशा में कोई प्रतिबल क्रियाशील नहीं है । अतः यह एक द्विविनीय निर्मेय है । हमको σ

के अभिलंब से θ के कोण पर स्थित समतल AC′ पर अभिलंब तथा अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात करना है। खंड ABCD की, कागज के अभिलंब की दिशा में विमा को एकांक मान लिया गया है।

खंड ABC′, चित्र (2.3) ब में दिखाये गये बलों के अंतर्गत साम्यवस्था में है :

AC′ के अभिलंब ऊपर की दिशा में लग रहा परिणामी बल

$$= \sigma_\theta . AC' - (\sigma_y \times AB) \cos\theta - (\sigma_x \times BC')\sin\theta = 0.$$

$$\sigma\theta = \sigma_y . \cos\theta . \frac{AB}{AC'} + \sigma_x \sin\theta . \frac{BC'}{AC'}$$

अथवा $\sigma\theta = \sigma_y \cos^2\theta + \sigma_x \sin^2\theta$ — — — — — — (2.5)

समतल AC′ के स्पर्श रेखीय ऊपर की में परिणामी बल

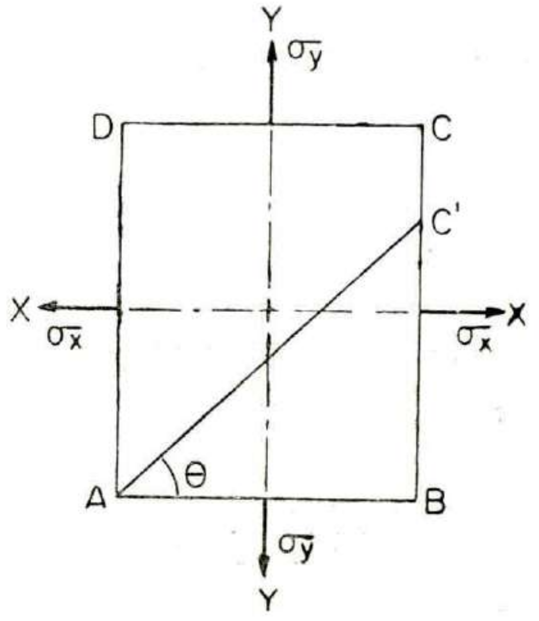
$$= \tau\theta \times AC' - (\sigma y \times AB) \sin\theta + (\sigma x \times BC') \cos\theta = 0.$$

$$\tau\theta = \sigma_y . \sin\theta \frac{AB}{AC'} + \cos\theta . \frac{BC'}{AC'}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sigma_y \sin 2\theta - \tfrac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta$$

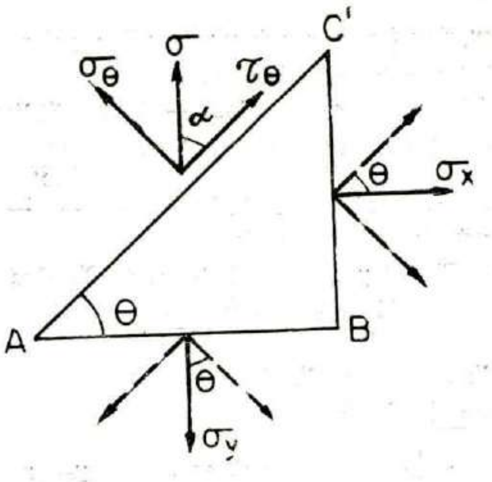
$$\tau\theta = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2} \sin 2\theta \qquad (2.6)$$

समीकरण (2.6) से $\tau\theta$ (अधिकतम) $= \frac{\sigma y - \sigma x}{2}$
जब कि $2\theta = 90°$ अथवा $\theta = 45°$



(अ)

चित्र 2.3



(ब)

चित्र 2.3 अभिलंब समतलों पर क्रियाशील अभिलंब प्रतिबल के कारण नत तल पर उत्पन्न प्रतिबल

समीकरण (2.5) से $\theta = 45°$ के समतल पर अभिलंब प्रतिबल का मान $\frac{\sigma y + \sigma x}{2}$ होगा।

समतल AC′ पर परिणामी प्रतिबल σ

$$= \sqrt{\sigma\theta^2 + \tau\theta^2}$$

$$= \sqrt{(\sigma_y \cos^2\theta + \sigma_x \sin^2\theta)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 \sin^2\theta . \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{\sigma_y^2 \cos^2\theta + \sigma_x^2 \sin^2\theta} \qquad (2.7)$$

यदि σ समतल AC′ से कोण α बनाता है, तब

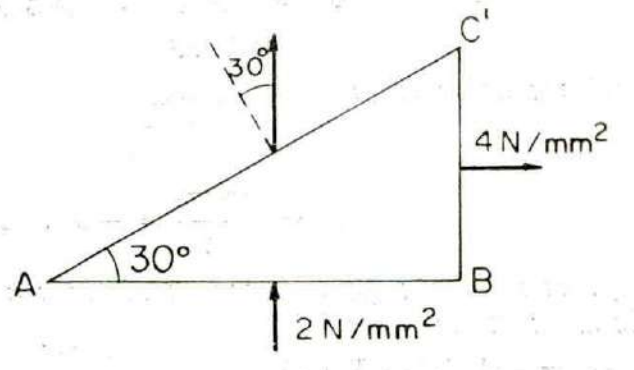
$$\tan \alpha = \frac{\sigma\theta}{\tau\theta} = \frac{\sigma_y \cos^2\theta + \sigma x \sin^2\theta.}{(\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta . \cos\theta.}$$

$$= \frac{\sigma_x \tan\theta + \sigma_y \cot\theta}{(\sigma_y - \sigma_x)} \qquad (2.8)$$

उपर्युक्त वर्णन में σy तथा σx दोनों ही तनन प्रतिबल माने गये हैं। यदि इसमें से एक अथवा दोनों ही संपीडन प्रतिबल हो तो उपर्युक्त समीकरणों में इनको ऋण चिह्न सहित प्रतिस्थापित कर वांछित व्यंजक प्राप्त किया जा सकता है। परिस्थिति के अनुसार σx के स्थान पर $(-\sigma x)$ तथा σy के स्थान पर $(-\sigma y)$ लिखना चाहिये।

अभ्यास 2.1 : एक पदार्थ खंड पर परस्पर समकोणिक दिशा में $4 N/mm^2$ का तनन तथा $2 N/mm^2$ का संपीडन प्रतिबल लगता है। ज्ञात कीजिए (अ) उस समतल पर अभिलंब, अपरुपण तथा परिणामी प्रतिबल जिसका अभिलंब $2 N/mm^2$ के प्रतिबल से $30°$ के कोण पर हो। (ब) अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान तथा वह समतल जिस पर यह क्रियाशील हो एवं इस समतल पर अभिलंब प्रतिबल का मान।

पदार्थ खंड पर लगने वाले प्रतिबल को चित्र (2.4) में दिखाया गया है। समतल AC′ का अभिलंब 2 AC′ N/mm^2 के प्रतिबल से $30°$ का कोण बनाता है अर्थात् समतल AC इस समतल से जिस पर कि 2 (   ) N/mm^2 का प्रतिबल लग रहा है, $30°$ के कोण पर है।



चित्र 2.4

$$\sigma^y = -\ 2 N/mm^2$$
$$\sigma^x = 4 N/mm^2$$
$$\theta = 30°$$

अभिलंब प्रतिबल

$$\sigma\theta = \sigma y\ Cos^2\theta + \sigma x Sin^2\theta$$
$$= -\ 2Cos^2\ 30° + 4\ Sin^2\ 30°$$
$$= -\ 0.5 N/mm^2$$

अथवा $0.5\ N/mm^2$ (संपीड़न)

अपरूपण प्रतिबल

$$\tau\theta = \frac{\sigma y - \sigma x}{2} \sin 2\theta$$
$$= \frac{-2-4}{2} Sin\ 60° = -\ 2.6\ N/mm^2$$

अपरुपण प्रतिबल का ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि समतल AC′ पर यह नीचे की दिशा में क्रियाशील है, क्योंकि बायें फलक पर अपरुपण प्रतिबल ऊपर की दिशा में धनात्मक माना गया है।

परिणामी प्रतिबल

$$= \sqrt{\sigma y\ Cos^2\theta + \sigma x\ Sin^2\theta}$$
$$= \sqrt{(-2)^2\ Cos^2 30 + (4)^2\ Sin^2 30}$$
$$= 2.64 N/mm^2$$

(ब) अधिकतम अपरुपण प्रतिबल $= \dfrac{\sigma y - \sigma x}{2}$

$$= \frac{-2-4}{2} = -\ 3\ \ N/mm^2$$

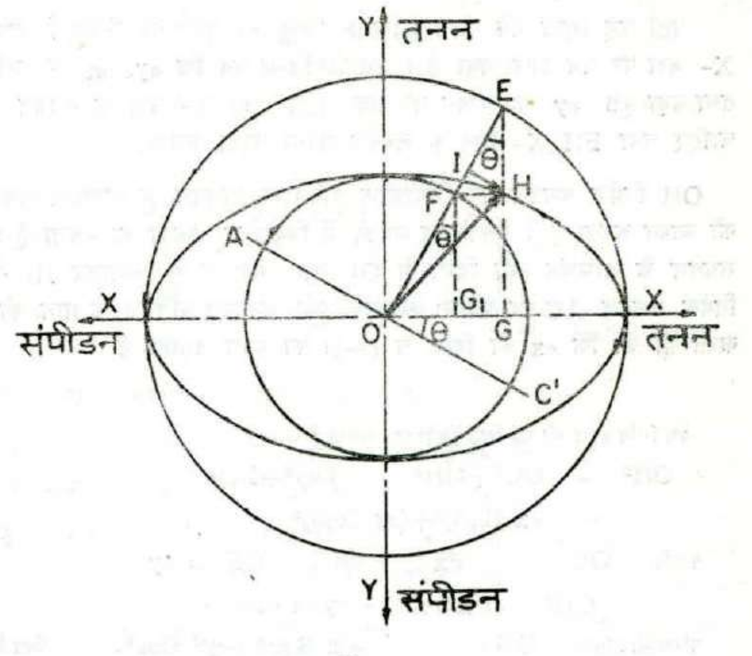
$\theta = 45°$ होने पर यह अधिकतम होगा। अधिकतम अपरुपण प्रतिबल के समतल पर अभिलंब प्रतिबल का मान

$$\sigma_{45°} = -\ 2\ Cos^2 45° + 4 Sin^2\ 45°$$
$$= 1.0 N/mm^2$$

2.4 प्रतिबल-दीर्घवृत्त

दो परस्पर समकोणिक अभिलंब प्रतिबलों के कारण किसी भी तिर्यक समतल पर अभिलंब प्रतिबल, अपरुपण प्रतिबल तथा परिणामी प्रतिबल के मान को,

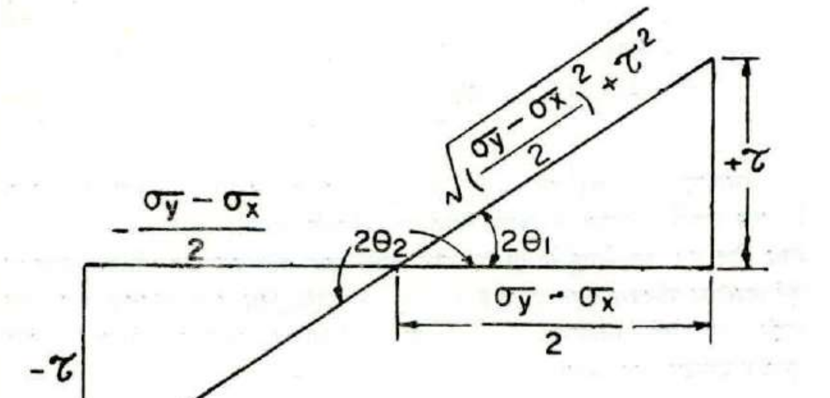
जैसा कि अनुच्छेद (2.3) में प्राप्त किया गया है, आलेख द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है । इसकी विधि निम्नलिखित है :



चित्र 2.5 प्रतिबल दीर्घवृत

चित्र (2.5) की भांति X-अक्ष तथा Y-अक्ष खींचिए तथा दोनों अक्षों के धनात्मक पार्श्व को तनन प्रतिबल तथा ऋणात्मक पार्श्व को संपीडन प्रतिबल अंकित कीजिए । 0 को केन्द्र मानकर दो वृत्त खींचिए जिनका अर्द्धव्यास क्रमशः σx तथा σy के मान को व्यक्त करे । बड़ा वृत्त σx को तथा छोटा वृत्त σy को दर्शाता है । σx अथवा σy की दिशा से दिया हुआ कोण बनाते हुए समतल AC' इस प्रकार खींचिए कि सम्पूर्ण धनात्मक पार्श्व समतल के ऊपर तथा ऋणात्मक पार्श्व इसके निचली ओर हो । यदि धन कोण को तनन पार्श्व के दक्षिणावर्त तथा ऋण कोण को संपीडन पार्श्व के वामावर्त बनाया जाय ऐसी स्थिति सहज ही प्राप्त की जा सकती है । समतल AC' पर अभिलंब EO खींचिए जो σx वृत्त को E पर तथा σy वृत्त को F पर काटता है ।

पर लगने वाले अभिलंब प्रतिबल को प्रधान प्रतिबल कहा जाता है । प्रधान समतलों की स्थिति व्यक्त करने वाले कोणों θ_1 तथा θ_2 को चित्र (2.8) में दिखाया गया है ।



चित्र 2·8

चित्र द्वारा

$$\sin 2\theta_{1,2} = \pm \frac{\tau}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2}} \quad \ldots\ldots (2.13)$$

तथा

$$\cos\theta_{1,2} = \pm \frac{\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2}} \quad \ldots\ldots (2.14)$$

समीकरणों (2.13) तथा (2.14) से $\text{Sin}\, 2\theta_{1,2}$ तथा $\text{Cos}\, 2\theta_{1,2}$ का मान समीकरण (2.9) में प्रतिस्थापन करने पर θ_1 से सबधित प्रंधान प्रतिबल :

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \sqrt{\frac{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}} + \sqrt{\frac{\xi^2}{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}}$$

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

इसी प्रकार θ_2 से संबधित प्रधान प्रतिबल—

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) - \sqrt{\left(\frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

अतः यह इस रूप में व्यक्त किया जा सकता है—

$$\sigma_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.15)$$

$\tau\sigma_y$ तथा σ_x, के मान कुछ भी क्यों न हों σ_1 सदा बीजगणितीय रूप में बड़ा प्रधान प्रतिबल तथा σ_2 छोटा प्रधान प्रतिबल को व्यक्त करता है।

τ_θ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिए समीकरण (2.10) का θ के सापेक्ष अवकलन कर शून्य के बराबर कीजिए।

$$-\frac{d\tau\theta}{d\theta} = (\sigma_y - \sigma_x)\, \text{Cos}\, 2\theta + 2\tau\, \text{Sin}\, 2\theta = 0$$

अथवा $$\tan 2\theta = -\frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.16)$$

उपर्युक्त समीकरण द्वारा भी θ के दो मान प्राप्त होंगे जो अधिकतम तथा न्यूनतम अपरुपण प्रतिबल वाले समतलों की अवस्थिति व्यक्त करते हैं। इससे यह भी ज्ञात होता है अधिकतम तथा न्यूनतम अपरुपण प्रतिबल वाले समतल परस्पर समकोणिक होते हैं।

समीकरण (2.16) से $\text{Sin}2\theta$ तथा $\text{Cos}2\theta$ का मान ज्ञात करके समीकरण (2.10) में प्रतिस्थापन करने पर

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.17)$$

समीकरण (2.15) से यह प्राप्त किया जा सकता है कि,

$$\xi_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.18)$$

समीकरण (2.17) से यह ज्ञात होता है अधिकतम तथा न्यूनतम अपरुपण प्रतिबल (τ_1 तथा τ_2) परस्पर समकोणिक समतलों पर क्रियाशील होते हैं तथा उनका परिमाण बराबर परन्तु विपरीत चिह्न वाले होते हैं। घनात्मक चिह्न वाला प्रतिबल बीजतः दृष्टि से ऋणात्मक चिह्न वाले प्रतिबल से बड़ा होता है।

समीकरणों (2.11) तथा (2.16) से प्राप्त 2θ के मान में $\triangle_2$ का अन्तर होता है क्योंकि एक दूसरे का ऋणात्मक युक्त है। अतः यह कहा जा सकता है कि अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का समतल मुख्य प्रतिबल के समतल से $\triangle_4$ के कोण पर अवस्थित होते हैं।

अभ्यास 2.3 : बल से युक्त पिंड के एक बिन्दु पर निम्नलिखित प्रतिबल क्रियाशील है। $\sigma_x - 50\ \text{N/mm}^2$, $\sigma_y = 150\ \text{N/mm}^2$, $\tau_{xy} = 100\ \text{N/mm}^2$ निम्न समतलों पर अभिलंब तथा अपरुपण प्रतिबलों का मान ज्ञात कीजिए (अ) उस समतल पर जिसका अभिलंब y- अक्ष से 30° का कोण (वामावर्त दिशा में) बनाता है (ब) उस समतल पर जिसका अभिलंब X- अक्ष से 30° का कोण (वामावर्त्त दिशा में) बनाता है (क) मुख्य समतलों पर तथा (द) अधिकतम अपरुपण प्रतिबल वाले समतलों पर

हल :

τxy द्वारा व्यक्त अपरुपण प्रतिबल यह दर्शाता है कि जिस समतल पर यह प्रतिबल क्रियाशील है उसका अभिलंब X- अक्ष की दिशा में है तथा प्रतिबल घटक की दिशा y- अक्ष की ओर है।

(अ) $\theta = 30^\circ$, $\sigma x = 50$ N/mm^2 $\sigma y = 150\ N/mm^2$

$\tau xy = 100\ N/mm^2$

$\sigma\theta = \frac{1}{2}\ (\tau_y + \tau_x) + \frac{1}{2}\ (\tau_y - \tau_x)\ Cos2\theta + \tau Sin2\theta$

$630^\circ = (150-50) + \frac{1}{2}\ (150+50)\ Cos60 + 100\ Sin\ 60$

$= 50 + 50 + 86.5 = 186.5$

$\frac{1}{2}\ (\sigma_y - \sigma_x)\ Sin\ 2\theta - \sigma Cos2_\theta$

$\tau\theta = \frac{1}{2}(150 + 50)\ Sin60 - 100\ Cos\ 60$

$= 86.5 - 50 = 36.5$ N/mm^2

(ब) जब $\theta = 120^\circ$ तथा σ_x, σ_y एव τ_{xy} का मान (अ) के समान ही हो तब

$\sigma 120^\circ = \frac{1}{2}(150-50) + \frac{1}{2}(150+50)\ Cos\ 240^\circ + 100\ Sin\ 240^\circ$

$= 50 - 50 - 26.5 = -86.5\ mm^2$

$\tau 120^\circ = \frac{1}{2}(150 + 50)\ Sin\ 240^\circ - 100\ Cos\ 240^\circ$

$= -86.5 + 50 = -36.5$

$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$

$\frac{1}{2} = (150 - 50) \pm \sqrt{(100)^2 + 100^2}$

$= 50 \pm 141$

$\sigma_1 = 191\ N/mm^2$ (तनन)

$\sigma_2 = 91\ N/mm^2$ (संपीड़न)

इन समतलों पर अपरूपण प्रतिबल का मान शून्य होगा।

(द) अधिकतम अथवा न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल का मान

$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

$= \pm\ 141\ N/mm^2$

समीकरण (2·16) **से,** $Cos\ 2\theta = -\frac{2\tau}{(\sigma_y - \sigma_x)}\ Sin\ 2\theta$

उपर्युक्त मान को समीकरण (2.9) में प्रतिस्थापन करने पर अधिकतम अथवा न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल के समतल पर अभिलंब प्रतिबल का मान ज्ञात किया जा सकता है।

$\sigma_{1,2} = (\sigma_y + \sigma_x) + \frac{1}{2}\ (\sigma_y - \sigma_x) \times \left(\frac{-2\tau}{\tau_y - \tau_x}\right) Sin2\theta + \tau Sin\ 2\theta$

$= \frac{\sigma_x + \sigma_x}{2}$

अतः इन दोनों समतलों पर अभिलंब प्रतिबल का मान

$= \frac{1}{2}(150-50) = 50$ $N/_{mm^2}$

अभ्यास 2.4: एक पदार्थ खंड पर परस्पर समकोणिक समतलों पर दो तनन प्रतिबल लग रहे हैं तथा दक्षिण पार्श्व पर ऊपर की दिशा में एक अपरूपण प्रतिबल क्रियाशील है। उनके मान क्रमश: 100, 200 तथा 200 N/mm^2 हैं। तो पदार्थ में मुख्य प्रतिबल के परिमाण तथा दिशा को ज्ञात कीजिए। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल के समतलों की अवस्थिति भी ज्ञात कीजिए तथा इस समतल पर अभिलंब एवं अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए। इन प्रतिबलों को एक समुचित रुप से अभिविन्यस्त अवयव पर व्यक्त कीजिए।

हल :

$\sigma_y = 100N/_{mm^2}$ $\sigma_x = 200\ N/_{mm^2}$

$\tau_{xy} = -200N/_{mm^2}$

$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$

$= 150 \pm \sqrt{(-50)^2 + (-200)^2}$

$= 150 \pm 206$

$\sigma_1 = 350\ N/_{mm^2}$ $\sigma^2 = -56\ N/_{mm^2}$

$tan2\theta_{1,2} = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2 \times (-200)}{100 - 200} = 4$

$2\theta_{1,2} = 76^\circ,\ 256^\circ$

$\theta_{1,2} = 38^\circ\ 128^\circ$

दोनों मुख्य प्रतिबल तथा उनके दोनों समतलों को ऊपर ज्ञात किया जा चुका है। अभी तक यह स्पष्ट नहीं है कि कौन सा मुख्य प्रतिबल किस समतल पर क्रियाशील है। यह समीकरण (2.9) में Sin 2θ तथा Cos 2θ एवं अपरूपण प्रतिबल τ के समुचित चिह्न सहित प्रतिस्थापन कर ज्ञात किया जा सकता है।

$\text{Cos } 76^\circ = 0.245 \;;\; \text{Sin } 76^\circ = 0.97$

$$\sigma 38^\circ = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{Cos } 76^\circ + \text{Sin} 76^\circ$$

$$= \frac{200 + 100}{2} + \frac{100 - 200}{2} \times 0.2425 - 200 \times 0.97$$

$$= 150 - 12 - 194 = -56 \text{ N/}_{mm}{}^2$$

अतः σ_2 उस समतल पर लग रहा है जिसके लिए θ का मान 38° है तथा $\theta = 128^\circ$ वाले समतल पर $\sigma_1 = 350 \text{ N/mm}^2$ लग रहा है।

(ब) यह पहिले ही सिद्ध किया जा चुका है कि अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का समतल मुख्य समतल से 45° के कोण पर स्थित होता है।

$\theta_1 = 38 + 45 = 83^\circ$

$\theta_2 = 128 + 45 = 173^\circ$

समीकरण (3.10) से

$$\tau 83^\circ = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{Sin } 166^\circ - \tau \text{Cos } 166$$

$$= -50 \times 0.2425 - (-200)\ (-0.97)$$

$$= -206 \text{ N/}_{mm2}$$

$$\tau 173^\circ = +206 \text{ /N}_{mm}{}^2$$

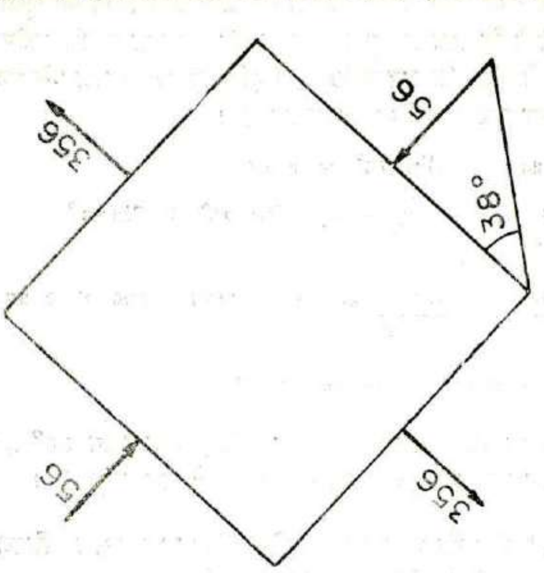
$$\sigma 83^\circ = 150 + 50 \times 0.97 + (-200) \times 0.2425$$

$$= 150 \text{ N/mm}^2$$

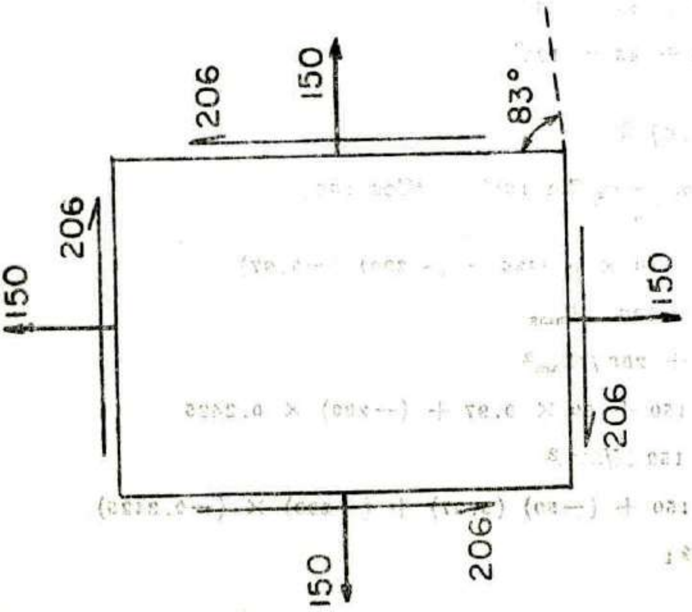
$$\sigma 173^\circ = 150 + (-50)\ (0.97) + (-299) \times (-0.2425)$$

$$= 50 \text{Nmm/}^2{}_1$$

समुचित रूप से अभिविन्यस्त अवयव चित्र (2.9) में दिखाया गया है।



चित्र 2.9 (अ)



चित्र 2.9 (ब)

अभ्यास 2.5 : किसी पदार्थ खंड के एक बिन्दु पर केवल अपरुपण प्रतिबल क्रियाशील है। दक्षिण पार्श्व पर अपरुपण प्रतिबल ऊपर की दिशा में लग रहा है तथा इसका मान 100 N/mm^2 है। उस समतल पर जो X— अक्ष से 15° के कोण पर स्थित है अभिलंब तथा अपरुपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\sigma_y = O, \quad \sigma_x = O, \quad \tau_{xy} = - \; 100 \; N/_{mm^2}$$

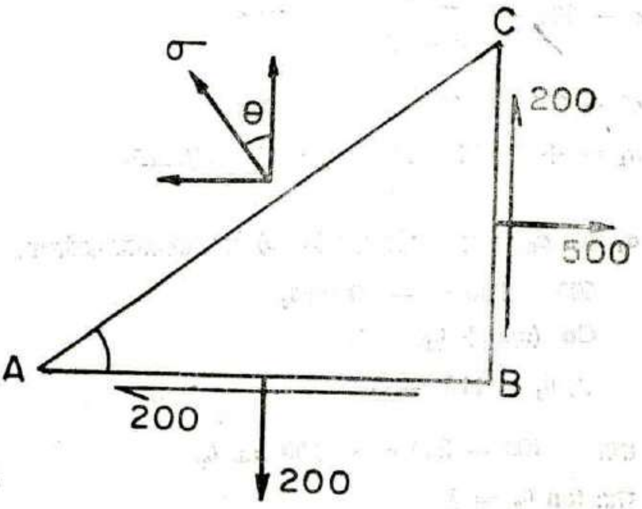
$$\sigma\theta = \tfrac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \tfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \text{ Cos } 2\theta + \tau \text{ Sin}2\theta$$

$$= - 100 \text{ Sin } 30^\circ = - 50 \; N/_{mm^2} \text{ (संपीडन)}$$

$$\tau\theta = \tfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \text{ Sin } 2\theta - \tau \text{ Cos } 2\theta$$

$$= 100 \text{ Cos } 30 = 86.5 \; N/_{mm^2} \text{ (तनन)}$$

अभ्यास 2.6 : किसी पदार्थ खंड के एक परिच्छेद पर 500 N/mm^2 का तनन प्रतिबल लग रहा है तथा इसके समकोणिक समतल पर एक 200 N/mm^2 का एक संपीडन प्रतिबल भी क्रियाशील है। इस पर दक्षिण पार्श्व में ऊपर की दिशा में एक अपरुपण प्रतिबल 200 N/mm^2 का लग रहा है। मूल सिद्धांतों का प्रयोग करते हुए मुख्य प्रतिबल का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए तथा अधिकतम अपरुपण प्रतिबल भी बताइये।



चित्र 2·10

हल :

मान लीजिए जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, AC मुख्य समतल को व्यक्त करता है जिस पर कि मुख्य प्रतिबल σ क्रियाशील है।

AB की दिशा में सब बलों का वियोजन करने से,

$$(\sigma \times AC) \text{ Sin}\theta + 200 \times AB = 500 \times BC$$

अथवा $\sigma \text{ Sin}\theta + 200 \text{ Cos}\theta = 500 \text{ Sin}\theta$

$$\sigma - 500 = -200 \text{ Cot}\theta \qquad \text{.........(2.19)}$$

BC कि दिशा में सब बलों का वियोजन करने पर,

$$(\sigma \times AC) \text{ Cos}\theta - 200 \times AB = - 200 \times BC$$

$$\sigma \text{ Cos}\theta - 200 \text{ Cos}\theta = - 200 \text{ Sin}\theta$$

$$\sigma - 200 = -200 \tan\theta \qquad \text{.........(2.20)}$$

समीकरण (2.19) से $\tan\theta$ का मान (2.20) में प्रतिस्थापन करने पर

$$\sigma - 200 = \frac{200 \times 200}{\sigma - 500}$$

$$\sigma^2 - 700\sigma + 10{,}0000 = 40{,}000$$

$$\sigma_1 = + 600 \; N/mm^2 \qquad \sigma_2 = 100 \; N/mm^2$$

σ_1 तथा σ_2 का मान समीकरण (2.20) में प्रतिस्थापन करने पर

$$600 - 200 = -200 \tan\theta_1$$

$$\text{Cot } (\pi/2 + \theta_1) = 2$$

$$\therefore \theta_1 = 116^\circ - 33'$$

तथा $100 - 200 = - 200 \tan \theta_2$

अतः $\tan \theta_2 = \tfrac{1}{2}$

$$\theta_2 = 26^\circ - 33'$$

अधिकतम अपरुपण प्रतिबल

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 250 \text{ N/mm}^2$$

यहां पदार्थ के एक अवयव ABCD को ध्यान में रखते हुए विभिन्न समतलों पर प्रतिबल का विश्लेषण किया गया है। व्यवहार में साधारणतया प्रतिबल का मान एक स्थल से दूसरे स्थल पर बदलता रहता है अतः यह अवयव इस प्रकार अवस्थित माना जाता है कि वह संबंधित स्थल जिस पर प्रतिबल क्रियाशील हो उसके अंतर्गत हो। इस अवयव की विमाये अत्यंत लघु मानी जाती हैं अतः उस स्थल पर प्रतिबल तीव्रता का मान अवयव के संपूर्ण फलक पर एक समान ही माना जा सकता है, यह विश्लेषण उस स्थिति के लिए भी उपयुक्त होता है जब किसी बिन्दु पर प्रतिबल ज्ञात करने होते हैं।

2.6 मोर (Mohr) का वृत्त

किसी तिर्यक समतल पर अभिलंब एवं अपरुपण प्रतिबल, मुख्य प्रतिबल, मुख्य समतल, अधिकतम अपरुपण प्रतिबल तथा इनके समतल आदि का मान बड़ी सुगमता पूर्वक एवं शीघ्रता से ग्राफीय हल द्वारा ज्ञात किया जा सकता है यह विधि मोहर का प्रतिबल वृत्त कहलाती है। जो वैज्ञानिक 'मोर' के नाम पर है।

(अ) दो परस्पर समकोणिक अभिलंब प्रतिबलों के कारण किसी तिर्यक समतल पर अभिलंब एवं अपरुपण प्रतिबल के लिए समीकरण (2.5) को निम्न विधि से व्यक्त किया जा सकता है

$$\sigma\theta = \frac{\sigma_y (1 + \text{Cos}2\theta)}{2} + \frac{\sigma_x (1 - \text{Cos}2\theta)}{2}$$

$$\sigma\theta = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2} \text{Cos}2\theta$$

तथा समीकरण (2.6) से $\tau\theta = \frac{(\sigma_y - \sigma_x) \text{ Sin } 2\theta}{2}$

उपर्युक्त दोनों समीकरणों के वर्ग का योग करने पर

$$\left(\sigma\theta - \frac{\sigma_y + 6_x}{2}\right)^2 + \tau\theta^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 \qquad \text{.................(2.21)}$$

अथवा

$$(\sigma\theta - a)^2 + \tau\theta^2 = b^2$$

जब कि $a = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$ तथा $b = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$

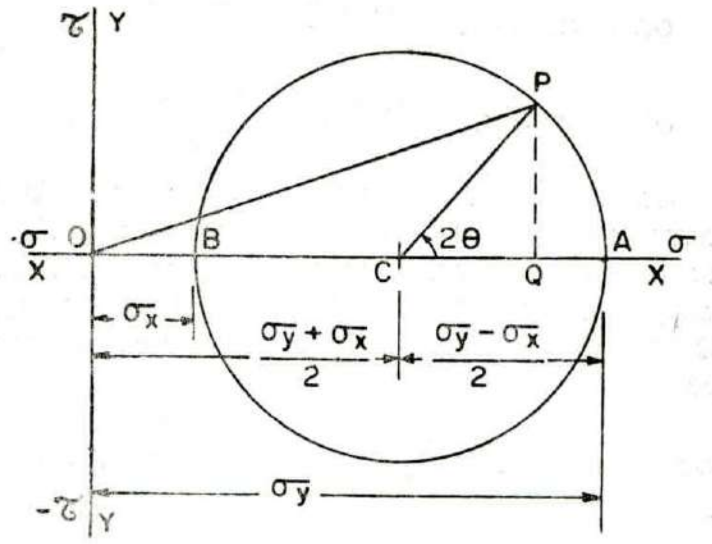
उपर्युक्त समीकरण (2.21) एक वृत्त को व्यक्त करता है जिसके केन्द्र के निर्देशांक $\left\{\left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right), \ 0\right\}$ है तथा अर्द्धव्यास $\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)$ है। यह वृत्त "मोर-वृत्त" कहलाता है।

ऊपर वर्णित वृत्त को खींचने के लिए 0 को मूल बिन्दु मानकर X— अक्ष तथा Y— अक्ष की दिशा चित्र (2.11) की भाँति अंकित कीजिए।

X— अक्ष पर C बिन्दु इस प्रकार अंकित कीजिए कि $OC = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$

C—को केन्द्र मान कर तथा $\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$ का अर्द्धव्यास लेकर वृत्त APB खींचिए।

कोण ACP = 2θ बनाइये, यहाँ समतल का X— अक्ष से झुकाव θ है। इस प्रकार इस समतल पर OP परिणामी प्रतिबल को व्यक्त करता है। तथा इसको दो घटकों में वियोजित किया जा सकता है। यदि PQ, OA पर लंब हो तब OQ अभिलंब प्रतिबल को तथा QP अपरुपण प्रतिबल को व्यक्त करेगा। उनके धनात्मक अथवा ऋणात्मक रूप को भी दोनों अक्षों के क्रमशः धनात्मक एवं ऋणात्मक पार्श्वों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। AB से ऊपर की दिशा में अपरुपण प्रतिबल जो अवयव को दक्षिणावर्त घुमाने का प्रयत्न करता है धनात्मक होता है।



चित्र 2.11 मोर-प्रतिबल वृत्त

अभिलंब प्रतिबल $OQ = OC + CQ$

$$= OC + CP \cos 2\theta$$

$$= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta$$

अपरूपण प्रतिबल $PQ = CP \sin 2\theta$

$$= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

PQ अर्थात अपरुपण प्रतिबल का अधिकतम मान वृत्त के अर्द्धव्यास के बराबर होगा, जब $2\theta = 90°$ अथवा θ 45° हो । विश्लेषणात्मक परिणामों से भी यही प्राप्त किया जा चुका है ।

$$OA = OC + CA = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \sigma_y$$

$$OB = OC - CB = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \sigma_x$$

अतः मोर वृत्त $OA = \sigma_y$ तथा $OB = \sigma_x$ लेकर तथा AB को व्यास मानकर भी खीचा जा सकता है । ये दूरियाँ तनन प्रतिबल के लिए अक्ष के घनात्मक पार्श्व में तथा संपीडन प्रतिबल के लिए ऋणात्मक पार्श्व में खींची जानी चाहिए । वृत्त खींचने के पश्चात 2θ का कोण अंकित कर जैसा कि पहिले वर्णन किया जा चुका है, परिणामी, अभिलंब तथा अपरूपण प्रतिबलों को ज्ञात किया जा सकता ।

अभ्यास 2.7 : अभ्यास (2.1) को मोर वृत्त खींचकर हल कीजिए ।

हल :

मोर वृत्त चित्र (2.12) में दिखाया गया है ।

$\sigma_A = 6_y = - 2N/mm^2$ तथा $\sigma_B = \sigma_x = 4/mm^2$ अंकित कीजिए तथा AB को व्यास मानकर वृत्त खींचिए । चूंकि OA, σ_y को ऋणात्मक पार्श्व में व्यक्त करता है तथा समतल σ_y के समतल से 30° के कोण पर स्थित है इसलिए कोण $2\theta = 60°$, σ_A से कोण व्यक्त करने की धनात्मक दिशा अर्थात वामावर्त लिया जायेगा कोण $ACP = 60°$ बनाइये C वृत्त का केन्द्र है ।

(अ) OP = परिणामी प्रतिबल $= -2.64 N/mm^2$

PQ = अपरूपण प्रतिबल $= -2.6 N/mm^2$

OQ = अभिलंब प्रतिबल $= -0.5 N/mm^2$

(ब) अधिकतम अपरूपण प्रतिबल $C' = 3N/mm^2$ 45° के कोण पर स्थित समतल होगा । इस समतल पर अभिलंब प्रतिबल $OC = 1N/mm^2$ (तनन) होगा ।

व्यापक परिस्थिति के लिए मोर वृत्त :—

व्यापक परिस्थिति के लिए जिसमें दो समकोणिक अभिलंब प्रतिबलों के

अतिरिक्त अपरूपण प्रतिबल भी लग रहें हों, σ_θ एवं $\tau\theta$ को व्यक्त करने वाले समीकरणों (2.9) तथा (2.10) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$\sigma\theta - \left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right) \text{Cos}2\theta + \tau\ \text{Sin}2\theta$$

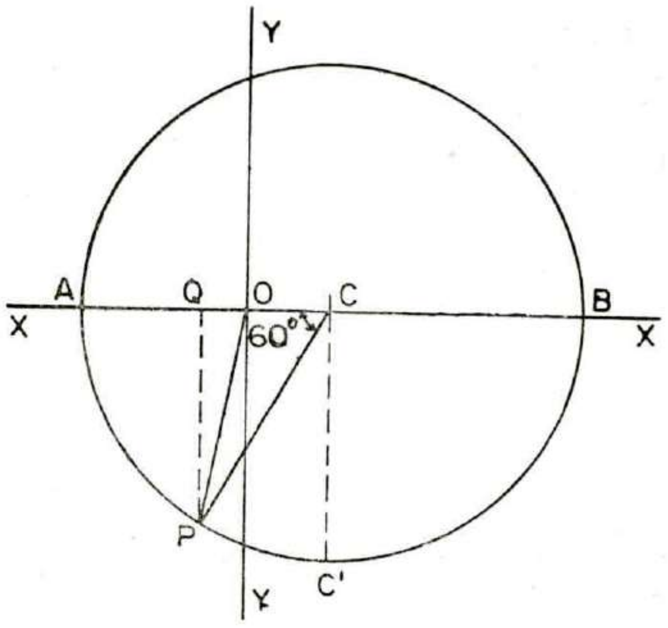
तथा $\tau\ \theta = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)\text{Sin}\ 2\theta - \tau\text{Cos}\ 2\theta$

उपर्युक्त दोनों समीकरणों के वर्ग के योग को सरल करने पर

$$\left(\sigma\theta - \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right) + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 \text{..............} (2.22)$$

अथवा $(\sigma\theta - a)^2 + \tau\theta^2 = b^2$

जब कि $a = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}$ तथा $b^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2$



चित्र 2.12

समीकरण (2.22) σ_θ एवं τ_θ को चल राशि के रूप में एक वृत्त के समीकरण को व्यक्त करता है , जिसके केन्द्र का निर्देशांक (a, o) तथा अर्द्ध-व्यास b है । इस वृत्त पर प्रत्येक बिन्दु किसी समतल पर प्रतिबल की अवस्था व्यक्त करता है । क्षैतिज x– अक्ष अभिलंब प्रतिबल तथा ऊर्ध्वाधर y– अक्ष अपरूपण प्रतिबल को व्यक्त करता ।

उपर्युक्त परिस्थिति के संदर्भ में जिसमें परस्पर समकोणिक σ_x तथा σ_y दो अभिलंब प्रतिबल तथा अपरूपण प्रतिबल τ उस पार्श्व पर जिसपर कि σ_y क्रियाशील है धनात्मक दिशा में लग रहा हो, यह स्मरणीय है कि अपरूपण प्रतिबल σ_y उस पार्श्व पर जिसपर कि σ_x कियाशील है समान मान का पूरक अपरुपण प्रतिबल प्रेरित करेगा । इस प्रकार समतलों पर जो 90° के कोण पर स्थित है प्रतिबल का मान ज्ञात है तथा तदनुरुपी बिन्दु $P(\sigma_y, \tau)$ तथा $P_1(\sigma_x, \tau)$ मोर वृत्त पर अवस्थित किए जा सकते हैं । यदि वृत्त का केन्द्र C है तो CP तथा CP_1 $90 \times 2{=}180°$ के कोण पर स्थित होंगे जैसा कि पिछले अनुच्छेद में वर्णन किया जा चुका है । इस प्रकार यह स्पष्ट है कि PP_1, एक सीधी रेखा है जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है तथा P एवं P_1 इस वृत्त के व्यास के दो छोर हैं । इस प्रकार मोर वृत्त सुगमतापूर्वक खींचा जा सकता है तथा OA और OB मुख्य प्रतिबल व्यक्त करते हैं ।

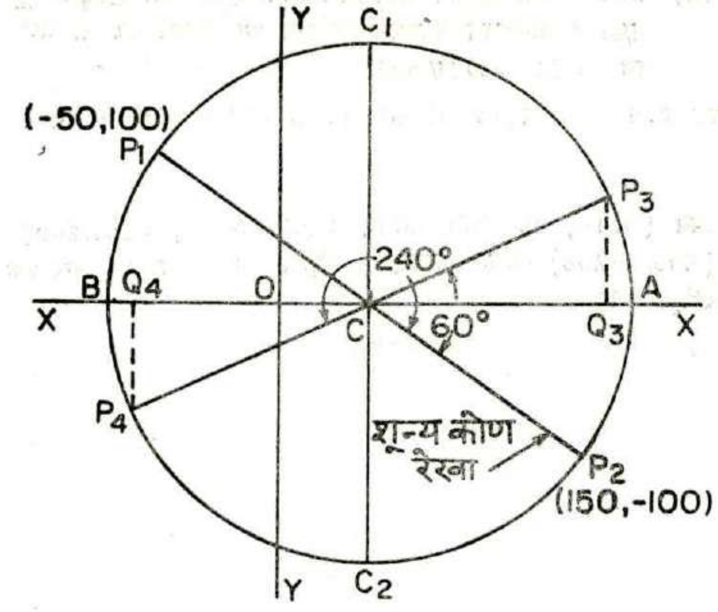
पूर्ण प्रतिबल अवस्था ज्ञात करने के लिए मोर वृत्त का उपयोग विभिन्न हल किए गये अभ्यासों द्वारा समझाया जायगा ।

अभ्यास 2.8 : अभ्यास (2.3) को मोर प्रतिबल वृत्त की सहायता से हल कीजिए ।

हल :

चित्र (2.13) पर ध्यान दीजिए । दो बिन्दुओं P (—50 100) तथा P_1(151, -100) अंकित कीजिए । यहाँ अपरुपण प्रतिबल τ_{xy} उस समतल पर जिसपर कि $\sigma_x = -50\ N/mm^2$ लग रहा है, धनात्मक दिशा में है ।

P_1P_2 को व्यास मान कर P_1BP_2A वृत्त खींचिये ।



चित्र 2.13

C वृत्त का केन्द्र है । सभी कोण उस समतल से जिस पर कि $\tau_y = 150$ N/mm² तथा $\tau = -100$ N/mm² लग रहा है तथा मोर आरेख में रेखा CP_2 को व्यक्त करता है, वामावर्त दिशा में खींचे गये हैं । इस रेखा को शून्य कोण रेखा कहा जाता है ।

(अ) कोण $P_2CP_3 = 2\theta = 60°$ बनाइये ।

$$\sigma_{30} = OQ_3 = 186$$
$$\tau_{30} = P_3Q_3 = 36$$

(ब) कोण $P_2CP_4 = 2\varphi = 240°$ बनाइये ।

$$\sigma_{120} = O\varphi_4 = -\theta 6 \text{ N/mm}^2$$
$$\zeta 130° = P_4\varphi_4 = -36 \text{ N/mm}^2$$

(स) अधिकतम प्रतिबल प्रधान $\sigma_1 = \sigma_A = 191$ N/mm²
न्यूनतम प्रधान प्रतिबल $\sigma_2 = \sigma b = -91$ N/mm²

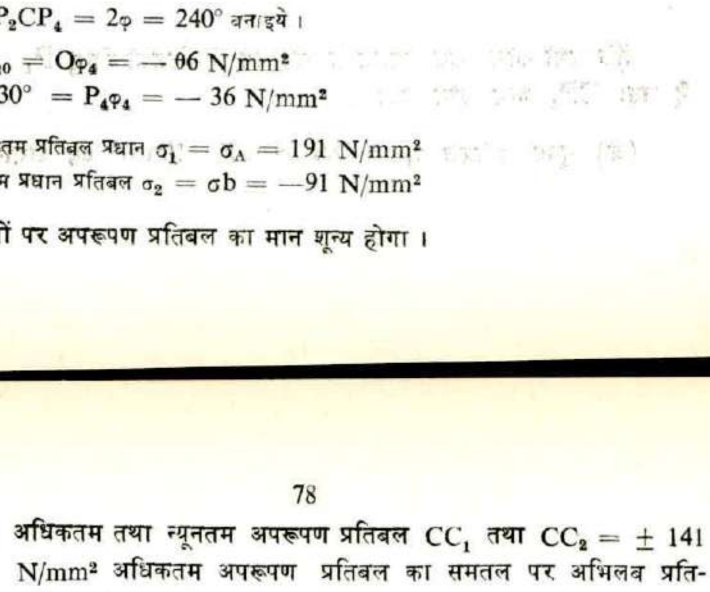
इन समतलों पर अपरूपण प्रतिबल का मान शून्य होगा ।

(द) अधिकतम तथा न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल CC_1 तथा $CC_2 = \pm 141$ N/mm² अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का समतल पर अभिलब प्रतिबल $= OC = 50$ N/mm²

अभ्यास 2.9 : अभ्यास (2.4) को मोर-वृत्त खींच कर हल कीजिए ।

हल :

चित्र (2.14) पर ध्यान दीजिए । दो बिन्दु P_1 (100,200) तथा P_9 (200, −200) अंकित कीजिए । P_1P_2 को व्यास मान कर एक वृत्त P_1AP_2B खींचिए ।



चित्र 2.14

चूंकि सभी कोण उस समतल से नापे गये हैं जिसको बिन्दु P_1 व्यक्त करता है अतः CP_1 शून्य कोण रेखा है ।

(अ) मुख्य प्रतिबल $\sigma_1 = OA = 356$ N/mm² यह वामावर्त दिशा में

कोण $\frac{1}{2}P_1CA = 128°$ स्थित समतल पर लगेगा उपर्युक्त कोण उस समतल से नापा गया है जो बिन्दु P_1 द्वारा व्यक्त होता है ।

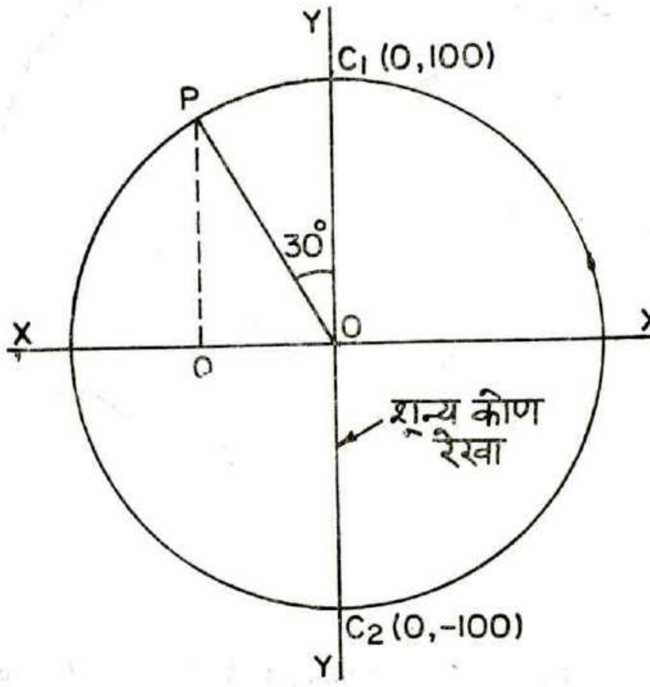
मुख्य प्रतिबल $\sigma_2 = OB = -56\ N/mm^2$ यह उस समतल पर लगतार है जो निर्देश समतल से $\frac{1}{2}P_1CB = \frac{76}{2} = 38°$ का कोण बनाता है ।

(ब) अपरूपण प्रतिबल का अधिकतम मान $CP_3 = +206\ N/mm^2$ तथा $CP_4 = -206\ N/mm^2$ है इनके समतल वामावर्त दिशा में नापे गये कोणों क्रमशः $\frac{1}{2}P_2CP_3 = \frac{346}{2} = 173°$ तथा $\frac{1}{2}P_1CP_4 = \frac{166°}{2} = 83°$ पर स्थित हैं ।

इन दोनों समतलों पर अभिलंब प्रतिबल का मान $OC = 150\ N/mm^2$ है।

अभ्यास 2.10 : अभ्यास (2.5) को मोर-वृत्त की सहायता से हल कीजिए ।

हल :



चित्र 2.15

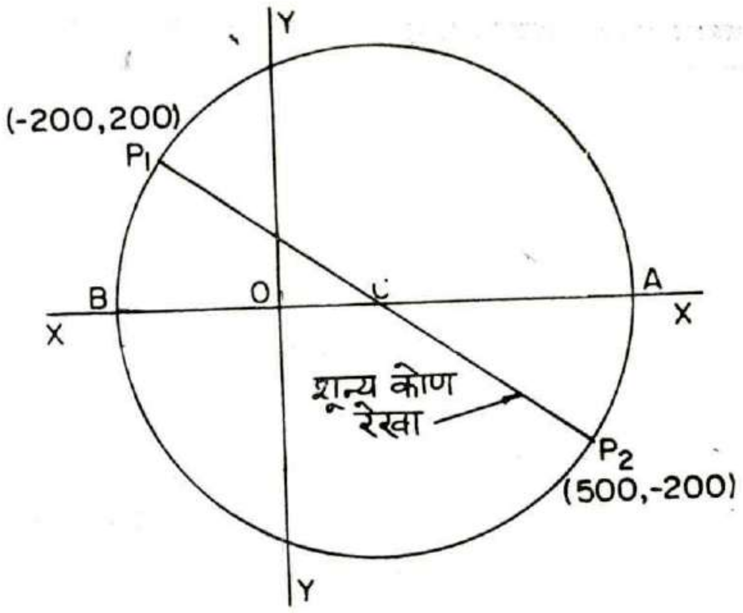
दो बिन्दु C_1, (0,100) तथा C_2(0, − 100) अंकित कीजिए ।

C_1C_2 को व्यास मान कर वृत्त C_1PC_2 खींचिए । चूंकि σ_y के समतल पर अपरूपण प्रतिबल धनात्मक है अतः ∝, शून्य कोण रेखा होगी ।

कोण $C_1OP = 2\theta = 30°$ बनाइये । चित्र (2.15) पर ध्यान दीजिए ।

$$\sigma_{15°} = OQ = -50\ N/mm^2$$
$$\tau_{15°} = PQ = 86 \cdot 5\ N/mm^2$$

अभ्यास 2.11 : अभ्यास (2.6) को ग्राफीय ढंग से मोर-वृत्त खींचकर हल कीजिए । यहाँ $\sigma_y = -200$ मानिए ।



चित्र 2.16

हल :

चित्र (2.16) पर ध्यान पीजिए । दो बिन्दुओं P_1 (−200,200) तथा P_2(500, −200) अंकित कीजिए तथा वृत्त P_1BP_2A खींचिए । PC शून्य कोण रेखा है ।

अधिकतम मुख्य प्रतिबल $OA = 553\ N/mm^2$ तथा इसका समतल X– अक्ष से P_1CA का आधा $104°–52'$ के कोण पर स्थित है।

न्यूनतम मुख्य प्रतिबल $OB = —253\ N/mm^2$ समतल X– अक्ष की दिशा से P_1CB का आधा $14° –52'$ के कोण पर स्थित है ।

2.7 किसी बिंदु पर प्रतिबल अवस्था

जब किसी अवयव पर भार लगता है तब अवयव पदार्थ में प्रतिबेल एवं विरूपण उत्पन्न होता है । यदि अवयव के किसी बिन्दु पर भार का मान ज्ञात हो तो उस बिन्दु पर अभिलंब अथवा अपरूपण प्रतिबल, समीकरण (1.4) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है । इसी प्रकार समीकरण (1.7) द्वारा क्रमश: अभिलंब विकृति एवं अपरूपण विकृति ज्ञात की जा सकती है । इसको किसी बिन्दु पर प्रतिबल अथवा विकृति कहा जाता है । निश्चित रूप से प्रतिबल किसी समतल विशेष पर ही ज्ञात होगा तथा विकृति भी किन्हीं निश्चित रेखीय अवयव के सापेक्ष ही प्राप्त होंगी ।

परन्तु इससे उस बिन्दु पर प्रतिबल अथवा विकृति अवस्था का ज्ञान नहीं हो पाता है । किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था उस बिन्दु पर प्रतिबल के उन न्यूनतम घटकों द्वारा व्यक्त किया जाता है जिनके द्वारा समीकरण (2.9) तथा (2.10) का प्रयोग कर उस बिन्दु से होकर जाने वाले किसी भी समतल पर अभिलंब एवं अपरूपण प्रतिबलों को ज्ञात किया जा सके ।

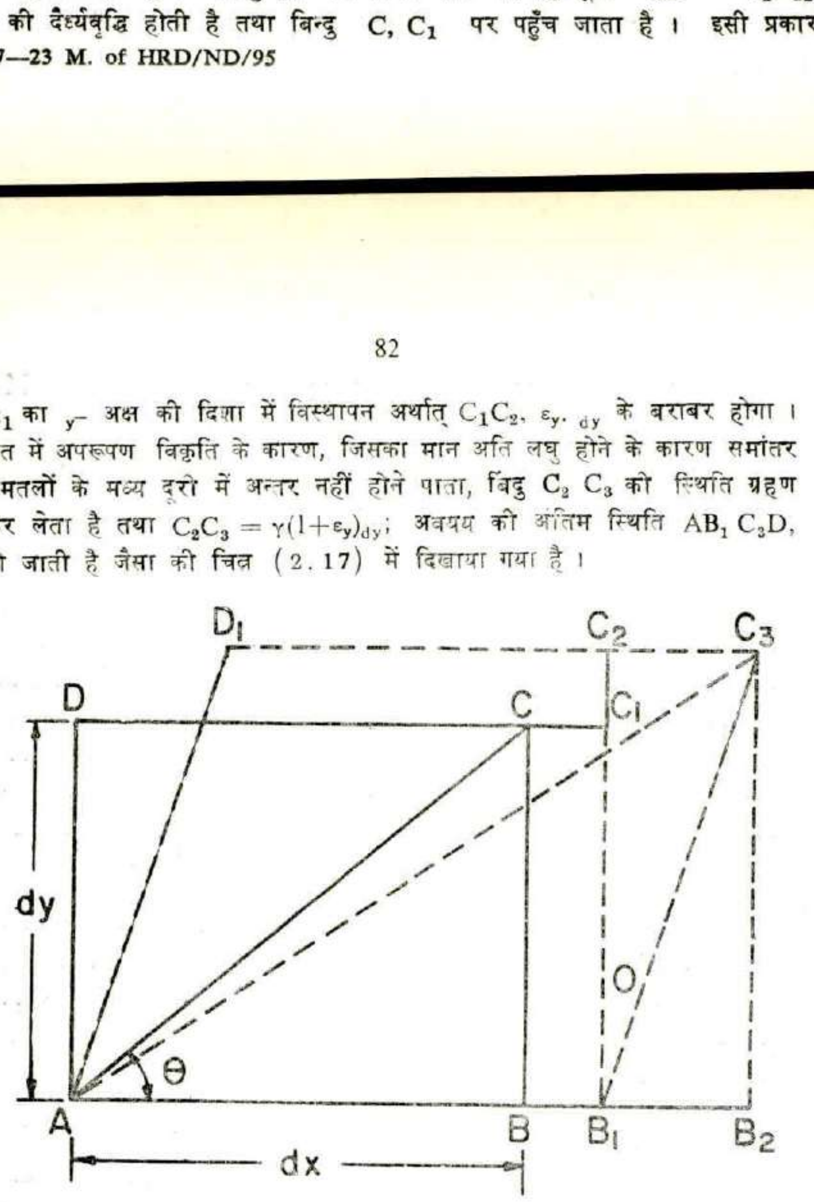
2.8 विकृति विश्लेषण

दो संलग्न बिन्दुओं के मध्य सापेक्ष विस्थापन को जिसके कारण प्रतिबल उत्पन्न होता है, विकृति कहते हैं । यह संपूर्ण अवयव के विस्थापन अथवा घूर्णन को नहीं बतलाती है । अत: विकृति-विश्लेषण के लिए केवल सापेक्ष विस्थापन पर ही ध्यान दिया जायगा ।

(अ) रेखीय विकृति :

एक छोटे अवयव ABCD पर ध्यान दीजिए (चित्र 2.17) जिसका $AB=dx, AD=dy$ तथा $AC=ds$ है । इस अवयव में X– अक्ष की दिशा में विकृति ε_x; y– अक्ष की दिशा में विकृति ε_y तथा अपरूपण विकृति γ है । बिन्दु A को स्थिर मान लीजिए, दूरी CD में $\varepsilon_x . dx$ की दैर्ध्यवृद्धि होती है तथा बिन्दु C, C_1 पर पहुँच जाता है । इसी प्रकार

C_1 का y– अक्ष की दिशा में विस्थापन अर्थात् C_1C_2, $\varepsilon_y . dy$ के बराबर होगा । अंत में अपरूपण विकृति के कारण, जिसका मान अति लघु होने के कारण समांतर समतलों के मध्य दूरी में अन्तर नहीं होने पाता, बिंदु C_2 C_3 की स्थिति ग्रहण कर लेता है तथा $C_2C_3 = \gamma(1+\varepsilon_y)_{dy}$; अवयव की अंतिम स्थिति AB_1C_3D, हो जाती है जैसा की चित्र (2.17) में दिखाया गया है ।



चित्र 2.17 अभिलंब अथवा रेखीय विकृति

यदि AC की दिशा में रेखीय विकृति $\varepsilon\theta$ है

$$AC_3 = (1 + \varepsilon\theta)ds$$

$$(AC_3)^2 = (AB_2)^2 + (B_2C_3)^2 = (AB_1+C_2C_3)^2 + (B_2C_2)^2$$

अथवा $[(1+\varepsilon\theta)ds]^2 = [(1+\varepsilon_x)dx+\gamma.(1+\varepsilon_y)dy]^2 + [(1+\varepsilon_y)dy]^2$

उपर्युक्त व्यंजक को सरल कर ds^2 से भाग देने पर तथा $\frac{dx}{ds}=\text{Cos}\theta$; $\frac{dy}{s}=\text{Sin}\theta$

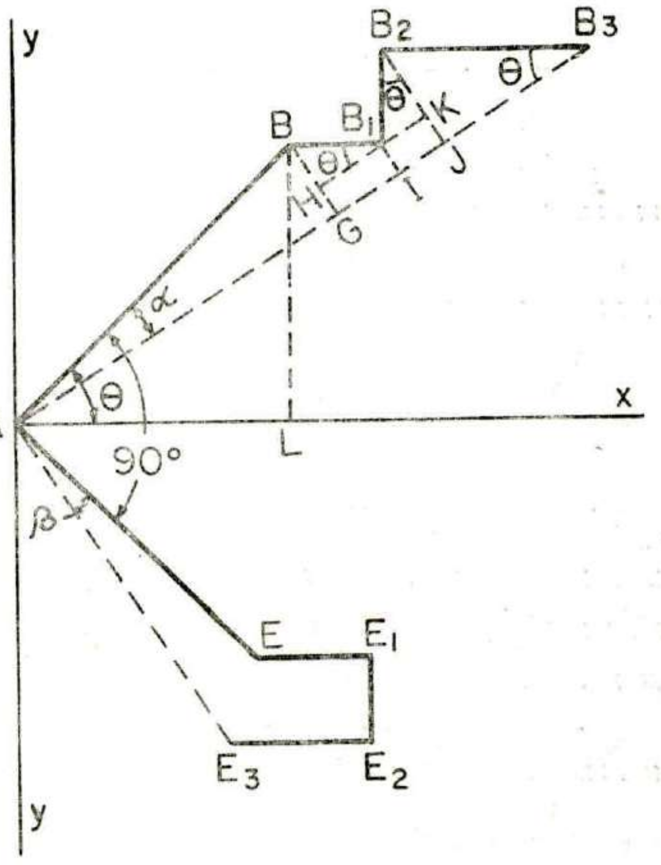
प्रतिस्थापित कर और दो विकृतियों के गुणनफल को नगण्य करने पर निम्नांकित फल ाप्त होता है ।

$$\varepsilon\theta = \varepsilon_x \text{Cos}^2\theta + \varepsilon_y \text{Sin}^2\theta + \gamma \text{ Sin}\theta \text{ Cos}\theta$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2} \text{Cos}2\theta + \frac{\gamma}{2} \text{ Sin}^2\theta \qquad (2.28)$$

(ब) अपरूपण विकृतियाँ :

चूंकि अपरूपण विकृति को दो परस्पर समकोणीय समतलों के कोण में परिवर्तन द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः यहाँ दो बिन्दुओं B तथा E के मध्य सापेक्ष विस्थापन पर ध्यान दिया जायगा। चूंकि चित्र (2.18) में α बहुत छोटा कोण है तथा AB=ds, AL=dx तथा BL=dy.



चित्र 2.18

$$\frac{dx}{ds} = \text{Cos}\theta \qquad \text{तथा} \qquad \frac{dy}{ds} = \text{Sin}\theta$$

$$\alpha = \tan\alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{B_2J - B_2K + BH}{AB}$$

$$= \frac{B_2B_3 \text{ Sin}\theta - B_1B_2 \text{ Cos}\theta + B_1B \text{ Sin}\theta}{AB}$$

$$= \frac{\gamma(1+\varepsilon_y)dy \text{ Sin}\theta - \varepsilon_y dy \text{ Cos}\theta + \varepsilon_x d_x \text{ Sin}\theta}{ds}$$

$$= \gamma \text{ Sin}^2\theta - \varepsilon_y \text{ Sin}\theta \text{ Cos}\theta + \varepsilon_x d_x \text{ Sin}\theta \text{ Cos}\theta$$

$$= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \text{ Sin}\theta \text{ Cos}\theta + \gamma \text{ Sin}^2\theta$$

इसी प्रकार β का मान $\theta = -(90\text{-}\theta)$ उपर्युक्त समीकरण में रखकर ज्ञात किया जा सकता है।

$$\beta = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \text{ Sin}\theta \text{ Cos}\theta + \gamma \text{ Cos}^2\theta$$

अपरूपण विकृति अर्थात कोण $\overline{EAB}$ में संपूर्ण परिवर्तन

$$\gamma\theta = \beta - \alpha = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \text{ Sin}2\theta + \gamma \text{ Cos}2\theta$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{\gamma\theta}{2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \text{ Sin}2\theta - \frac{\gamma}{2} \text{ Cos}2\theta \qquad (2.29)$$

समीकरण (2.28) तथा (2.29) गणितीय रूप से प्रतिबल समीकरणों (2.9) तथा (2.10) के समरूप हैं। अतः प्रतिबल वृत्त के समान ही मोर-विकृति वृत्त सोचा जा सकता है। विकृति वृत्त पर प्रत्येक बिन्दु रेखीय विकृति तथा अपरूपण विकृति के आधे मान को $(\frac{\gamma}{2})$ व्यक्त करता है। विकृति वृत्त बनाने की विधि प्रतिबल वृत्त के समान ही होती है।

मुख्य विकृतियों का मान गणितीय तथा ग्राफीय विधियों से ज्ञात किया जा सकता है तथा ये मुख्य समतलों पर होगी। तदनुरूपी मुख्य विकृति का मान

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_y + \varepsilon_x) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)} \qquad (2.30)$$

अधिकतम मुख्य प्रतिबल $OA = 553\ N/mm^2$ तथा इसका समतल X–अक्ष से P_1CA का आधा $104°–52'$ के कोण पर स्थित है।

न्यूनतम मुख्य प्रतिबल $OB = -253\ N/mm^2$ समतल X– अक्ष की दिशा से P_1CB का आधा $14° - 52'$ के कोण पर स्थित है।

2.7 किसी बिंदु पर प्रतिबल अवस्था

जब किसी अवयव पर भार लगता है तब अवयव पदार्थ में प्रतिवेल एवं विरूपण उत्पन्न होता है। यदि अवयव के किसी बिन्दु पर भार का मान ज्ञात हो तो उस बिन्दु पर अभिलंब अथवा अपरूपण प्रतिबल, समीकरण (1.4) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। इसी प्रकार समीकरण (1.7) द्वारा क्रमशः अभिलंब विकृति एवं अपरूपण विकृति ज्ञात की जा सकती है। इसको किसी बिन्दु पर प्रतिबल अथवा विकृति कहा जाता है। निश्चित रूप से प्रतिबल किसी समतल विशेष पर ही ज्ञात होगा तथा विकृति भी किन्हीं निश्चित रेखीय अवयव के सापेक्ष ही प्राप्त होंगी।

परन्तु इससे उस बिन्दु पर प्रतिबल अथवा विकृति अवस्था का ज्ञान नहीं हो पाता है। किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था उस बिन्दु पर प्रतिबल के उन न्यूनतम घटकों द्वारा व्यक्त किया जाता है जिनके द्वारा समीकरण (2.9) तथा (2.10) का प्रयोग कर उस बिन्दु से होकर जाने वाले किसी भी समतल पर अभिलंब एवं अपरूपण प्रतिबलों को ज्ञात किया जा सके।

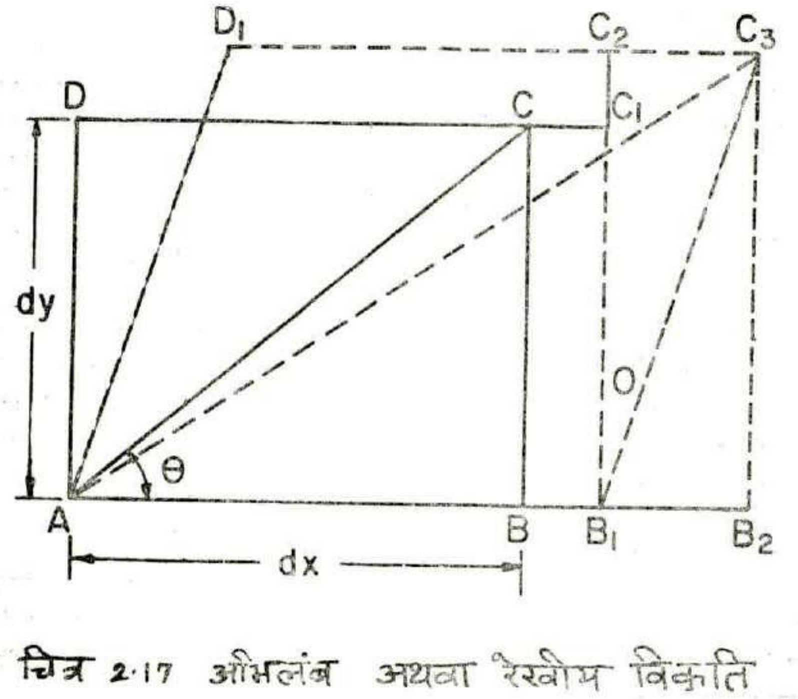
2.8 विकृति विश्लेषण

दो संलग्न बिन्दुओं के मध्य सापेक्ष विस्थापन को जिसके कारण प्रतिबल उत्पन्न होता है, विकृति कहते हैं। यह संपूर्ण अवयव के विस्थापन अथवा घूर्णन को नहीं बतलाती है। अतः विकृति-विश्लेषण के लिए केवल सापेक्ष विस्थापन पर ही ध्यान दिया जायगा।

(अ) रेखीय विकृति :

एक छोटे अवयव ABCD पर ध्यान दीजिए (चित्र 2.17) जिसका $AB = dx, AD = dy$ तथा $AC = ds$ है। इस अवयव में X– अक्ष की दिशा में विकृति ε_x; y– अक्ष की दिशा में विकृति ε_y तथा अपरूपण विकृति γ है। बिन्दु A को स्थिर मान लीजिए, दूरी CD में $\varepsilon_x . dx$ की दैर्ध्यवृद्धि होती है तथा बिन्दु C, C_1 पर पहुँच जाता है। इसी प्रकार

C_1 का y– अक्ष की दिशा में विस्थापन अर्थात् C_1C_2, $\varepsilon_y . dy$ के बराबर होगा। अंत में अपरूपण विकृति के कारण, जिसका मान अति लघु होने के कारण समांतर समतलों के मध्य दूरी में अन्तर नहीं होने पाता, बिंदु C_2 C_3 को स्थिति ग्रहण कर लेता है तथा $C_2C_3 = \gamma(1+\varepsilon_y)_{dy}$; अवयव की अंतिम स्थिति AB_1C_3D, हो जाती है जैसा की चित्र (2.17) में दिखाया गया है।



चित्र 2.17 अभिलंब अथवा रेखीय विकृति

यदि AC की दिशा में रेखीय विकृति $\varepsilon\theta$ है

$$AC_3 = (1 + \varepsilon\theta)ds$$

$$(AC_3)^2 = (AB_2)^2 + (B_2C_3)^2 = (AB_1 + C_2C_3)^2 + (B_2C_2)^2$$

अथवा $$[(1+\varepsilon\theta)ds]^2 = [(1+\varepsilon_x)dx + \gamma.(1+\varepsilon_y)dy]^2 + [(1+\varepsilon_y)dy]^2$$

उपर्युक्त व्यंजक को सरल कर ds^2 से भाग देने पर तथा $\frac{dx}{ds} = Cos\theta$; $\frac{dy}{s} = Sin\theta$

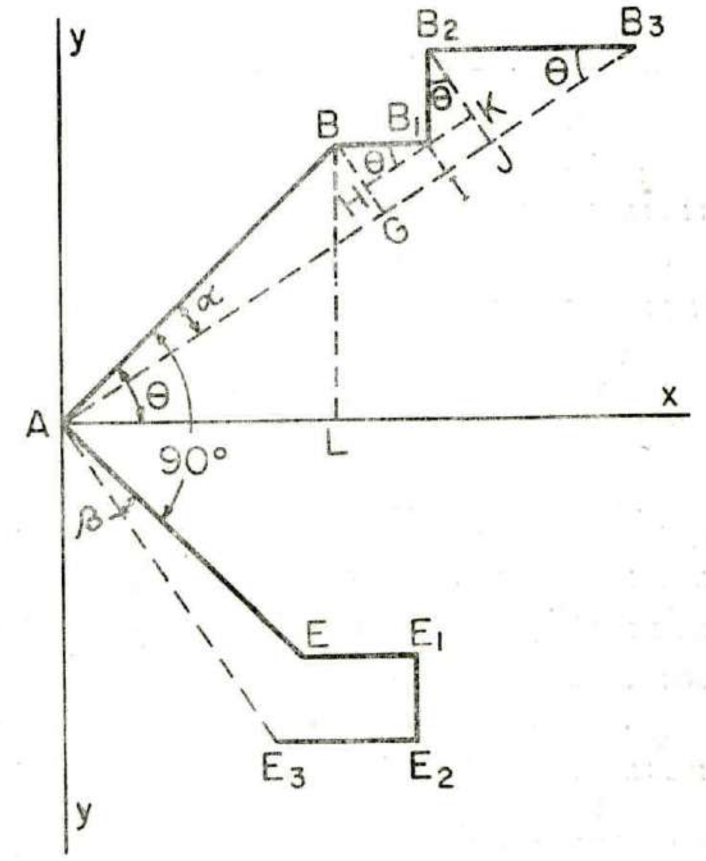
प्रतिस्थापित कर और दो विकृतियों के गुणनफल को नगण्य करने पर निम्नांकित फल प्त होता है।

$$\varepsilon\theta = \varepsilon_x \, \text{Cos}^2\theta + \varepsilon_y \, \text{Sin}^2\theta + \gamma \, \text{Sin}\theta \, \text{Cos}\theta$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2} \, \text{Cos}2\theta + \frac{\gamma}{2} \, \text{Sin}^2\theta \qquad (2.28)$$

(ब) अपरूपण विकृतियाँ :

चूंकि अपरूपण विकृति को दो परस्पर समकोणीय समतलों के कोण में परिवर्तन द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः यहाँ दो बिन्दुओं B तथा E के मध्य सापेक्ष विस्थापन पर ध्यान दिया जायगा । चूंकि चित्र (2.18) में α बहुत छोटा कोण है तथा AB=ds, AL=dx तथा BL=dy.



चित्र 2.18

$$\frac{dx}{ds} = \text{Cos}\theta \qquad \text{तथा} \qquad \frac{dy}{ds} = \text{Sin}\theta$$

$$\alpha = \quad \tan\alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{B_2J - B_2K + BH}{AB}$$

$$= \frac{B_2B_3 \, \text{Sin}\theta - B_1B_2 \, \text{Cos}\theta + B_1B \, \text{Sin}\theta}{AB}$$

$$= \frac{\gamma\,(1+\varepsilon_y)dy \, \text{Sin}\theta - \varepsilon_y dy \, \text{Cos}\theta + \varepsilon_x d_x \, \text{Sin}\theta}{ds}$$

$$= \gamma \, \text{Sin}^2\theta - \varepsilon_y \, \text{Sin}\theta \, \text{Cos}\theta + \varepsilon_x \, d_x \, \text{Sin}\theta \, \text{Cos}\theta$$

$$= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \, \text{Sin}\theta \, \text{Cos}\theta + \gamma \, \text{Sin}^2\theta$$

इसी प्रकार β का मान θ = −(90-θ) उपर्युक्त समीकरण में रखकर ज्ञात किया जा सकता है ।

$$\beta = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \, \text{Sin}\theta \, \text{Cos}\theta + \gamma \, \text{Cos}^2\theta$$

अपरूपण विकृति अर्थात कोण $\overline{EAB}$ में संपूर्ण परिवर्तन

$$\gamma\theta = \beta - \alpha = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \, \text{Sin}2\theta + \gamma \, \text{Cos}2\theta$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{\gamma\theta}{2} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \, \text{Sin}2\theta - \frac{\gamma}{2} \, \text{Cos}2\theta \qquad (2.29)$$

समीकरण (2.28) तथा (2.29) गणितीय रूप से प्रतिबल समीकरणों (2.9) तथा (2.10) के समरूप हैं। अतः प्रतिबल वृत्त के समान ही मोर-विकृति वृत्त सोचा जा सकता है। विकृति वृत्त पर प्रत्येक बिन्दु रेखीय विकृति तथा अपरूपण विकृति के आधे मान को $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ व्यक्त करता है । विकृति वृत्त बनाने की विधि प्रतिबल वृत्त के समान ही होती है ।

मुख्य विकृतियों का मान गणितीय तथा ग्राफीय निधियों से ज्ञात किया जा सकता है तथा ये मुख्य समतलों पर होगी । तदनुरूपी मुख्य विकृति का मान

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} (\varepsilon_y + \varepsilon_x) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\right)^2 \pm \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)} \qquad (2.30)$$

समीकरणों (2.28) तथा (2.29) को विकृति-अंतरण समीकरण कहा जाता है ।

अभ्यास 2.12 : यदि एक विकृत पदार्थ के किसी बिन्दु पर दो मुख्य विकृतियों के मान क्रमश: $+0.0001$ तथा -0.00015 हों तो बीजत: अधिकतम मुख्य विकृति से 30° के कोण पर स्थित समतल पर रेखीय तथा अपरुपण विकृति का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\varepsilon_x = 0{\cdot}0001, \quad \varepsilon_y = 0.00015; \quad \theta = 30^\circ$$

चूंकि कोण विकृति की दिशा से नापा गया है न कि प्रतिबल के समतल से अत: समीकरण (2.28) तथा (2.29) का उपयोग $\varepsilon\theta$ तथा $\gamma\theta$ को प्राप्त करने के लिए क्रमश: किया जायगा । चूंकि कोई अपरुपण विकृति नहीं है अत: $\gamma_{xy} = 0$ रखने पर

$$\varepsilon\theta = \frac{\xi_x + \xi_3}{2} \quad \frac{\xi_x - \xi_y}{2} \text{Cos}^2\theta$$

$$= \frac{0.0001-0.00015}{2} + \frac{0.0001+0.00015}{2} \quad \text{Cos } 60^\circ$$

$$= -0.000025 + 0.0000625$$

$$= +0.0000375$$

$$\gamma\theta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad \text{Sin}2\theta$$

$$= -0.000216$$

यदि इन समीकरणों की तुलना प्रतिबल अंतरण समीकरणों 2.9 तथा 2.10 से की जाय तो स्पष्ट होगा कि विकृति अंतरण समीकरण को प्रतिबल अंतरण समीकरणों में σ को ε से तथा τ को $\frac{\gamma}{2}$ से प्रतिस्थापित कर प्राप्त किया जा सकता है । इसी प्रकार अधिकतम अपरुपण विकृति $\frac{\gamma max}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$ होगी ।

अभ्यास 2.13 : यदि किसी स्थल पर x-दिशा में विकृति 0.0002, y-दिशा में -0.0001 तथा अपरुपण विकृति $+ 0.0002$ हो तो विश्लेषणात्मक विधि से मुख्य विकृतियों का मान ज्ञात कीजिए तथा उनके समतल भी अवस्थापित कीजिए ।

$$\varepsilon_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(0.0002-0.0001) \pm \sqrt{\left(\frac{0.0002+0.0001}{2}\right)^2+\left(\frac{0.0002}{2}\right)^2}$$

$$= 0.00005 \pm 0.00018$$

$$\varepsilon_1 = 0.00023, \ \varepsilon_2 = -0.00013$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0.0002}{0.0003} = 0.667$$

$$2\theta_1 = 33.7^\circ \quad \theta_1 = 16.85^\circ$$

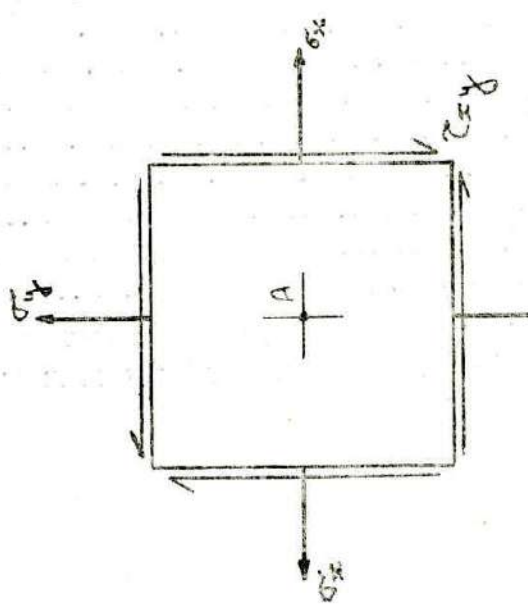
$$\theta_2 = 90+16.85 = 106.85^\circ$$

2.9 किसी बिंदु पर विकृति अवस्था

जैसा कि अनुच्छेद 2.7 में स्पष्ट किया गया है किसी भारित अवयव के बिन्दु विशेष पर विकृति अवस्था उस बिन्दु पर विकृति के उन न्यूनतम घटकों को कहते हैं जिनका ज्ञान होने पर समीकरणों (2.28) तथा (2.29) की सहायता से उस बिन्दु से होकर जाने वाली किसी भी रेखीय अवयव में अभिलंब एवं अपरुपण विकृति सुनिश्चित की जा सके । यदि वांछित बिन्दु पर निर्देशांक अक्ष x तथा y हों तब, σ_x, σ_y तथा τ_{xy} को उस बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था कहा जाता है तथा ε_x, ε_y और γ_{ay} को विकृति अवस्था कहा जाता है ।

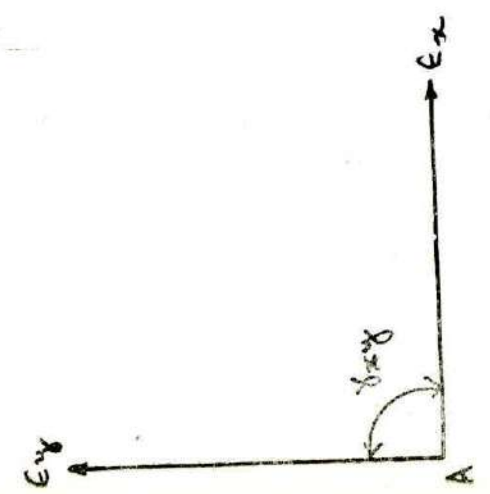
2.10 द्वि-विमीय प्रतिबल एवं विकृति अवस्था

अनुच्छेदों 2.7 तथा 2.9 में क्रमश: द्वि-विमीय प्रतिबल एवं विकृति अवस्थाओं का वर्णन किया गया है । चित्र 2.19 में किसी अवयव के बिन्दु A पर द्वि-विमीय प्रतिबल एवं विकृति अवस्था घटकों को दर्शाता है ।



(अ) प्रतिबल अवस्था

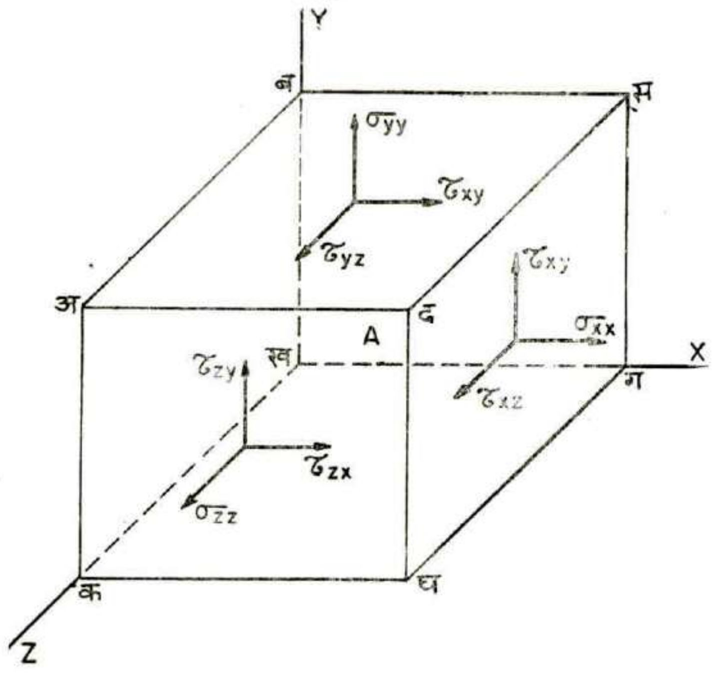
चित्र 2.19 द्विविमीय प्रतिबल एवं विकृति अवस्थायें



(ब) विकृति अवस्था

चित्र 2.19

सामान्यतः यांत्रिक अवयवों पर भारों के कारण उनमें जटिल प्रतिबल अवस्थायें उत्पन्न होती हैं तथा ऐसी दशा में प्रतिबल एवं विकृति विश्लेषण द्विविमीय घटकों द्वारा संभव नहीं हो पाता है; अतः प्रतिबल एवं विकृति के पूर्ण ज्ञान के लिए त्रि-विमीय प्रतिबल घटकों का ज्ञान आवश्यक हो जाता है । द्विविमीय प्रतिबल अवस्था के समान ही जिस बिन्दु पर त्रिविमीय प्रतिबल अवस्था ज्ञात करनी हो उस बिन्दु पर समलंबी निर्देशांक अक्ष सुनिश्चित कर लिए जाते हैं तथा इन अक्षों को एक आयताकार ठोस के सिरों से व्यक्त किया जाता है एव वांछित बिन्दु जिस पर प्रतिबल अवस्था ज्ञात करनी हो उसे इस ठोस के केन्द्रज पर कल्पित किया जाता है । अब इस आयताकार ठोस की परस्पर लंबवत तीन फलकों पर लगने वाले अभिलंब एवं अपरुपण प्रतिबल घटकों को ही त्रिविमीय अवस्था कहा जाता है । चित्र 2.20 म एक आयताकार ठोस अ ब स द-घ क ख ग दिखाया गया है । इस ठोस के फलक सिरे ख-ग, ख-ब, एवं खक क्रमशः x अक्ष, y अक्ष, एवं z अक्ष को दर्शाते हैं । इस ठोस के परस्पर समलंबी



चित्र 2.20 त्रिविमीय प्रतिबल अवस्था

फलकों द स ग घ, द अ ब स, तथा द अ क ध पर क्रमशः प्रतिबल σ_{XX}, τ_{xy}, τ_{Xz}; σ_{yy} τ_{yX}, τ_{yz} तथा σ_{zz}, τ_{zX}, τ_{zy} लग रहे हैं। इसी प्रकार उन फलकों के सम्मुखी फलकों पर वे ही प्रतिबल विपरीत दिशाओं में क्रियाशील होंगे। चित्र के स्पष्टता को ध्यान में रखते हुए इनके सम्मुखी फलकों पर क्रियाशील प्रतिबलों को यहाँ नहीं दिखाया गया है परन्तु वास्तविक अवस्था में वे क्रियाशील होंगे। इन प्रतिबलों से उत्पन्न बलों द्वारा यह आयताकार ठोस साम्यावस्था में बना रहेगा।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि त्रिविमीय प्रतिबल अवस्था यद्यपि तीन अभिलंब प्रतिबल घटकों $\sigma_{XX}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ तथा छः अपरूपण प्रतिबल घटको τ_{Xy}, τ_{yX}, τ_{yz}, $\tau_{zy}, \tau_{zX} = \tau_{Xz}$ द्वारा व्यक्त की जा सकती है परन्तु छः प्रतिबल घटक एक दूसरे से स्वतंत्र नहीं होते एवं उनमे निम्नलिखित संबंध होता है $\tau_{Xy} = \tau_{yX}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zX} = \tau_{Xz}$ अतः त्रिविमीय प्रतिबल अवस्था को निम्नलिखित छः घटकों σ_{XX}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{Xy}, τ_{yz}, τ_{zX} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अभ्यास प्रश्नमाला

1. एक 2cm × 2cm के वर्गाकार परिच्छेद वाले छड़ पर 1000N का अक्षीय तनन बल लगाया गया है। छड़ में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान तथा इस समतल पर अभिलंब प्रतिबल का मान ज्ञात कीजीए। यदि भार 1000N का तनन के स्थान पर संपीडन में हो तब भी इन मानों को ज्ञात कीजिए।

(125 N/cm², 125 N/cm², −125 N/cm² −125 N/cm²)

2. एक विकृत पदार्थ के किसी स्थल पर केवल अपरुपण प्रतिबल क्रियाशील है जिसका मान 200 N/cm² है तो अधिकतम अभिलंब तथा अपरुपण प्रतिबल का मान ज्ञात करो।

(200 N/cm², 200 N/cm²)

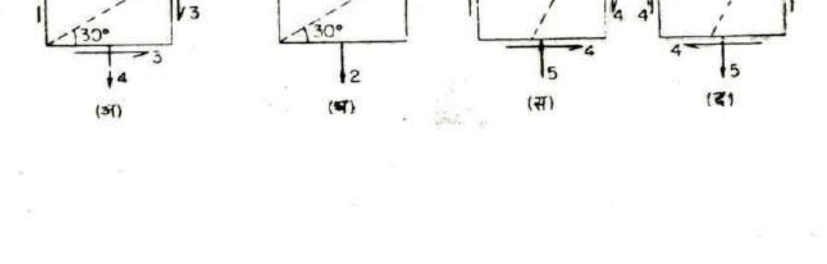
3. दो समकोणिक समतलों पर प्रधान प्रतिबलो का मान 400 N/cm² तनन तथा 200 N/cm² संपीडन है। अधिक मान वाले मुख्य प्रतिबल से 30° के कोण पर स्थित समतल पर अभिलंब, अपरुपण तथा परिणामी प्रतिबल ज्ञात कीजिए। ऐसे प्रतिबल का मान बताए केवल जिसके लगने से इसी के बराबर अधिकतम रेखीय विकृति अत्पन्न हो। $\mu = 0.25$

(−50; 260; 264.7 N/cm²; 450 N/cm²)

4. एक प्रत्यास्थ पदार्थ में किसी स्थलपर दो परस्पर समकोणिक समतलों पर 8 N/mm² तनन तथा 6 N/mm² का संपीडन प्रतिबल लग रहा है। अधिक मान के मुख्य प्रतिबल का मान 101 N/mm² तक सीमित है। तो अभिलंब प्रतिबलों के समतल पर कितना अपरूपण प्रतिबल लगाया जा सकता है तथा उस स्थल पर अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का क्या मान होगा ? दूसरे मुख्य प्रतिबल का भी मान ज्ञात कीजिए। इस अभ्यास को प्रारंभिक नियमों से हल कीजिए।

(लं० वि०) ($4\sqrt{2}$ N/mm², 9 N/mm², 8 N/mm²)

5. चित्र (2.21) में दिखाई गई प्रतिबल अवस्थाओं में अंकित तिर्यक समतलों पर अभिलंब तथा अपरुपण प्रतिबल के मान ज्ञात कीजिए। मुख्य प्रतिबल, अधिकतम अपरुपण प्रतिबल तथा उनके समतलों को भी ज्ञात कीजिए। मोर-वृत्त विधि का प्रयोग कीजिए। सभी प्रतिबल N/mm² में व्यक्त किये गए हैं।



चित्र 2.21

(अ) $4.85;\ 1.53;\ 5.10;\ -4.10;\ 4.6;\ \theta_1 = 20^\circ\ 15'$
$\theta_2 = 110^\circ\ 15'$

(ब) $2.22;\ -0.433, 3, 2, +4.72,\ \theta_1 = 61^\circ,\ \theta_2 = 151^\circ$

(स) $2.21, -0.16, 7.22, -2.22, 4.72, \theta_1 = 61^\circ, \theta_2 = 151^\circ$

(द) $-2.21, 0.16, 7.22, -2.22, 4.72,\ \theta_1 = 61^\circ\ \theta_2 = 151^\circ$

6. एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका कोण C 90° का है । एक प्रत्यास्थ पदार्थ के समतलों को व्यक्त करता है । समतलो AC तथा CB पर C की दिशा में 3 N/mm^2 का अपरुपण बल तथा इन्हीं समतलों पर 5 N/mm^2 एवं 4 N/mm^2 के तनन. अभिलंब प्रतिबल लग रहे हैं । समतलों AC तथा CB के अभिलंब समतलपर कोई प्रतिबल नहीं लग रहा है ।

यदि AB पर परिणामी प्रतिबल का (अ) अधिकतम मान हो (ब) न्यूनतम मान हो (स) AB के अभिलंब घटक अधिकतम हो (द) AB के स्पर्शरेखीय घटक अधिकतम हो (क) AB से न्यूनतम झुकाव हो । प्रत्येक स्थिति में प्रतिबल का मान बताइये । (लं० वि०)

$$\left\{\begin{matrix} \text{(अ) } 7.55\ \text{N/mm}^2,\ \theta = 40^\circ - 15' & \text{(ब) } 1.46\ \text{N/mm}^2,\ \theta = 130^\circ - 15' \\ \text{(स) } 7.55\ \text{N/mm}^2\quad \text{(द) } 3.045\ \text{N/mm}^2 & \text{(क) } 106^\circ - 30' \end{matrix}\right\}$$

7. दो समतल आपस में 60° के कोण पर स्थित हैं । उनमें से एक समतल पर जो ऊर्ध्वाधर है 400 N/mm^2 का संपीडन प्रतिबल तथा नीचे की दिशा में 200 N/mm^2 का अपरुपण प्रतिबल लग रहा है । पहिले समतल के दाहिनी ओर स्थित दूसरे समतल पर एक 100 N/mm^2 का अभिलंब प्रतिबल तथा अपरुपण प्रतिबल लग रहा है । उस अपरुपण प्रतिबल का तथा मुख्य प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये तथा मुख्य समतलों की स्थिति बताइए ।

(488.7 N/mm^2; 540.5 N/mm^2; -442.5 N/mm^2 12° तथा -78°)

8. यदि एक भारित अवयव के किसी बिन्दु पर x अक्ष एवं y अक्ष की दिशा में अभिलंब विकृति क्रमशः -0.1×10^{-3} तथा -0.15×10^{-3} हों तथा उस बिन्दु पर अपरुपण विकृति 0.2×10^{-3} हो तब मोर वृत्त की सहायता से मुख्य विकृति का मान ज्ञात कीजिए ।

$(0.185\times10^{-3};\ -0.135\times10^{-3})$

9—23 M. of HRD/ND/95

अध्याय 3

प्रतिबल—विकृति संबंध

3.1 विषय प्रवेश

पिछले दो अध्यायों में यह स्पष्ट किया गया है कि जब भी किसी अवयव पर भार लगता है, उसमें प्रतिबल एवं विकृति उत्पन्न होते हैं । इनकी मात्रा एवं स्वरुप लगाए गए भार पर निर्भर करती है । हम देख चुके हैं कि भार के कारण अवयव में सामान्यतः अभिलंब एवं अपरुपण प्रतिबल तथा तद्नुरुपी अभिलंब एवं अपरुपण विकृति उत्पन्न होते हैं । किसी भी भारण परिस्थिति के कारण उत्पन्न प्रतिबल एवं विकृति में परस्पर एक सुनिश्चित संबंध होता है । इस अध्याय में इस संबंध का ही विवेचन किया जायेगा । यहाँ यह स्पष्ट करना उचित होगा कि इंजीनियरी उपयोग में आने वाले पदार्थों से बने अवयव प्रायः अपने उपयोगी अवधि में प्रत्यास्थता सीमा तक ही भारित किए जाते हैं । ऐसी दशा में उत्पन्न विकृति का परिमाण अत्यंत न्यून होता है तथा भारित अवस्था में इसको केवल देखकर पता लगाना सामान्यतः संभव नहीं होता है ।

यहाँ यह भी स्पष्ट करना उचित होगा कि अवयव विभंजन की अवस्था प्राप्त करने से पूर्व प्लैस्टिक अवस्था में होता है तथा ऐसी दशा में विकृति का मान न्यून नहीं होता तथा उसको देखकर पता लगाया जा सकता है । अतः प्रतिबल एवं विकृति के मध्य संबंध दर्शानेवाले गणितीय सूत्र प्रत्यास्थता सीमा में तथा प्रत्यास्थता सीमा पार कर प्लैस्टिक सीमा में भिन्न-भिन्न होते हैं । इस अध्याय में हम प्रत्यास्थता सीमा के भीतर की अवस्था में ही प्रतिबल-विकृति संबंधों का विश्लेषण करेंगे ।

3.2 हुक (Hook) का नियम

अधिकांश धात्विक पदार्थों पर जब प्रत्यास्थता सीमा के भीतर भार लगता है, वे विरुपित होते है तथा भार हटा लेने पर अपनी पूर्वावस्था को प्राप्त कर लेते हैं । 1676 ई० में रॉबर्ट हुक ने एक नियम प्रतिपादित किया जिसके द्वारा प्रतिबल एवं विकृति का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है । इस नियम के अनुसार प्रायः सभी पदार्थ, किसी न किसी सीमा के अंतर्गत प्रत्यास्थता का रैखिक नियम पालन करते हैं । हुक ने सन 1678 ई० में अपने नियम की घोषणा इस प्रकार की : किसी भी अवयव

अथवा संचरना के किसी बिन्दु का विस्थापन उस बिन्दु पर अथवा अवयव के किसी अन्य बिन्दु पर लगाये जाने वाले भार के समानुपाती होता है ; मूलतः इसको इस प्रकार भी प्रतिपादित किया जा सकता है : "प्रत्यस्थता सीमा के अंतर्गत, प्रतिबल एवं विकृति समानुपाती होते हैं" ।

गणितीय रूप में इस नियम को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

प्रतिबल $\propto$ विकृति

अथवा

प्रतिबल = (एक अचर राशि) विकृति.... (3.1)

चूंकि विकृति एक विमारहित राशि होती है अतः सूत्र (3.1) में निहित अचर राशि की विमा वही होगी जो प्रतिबल की होती है । जैसा कि अध्याय-1 में स्पष्ट किया गया है । इस अचल राशि को पदार्थ के साधारण तनन परीक्षण द्वारा प्राप्त किया जा सकता है ; अतः अक्षीय तनन भारण की स्थिति में हम समीकरण (3.1) को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

प्रतिबल = $E \times$ विकृति

अथवा

$\sigma_x = E \times \varepsilon_x$ 3.2

उपर्युक्त समीकरण (3.2) में E अचर राशि को व्यक्त करता है तथा E को 'यंग का गुणांक' अथवा 'प्रत्यास्थता गुणांक' कहा जाता है तथा यह पदार्थ की संरचना पर निर्भर करता है ।

समीकरण (3.2) से यह नहीं समझ लेना चाहिए कि हुक का नियम केवल अमिलंब प्रतिबल एवं अमिलंब विकृति पर ही लागू होता है, अपितु अपरुपण प्रतिबल एवं अपरुपण विकृति के संदर्भ में भी यह नियम सत्य होता है ; केवल अचर राशि का मान भिन्न होता है । अतः समीकरण (3.2) को इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है :

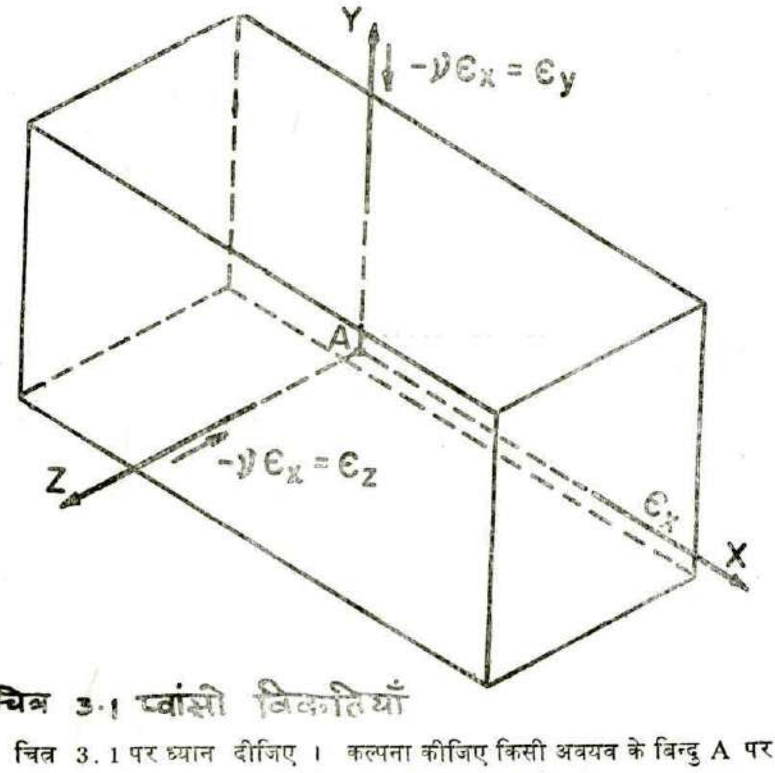
अपरुपण प्रतिबल = (अचर राशि) $\times$ अपरुपण विकृति

अथवा

$\tau = G.\gamma$ ....(3.3)

यहाँ G को "अपरुपण प्रत्यास्थता गुणांक" अथवा "दृढ़ता गुणांक" कहा जाता है एवं इसकी विमा भी प्रतिबल की विमा ही होगी । यहाँ यह स्पष्ट करना उचित होगा कि एक ही पदार्थ के लिए E एवं का मान भिन्न-भिन्न होगा तथा ये पदार्थ की संरचना पर निर्भर करेंगे ।

अध्याय 1 के अनुच्छेद 1.7 में यह स्पष्ट किया गया है कि जब भी किसी अवयव में अभिलम्ब विकृति उत्पन्न होती है तब इस विकृति के लंबवत दिशा में विपरीत स्वरूप वाली एक निश्चित परिमाण की अभिलंब विकृति स्वतः उत्पन्न होती है जो अवयव पदार्थ के प्वांसो (Poisson) अनुपात (ν) पर निर्भर करती है । यहाँ यह स्पष्ट करना उचित होगा की अभिलंब विकृति एवं प्वांसो अनुपात के कारण उत्पन्न अनुप्रस्थ विकृति का बीजीय चिन्ह विलोमी होता है । इस अनुप्रस्थ विकृति को प्वांसो विकृति भी कहा जाता है ।



चित्र 3.1 प्वांसो विकृतियाँ

चित्र 3.1 पर ध्यान दीजिए । कल्पना कीजिए किसी अवयव के बिन्दु A पर X—अक्ष की दिशा में अभिलंब विकृति $+\varepsilon_x$ है अतः उसी बिन्दु पर y— अक्ष तथा Z—अक्ष की दिशा में प्वांसो विकृति ε_y तथा ε_z ऋणात्मक होगी । गणितीय रूप इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ ....(3.4)

यहाँ यह समझा जाना चाहिए कि प्वांसो अनुपात (ν) का मान सदैव धनात्मक ही रहता है तथा इसका मान पदार्थ की संरचना पर निर्भर करता है ।

उपर्युक्त वर्णन के आधार पर हमने प्रतिबल-विकृति संबंधों का वर्णन करते हुए तीन अचर राशियों (स्थिरांकों) का उल्लेख किया है जो निम्नलिखित हैं :

(i) प्रत्यास्थता मापांक (E)

(ii) दृढ़ता मापांक (G)

(iii) प्वांसो अनुपात (ν)

3.3 आयतन-प्रत्यास्थता गुणांक

किसी आयताकार ठोस के सभी पार्श्वों पर समान प्रतिबल क्रियाशील होने पर ठोस के विभाओं में परिवर्तन होगा जिसके कारण उसके आयतन में भी परिवर्तन होगा । आयतन में परिवर्तन के कारण उस ठोस पदार्थ में आयतनिक विकृति होगी । यदि आयतन में परिवर्तन δv हो तथा उस ठोस का मूल आयतन δv हो तब आयतनिक विकृति ε_v को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\varepsilon_v = \frac{\delta v}{V} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5)$$

कल्पना कीजिए कि ठोस की सभी फलकों पर एक समान क्रियाशील प्रतिबल p है जो उसमें उपर्युक्त आयतनिक विकृति ε_v उत्पन्न करता है तब प्रतिबल (p) एवं आयतनिक विकृति ε_v का अनुपात अचर होता है तथा इस प्रकार प्राप्त अचर राशि को उस पदार्थ का आयतन-प्रत्यास्थता गुणांक (K) कहा जाता है । इसको गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$K = \frac{p}{\varepsilon_v} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.6)$$

अतः E, G, ν के अतिरिक्त K चौथे प्रत्यास्थता गुणांक को व्यक्त करता है ।

उपर्युक्त प्रतिबल-विकृति संबंध इस बात पर आधारित है कि पदार्थ समदैशिक एवं समांगी दोनों ही हैं । समदैशिक पदार्थ ऐसे पदार्थ को कहते हैं जिसके गुण-धर्म किसी निश्चित बिन्दु पर सभी दिशाओं में एक समान हों । समांगी पदार्थ ऐसा पदार्थ होता है जिसके गुण-धर्म उसके प्रत्येक बिन्दु पर एक समान हों । ऐसा संभव है कि पदार्थ समांगी होता हुआ भी समदैशिक न हो तथा समदैशिक होते हुए भी समांगी न हो । अतः उपर्युक्त संबंध उसी स्थिति में लागू होंगे जब पदार्थ समांगी एवं समदैशिक दोनों ही हों ।

3.4 अध्यारोपण सिद्धांत

उपर्युक्त प्रतिबल विकृति संबंधों को समदैशिक एवं समांगी पदार्थों के लिए सीमित करने से अन्यथा उत्पन्न होने वाली कई जटिलतायें स्वतः समाप्त हो जाती हैं तथा कई सरल निष्कर्ष प्राप्त हो जाते हैं । उदाहरणस्वरूप हम प्रतिबल को विकृति के रूप में, अथवा उसके विलोम को, निर्देशांक अक्ष के सापेक्षपदार्थ कहीं भी अवस्थित हो, व्यक्त कर सकते हैं । अतः प्रतिबल-विकृति संबंध निर्देशांक अक्षों के रुपांतरण पर निर्भर नहीं करते हैं । जैसा कि अध्याय 2 के अनुच्छेद 2.10 में स्पष्ट किया गया है कि किसी भारित ठोस के एक बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था को सामान्यतः उसके छः घटकों द्वारा तथा उसी बिन्दु पर विकृति अवस्था को विकृति के छः घटकों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है । अतः एक समदैशिक पदार्थ के लिए प्रत्येक विकृति घटक को व्यक्त करने के लिए उसके छः प्रतिबल घटकों से संबंधित करने के लिए छः प्रत्यास्थता गुणांकों को आवश्यकता होगी . । अतः छः विकृति घटकों के लिए कुल 6×6 प्रत्यास्थता गुणांक संपूर्ण प्रतिबल विकृति संबंधों को व्यक्त करने के लिए आवश्यक होंगे। परन्तु यदि पदार्थ को समांगी भी मान लिया जाय तब आवश्यक प्रत्यास्थता गुणांकों की संख्या 36 से घटकर केवल दो ही रह जाती है यद्यपि इस तथ्य को सिद्ध करना प्रस्तावित उद्देश्य से बाहर है तथा यहाँ संभव नहीं है ।

एक स्थूल रूप से हम इसको इस प्रकार समझ सकते हैं । ध्यान रहे कि प्रतिबल एवं विकृति अवस्था को हम मुख्य प्रतिबलों एवं मुख्य विकृतियों से भी व्यक्त कर सकते हैं । ऐसी दशा में प्रतिबल अवस्था के घटक σ_1, σ_2 तथा σ_3 होंगे एवं विकृति अवस्था के घटक क्रमशः ε_1, ε_2 तथा ε_3 होंगे । अब यदि कोई पिंड σ_1, σ_2 एवं σ_3 प्रतिबलों से क्रियाशील हो जो परस्पर समलंबी दिशाओं में लग रहे हों, तब ऐसी कल्पना करना कठिन है कि ये प्रतिबल उन अक्षों के सापेक्ष अपरूपण विकृति को प्रभावित करेंगे । अतः इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि अभिलंब प्रतिबल σ_1, σ_2, σ_3 केवल उन दिशाओं की अभिलंब विकृतियों को ही प्रभावित करेंगे अर्थात मुख्य प्रतिबल अक्ष एवं मुख्य विकृति अक्ष समेखी होंगे । इससे यह सिद्ध होता है कि प्रत्यस्थ तंत्रों में प्रतिबल तथा विकृति का अध्यारोपण संभव है अर्थातः प्रतिबल σ_1 अपनी दिशा में विकृति $\frac{\sigma_1}{E}$ उत्पन्न करेगा तथा σ_2 एवं σ_3 की दिशा में विकृतियों $\frac{\nu\sigma_1}{E}$ को उत्पन्न करेगा ।

इसी प्रकार,

प्रतिबल σ_2 अपनी दिशा में विकृति $\frac{\sigma_2}{E}$ तथा σ_3 and σ_1 की दिशा में $-\frac{\nu\sigma_2}{E}$ विकृति उत्पन्न करेगा, एवं प्रतिबल σ_3 अपनी दिशा में विकृति $\frac{\sigma_3}{E}$ तथा σ_1 और σ_2 की दिशा में $\frac{-\nu\sigma_3}{E}$ विकृति उत्पन्न करेगा ।

अतः $\vec{\sigma_1}$ की दिशा में उत्पन्न कुल विकृति ε_1 को तीनों प्रतिबलों से रैखिक संबंधों को द्वारा प्राप्त विकृतियों को अध्यारोपित करके प्राप्त किया जा सकता है । गणितीय रूप में इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma +_1 \sigma_2)\right]$$

उपर्युक्त संबंधों को अध्यारोपण सिद्धांत द्वारा ही प्राप्त किया गया है । अतः इस सिद्धांत के द्वारा तीनों मुख्य विकृतियों को ज्ञात करने के लिए किसी एक मुख्य विकृति की दिशा में तीनों प्रतिबलों द्वारा उत्पन्न विकृतियों के बीजगणितीय योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है । यहाँ यह स्मरणीय है कि इस सिद्धांत द्वारा न केवल विकृति अवस्था किसी निश्चित बिन्दु पर ज्ञात की जा सकती है, अपितु प्रतिबल एवं विकृति के संपूर्ण अवयव अथवा पिंड में बंटन के लिए भी लागू किया जा सकता है ।

यदि पदार्थ प्रत्येक बिन्दु पर प्रत्यास्थता सीमा में हो, हम प्रतिबल एवं विकृति के बंटन को किसी एक भार समुच्चय के कारण प्राप्त राशियों को किसी दूसरे भार समुच्चय के कारण प्राप्त समरूपी राशियों के योगफल द्वारा प्राप्त कर सकते हैं । ऐसा करते समय यह कल्पना की जाती है कि एक समय में केवल एक ही भार समुच्चय क्रियाशील है जब कि वास्तविक अवस्था में दोनों ही भार समुच्चय अवयव पर एक साथ ही लगे होते हैं । अतः इस अध्यारोपण सिद्धांत की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है :

"यदि किसी पिंड पर दो या अधिक प्रतिबल परस्पर समलंबी दिशा में क्रियाशील हों तो उनमें से किसी एक प्रतिबल द्वारा उत्पन्न विकृति अन्य प्रतिबलों की उपस्थिति से प्रभावित नहीं होती है ।"

उपर्युक्त वर्णन से यह भी निष्कर्ष निकलता है कि अभिलंब प्रतिबल अपरूपण विकृति को एवं अपरूपण प्रतिबल अभिलंब विकृति को नहीं प्रभावित करते हैं ।

3.5 प्रत्यास्थ गुणांकों में परस्पर संबंध

अनुच्छेदों 3.2 तथा 3.3 में देखा गया है कि प्रतिबल एवं विकृति के परस्पर संबंध को चार प्रत्यास्थ गुणांको E, G, ν तथा K द्वारा व्यक्त किया जा सकता है तथा ये चारों गुणांक पदार्थ के अभिलक्षण एवं उसकी संरचना पर निर्भर करते हैं । ऐसा पाया गया है कि ये चार ही स्वतंत्र नहीं होते, इनमें से केवल दो ही स्वतंत्र होते हैं तथा किन्हीं दो का मान ज्ञात होने पर तीसरे तथा चौथे का मान ज्ञात किया जा सकता है । अब हम इन चारों गुणांकों के मध्य परस्पर संबंध स्पष्ट करेंगे :

समीकरण 2.18 से हम जानते हैं कि

$$\gamma_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

जहाँ σ_1, σ_2 तथा σ_3 मुख्य प्रतिबल हैं तथा τ_{max} उस बिन्दु पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल को व्यक्त करता है । यहाँ यह माना गया है कि $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ तथा हम यह भी देख चुके हैं कि :

$$\frac{\tau_{max}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}$$

समीकरण 3.3 तथा 3.6 का प्रयोग करते हुए हम उपर्युक्त संबंध को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{\tau_{max}}{2G} = \frac{1}{2E}\left[\left\{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right\} - \left\{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1 - \sigma_3) - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 - \nu\sigma_3 + \nu\sigma_1 + \nu\sigma_2\right]$$

$$= \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1 - \sigma_3) + \nu\sigma_1 - \sigma_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2E} \quad (\sigma_1 - \sigma_3)(1+\nu) = \frac{2\,\tau_{max}\,(1+\nu)}{2E}$$

अथवा $E = 2G(1+\nu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.7)$

अब आयतन प्रत्यास्थ गुणांक पर ध्यान देते हुए मान लीजिए कि एक आयतफलक ठोस के सिरों की विभायें अर्थात लंबाई, चौड़ाई एवं मोटाई क्रमशः l, b तथा d हैं । इसके सभी फलकों पर मान लीजिए एक समान अभिलंब प्रतिबल σ लग रहा है । यदि आयतफलक की विमाओं में परिवर्तन δl, δb तथा δd हो तब :

आयत का मूल आयतन $V = l.\,b.\,d.$

आयतन में प्रतिबल के कारण परिवर्तन $= \delta V$

$$\delta V = (l+\delta l)\,(b+\delta b)\,(d+\delta d) - l.\,b.\,d.$$

$$= l.\,b.\,\delta d. + l.\,d.\,\delta b. + b.\,d.\,\delta l.$$

यहाँ किन्हीं दो छोटी राशियों (δl, δb, δd) के गुणन फल को नगण्य माना गया है ।

$$\text{अतः आयतन विकृति} = \frac{\delta V}{V} = \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta l}{l} \quad \ldots.(3.8)$$

अब आयत फलक की किसी एक भुजा की दिशा में प्राप्त विकृति :

$$= \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu\sigma}{E} - \frac{\nu\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu) = \frac{\delta l}{l} = \frac{\delta b}{b} = \frac{\delta d}{d}$$

$$\therefore \frac{\delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\nu) \quad \ldots \quad (3.9)$$

$$\text{परन्तु} \quad K = \frac{\sigma}{\frac{\delta V}{V}}$$

$$\therefore E = 3K\,(1-2\nu) \quad \ldots \quad (3.10)$$

समीकरण (3.7) से ν का मान (3.10) में रखने पर :

$$\frac{E}{2G} - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{3K}\right)$$

$$E = \frac{9GK}{3K+G} \quad \ldots \quad (3.11)$$

अतः समीकरण (3.7), (3.10) तथा (3.11) से हम देखते हैं कि केवल 2 ही प्रत्यास्थ गुणांक स्वतंत्र हैं एवं ये समीकरण चारों प्रत्यास्थ गुणांकों के परस्पर संबंधों को भी स्पष्ट करते हैं ।

3.6 सतह प्रतिबल एवं सतह विकृति

अनुच्छेद 2.10 में यह दिखाया गया है कि व्यापक भारण स्थितियों में किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था को 6 प्रतिबल घटकों $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है तथा इसी प्रकार उस बिन्दु पर विकृति अवस्था को भी तद्नुरूपी 6 विकृति घटकों $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है । विकल्पतः प्रतिबल एवं विकृति अवस्था को मुख्य प्रतिबल σ_1, σ_2 तथा σ_3 एवं मुख्य विकृति $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ तथा ε_3 द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है । इसी प्रकार समीकरणों (3.3) तथा (3.6) द्वारा हम त्रिविमीय प्रतिबल एवं विकृति में परस्पर संबंध को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं ।

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z+\sigma_x)\right]\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(3.12)$$

समीकरण (3.12) को हम इस प्रकार भी लिख सकते है :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu(\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]\\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y+\nu(\varepsilon_z+\varepsilon_x)\right]\\
\sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z+\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right]\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}\\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}\\
\tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}\quad\left\{\text{चूंकि } G=\frac{E}{2(1+\nu)}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(3.13)$$

समीकरण (3.12) एवं (3.13) दोनों ही प्रतिबल एवं विकृति संबंधों को व्यक्त करते हैं तथा आवश्यकतानुसार दोनों में से किसी का भी उपयोग किया जा सकता है । यदि प्रतिबल अवस्थायें तथा विकृति अवस्थायें मुख्य प्रतिबल एवं मुख्य विकृतियों के रूप में ज्ञात हों तब उपर्युक्त समीकरणों में

$$\sigma_x=\sigma_1,\ \sigma_y=\sigma_2\ \sigma_z=\sigma_3,\ \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

एवं $\varepsilon_x=\varepsilon_1,\ \varepsilon_y=\varepsilon_2\ \varepsilon_z=\varepsilon_3,\ \gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$

प्रतिस्थापित कर के प्राप्त किया जा सकता है एवं तब हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)\right]\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2-\nu(\sigma_1+\sigma_3)\right]\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[(\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)\right]
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(3.14)$$

अथवा

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\ \varepsilon_1+\nu(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\right]\\
\sigma_2 &= \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\ \varepsilon_2+\nu(\varepsilon_1\varepsilon_3)\right]\\
\sigma_3 &= \frac{E}{(1+\gamma)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\ \varepsilon_3+\nu(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]
\end{aligned}\right\}\ldots.(3.15)$$

उपर्युक्त संबंध व्यापक स्थितियों के संदर्भ में उपयोगी होते हैं परंतु इंजीनियरी अनुप्रयोगों में अधिकांश परिस्थितियों में द्विविमीय अवस्था यें विद्यमान होती हैं, इनको सतह प्रतिबल एवं सतह विकृति अवस्था कहा जाता है । यहाँ सतह शब्द का विशेष महत्व है क्योंकि क्रियाशील प्रतिबल अथवा क्रियाशील विकृति एक ही समतल में होती हैं उदाहरणतः सतह प्रतिबल अवस्था को x–y–z अक्षों के सापेक्ष प्रतिबल घटकों को व्यक्त करते हुए यों व्यक्त किया जा सकता है :

सतह प्रतिबल अवस्थायें :

$\sigma_x,\quad \sigma_y,\quad \tau_{xy}$ (समतल x–y में)

$\sigma_y,\quad \sigma_z,\quad \tau_{yz}$ (समतल y–z में)

$\sigma_x,\quad \sigma_z,\quad \tau_{xz}$ (समतल x–z में)

इसी प्रकार विकृति अवस्थाओं को भी σ के स्थान पर ε तथा τ के स्थान पर γ लिख कर व्यक्त किया जा सकता है । अतः यदि हम समतल x–y पर ध्यान देते हुए प्रतिबल अवस्था $\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}$ को ले तब यह सतह प्रतिबल अवस्था व्यक्त करेगी । अब यदि हम समीकरण (3.12) की सहायता से सतह प्रतिबल अवस्था हेतु प्रतिबल विकृति संबंध लिखना चाहें तब $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ करने पर, हमें प्राप्त होगा :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_x)\\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\\
\gamma_{xz} &= \gamma_{xz}=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(3.16)$$

इसी प्रकार (3.13) को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है ; यदि $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ कर दिया जाय तब

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)} \left[(1-\nu)\ v_x + \nu\varepsilon_y \right] \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)} \left[(1-\nu)\ \varepsilon_y + \nu\varepsilon_x \right] \\
\sigma_r &= \frac{E\gamma\ (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{(1+\nu)\ (1-2\nu)} \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2\ \ (1+\nu)}\ \gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (3.17)$$

समीकरणों (3.16) एवं (3.17) पर ध्यान देने से स्पष्ट हो जाता है कि साधारणतया सतह प्रतिबल अवस्था के कारण सतह विकृति अवस्था नहीं होती है ।

इसी प्रकार सतह विकृति अवस्था सतह प्रतिबल अवस्था नहीं उत्पन्न करती है । इस प्रकार समीकरण (3.16) तथा (3.17) क्रमशः सतह प्रतिबल एवं विकृति संबंधों तथा सतह विकृति एवं प्रबितल संबंधों को दर्शाते हैं ।

प्रतिबल अवस्था द्वि-विमीय (सतह प्रतिबल) अथवा त्रिविमीय है उसके अनुरूप ही प्रतिबल विकृति संबंधों को व्यक्त किया जाता है ।

यदि हम समीकरण (3.16) पर ध्यान दें तथा किसी ज्ञात सतह प्रतिबल अवस्था का मान इसमें रखने पर यदि $\varepsilon_z = 0$ हो जाय तब एक विशेष परिस्थिति प्राप्त होगी एवं उस दशा में सतह प्रतिबल अवस्था एवं सतह विकृति अवस्था दोनों साथ साथ विद्यमान होंगी एवं उस दशा में हम समीकरण (3.16) को निम्नलिखित विधि से भी लिख सकते हैं :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\ (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\ (\varepsilon_y + \nu\ (\varepsilon_x) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\ \gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \quad .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (3.18)$$

उदाहरण 3.1 : एक 100 mm लंबी तथा 50 mm भुजा वाली वर्गाकार परिच्छेद की छड़ पर उसके अक्ष की दिशा में 10 KN का संपीडन भार लगाया गया है यदि E = 200 GPa तथा = ν 0.25 हो तब छड में हुए आयतन परिवर्तन का मान निकालिए, यदि सभी अनुप्रस्थ विकृतियों को छड की फलक पर एक समान संपीडन प्रतिबल लगाकर शून्य कर दिया जाय तो ऐसे संपीडन प्रतिबल का मान बताइये तथा इस स्थिति में आयतन परिवर्तन ज्ञात कीजिए, छड के पदार्थ के लिए G तथा K का मान भी ज्ञात कीजिए ।

हल :

छड़ का आयतन $v = 100 \times 50 \times 50 = 25 \times 10^4\ mm^3$

अक्षीय प्रतिबल $= \dfrac{10 \times 10^3}{50 \times 50} = -4\ N/mm^2$ (—मान संपीडन के कारण)

अक्षीय विकृति $\dfrac{4}{200 \times 10^3} = -\ 2 \times 10^{-5}$

प्रत्येक अनुप्रस्थ दिशा में विकृति $= -\nu \times (-\ 2 \times 10^{-5})$
$= 0.25 \times 2 \times 10^{-5}$
$= 0.5 \times 10^{-5}$

आयतनी विकृति $= \dfrac{\delta v}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$
$= -\ 2 \times 10^{-5} + 2 \times 0{\cdot}5 \times 10^{-5}$
$= -\ 1 \times 10^{-5}$

आयतन में परिवर्तन $= \delta v = v \times (-1 \times 10-5)$
$= -\ 25 \times 10^4 \times 10^{-5}$
$= \underline{-\ 2.5\ mm^3}$

(ऋण चिन्ह आयतन में कमी को दर्शाता है)

मान लीजिए अनुप्रस्थ विकृति को समाप्त करने के लिए दाब का मान P आवश्यक होगा ।

अतः इस दाब के कारण उत्पन्न P की दिशा में विकृति $= \dfrac{P}{E} - \dfrac{\nu P}{E}$

यह विकृति अनुप्रस्थ विकृति के मान के बराबर होनी चाहिए :

$$\text{अतः} \quad \frac{P}{E} - \frac{0.25\times P}{E} = 0.5\times10^{-5}$$

$$0.75\ P = 0.5\times10^{-5} \times 200\times10^{3}$$

$$P = 1.33\ N/mm^2$$

$$\text{or} \quad P = 1.33\ MPa$$

उपर्युक्त दाब लगने पर दोनों अनुप्रस्थ विकृतियों का मान शून्य हो जायेगा तथा केवल अक्षीय विकृति ही रहेगी ।

$$\text{कुल अक्षीय विकृति} = -2\times10^{-5} - \left(\frac{-2\,P\,\nu}{E}\right)$$

$$= -2\times10^{-5} + \frac{2\times0.25\times1.33\times10^{6}}{200\times10^{9}}$$

$$= -2\times10^{-5}+0.33\times10^{-5}$$

$$= -1.67\times10^{-5}$$

अतः आयतन परिवर्तन $= E\nu\times\nu$

चूंकि दोनों अनुप्रस्थ विकृतियां शून्य है

अतः $\varepsilon_v = -1.67\times10^{-5}$ होगी

अतः आयतन में परिवर्तन $S\nu = \varepsilon\nu\times\nu$

$= -1.67\times10^{-5}\times25\times10^{4}$

$= -4.175\ mm^3$

अतः आयतन में इस प्रकार $4.175mm^3$ की कमी होगी ।

$$\text{चूंकि} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200\times10^{9}}{2\times1.25}$$

$$80\times10^{9} = 80GPa$$

अतः $G = 80GPa$

चूंकि समीकरण (3.10) से

$$E = 3K\ (1-2\nu)$$

$$\text{अतः} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{200\times10^{9}}{3(1-0.5)}$$

$$K = 133.3\,GPa$$

उदाहरण 3.2 : एक बेलनाकार छड़ में, जिसकी लंबाई l तथा व्यास d है आयतनी विकृति हेतु व्यंजक प्राप्त कीजिए ।

एक बेलनाकार छड़ पर जिसका व्यास 50mm है $400N/mm^2$ का अक्षीय तनन प्रतिबल लग रहा है । डायल प्रमाणी द्वारा इसकी 200 मि०मी० के प्रमापी लंबाई पर नापी गई दैर्ध्यवृद्धि 0.3 मि मी है तथा उसके व्यास में 0.02 मिमी की कमी होती है । पदार्थ के प्रत्यास्थ गुणांक E, G तथा ν ज्ञात कीजिए

हल :

छड़ का आयतन $= \pi/_4\ d^2 l$

यदि छड़ पर प्रतिबल लगने के बाद l का मान $(l+\delta l)$ तथा δ का मान $(d+\delta d)$ हो जाता है तब छड़ में आयतन परिवर्तन $\delta v=\pi/_4(d+\delta d)^2\ (l+\delta l) -\pi/_4 d^2$

दो छोटी राशियों की उच्च घातों एवं गुणनफल को नगण्य मानते हुए :

$$\delta v = \pi/_4(d^2.\delta l + 2d.l.\delta d)$$

$$\text{आयतनिक विकृति} = \frac{\delta l}{d} + \frac{2\delta d}{d}$$

उपर्युक्त परिणाम $v = \pi/_4 d^2 l$ के अवकलन द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है ।

$$\text{छड़ में अनुदैर्ध्य विकृति} \quad \varepsilon_x = \frac{\delta l}{l} = \frac{0.3}{200}$$

$$\text{अनुप्रस्थ विकृति} \quad \varepsilon y = \frac{\delta d}{d} = \frac{0.02}{50}$$

$$\text{प्वासों अनुपात}\ (\nu) = \frac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{Gy}{Gx}$$

$$\nu = \frac{0.02\times200}{0.3\times50} = 0.267$$

छड़ में प्रतिबल $\sigma = 400\ N/mm^2$

$$\therefore \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_x} = \frac{400\times200}{0.3} = 2.67\ 10^5N/mm^2$$

अथवा $E = 267\ GP_a$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{267 \times 10}{2(1+0.267)} = 105.36\text{GPa}$$

उदाहरण 3.3 : एक भारित अवयव सतह प्रतिबल एवं विकृति अवस्था को व्यक्त करता है । यदि मुख्य विकृतियों का मान क्रमशः 0.003 तथा 0.001 हो तो मुख्य प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए पदार्थ के लिए E का मान 200GPa तथा $\nu = 0.3$ है ।

हल :

उपर्युक्त अवस्था के लिए प्रतिबल विकृति संबंधों द्वारा :

$$\sigma_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ \varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 \right\}$$

$$\text{एवं } \sigma_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ \varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 \right\}$$

$$\text{अतः } \sigma_1 = \frac{200 \times 10^9}{(1-0.3^2)} \left\{ 0.003 + 0.3 \times 0.001 \right\}$$

$$= 725\text{MPa}$$

$$\text{और } \sigma_2 = \frac{200 \times 10^9}{0.91} (0.001 + 0.3 \times 0.003)$$

$$= 417.6\text{MPa}$$

अभ्यास प्रश्नमाला

1. एक वर्गाकार परिच्छेद वाली छड़ का, जिसके एक अनुप्रस्थ फलकों पर 1000 N/cm² का दाब लग रहा है, तनन परीक्षण किया गया है । जब छड़ में तनन प्रतिबल 3000 N/cm² है, छड़ का विभंग एक तिर्यक समतल से होता है । पदार्थ की अपरुपण सामर्थ्य तथा विभंजन समतल की अवस्थिति बताइये तथा उत्पन्न मुख्य विकृति का भी मान बताइये । छड़ के दूसरे अनुप्रस्थ फलकों पर दाब नहीं लग रहा है तथा छड़ पदार्थ के E तथा ν का मान क्रमशः 200GPa तथा 0.3 है ।

(2000N/cm²; 45°; $16.5 \times_{10}{-5}$; $-9.5 \times_{10}{-5}$)

10—23 M. of HRD/ND/95

2. दो समलंबी समतलों पर मुख्य प्रतिबल क्रमशः 4000 N/cm² तथा −2000 N/cm² हैं । अधिक मान वाले मुख्य प्रतिबल की दिशा से 30° के कोण पर स्थित समतल पर, अभिलंब, अपरुपण तथा परिणामी प्रतिबल ज्ञात कीजिए । ऐसे प्रतिबल का मान भी बताइये जिसके मात्र लगने से उपर्युक्त दशा में प्राप्त अधिकतम अभिलंब विकृति के बराबर ही विकृति उत्पन्न हो । E = 200GPa तथा $\nu = 0.25$

(−500; 2647 N/cm²; 4500 N/cm²)

3. एक 50mm × 50 mm परिच्छेद के छड़ पर 50kN का अक्षीय संपीडन बल लगाया गया है । 200mm की प्रमापी लंबाई का संकुचन 0.55mm प्राप्त होता है तथा मोटाई में 0.045mm की वृद्धि होती है; छड़ का यंग्स गुणांक तथा प्वांसो अनुपात ज्ञात कीजिए ।

उपर्युक्त भार के अतिरिक्त यदि छड़ के अनुप्रस्थ पार्श्वों पर 60 N/mm² का दाब भी लगा दिया जाय, तब 200mm की प्रमापी लंबाई में संकुचन तथा मोटाई में वृद्धि ज्ञात कीजिए ।

(7280kN/cm², 0.327, 0.41mm तथा 0.0794mm)

4. 10mm व्यास तथा 150mm लंबाई के मृदु इस्पात की एक छड़ पर 200kN का संपीडन बल लगाया गया है । इस छड़ पर लगाये जाने वाले अनुप्रस्थ दाब का मान ज्ञात कीजिए जिससे आधी अनुप्रस्थ विकृति कम की जा सके । यदि E = 200GPa तथा $\nu = 0.3$ हो तब छड़ की लंबाई में परिवर्तन को ज्ञात कीजिए ।

(2180N/cm²; 0.067mm)

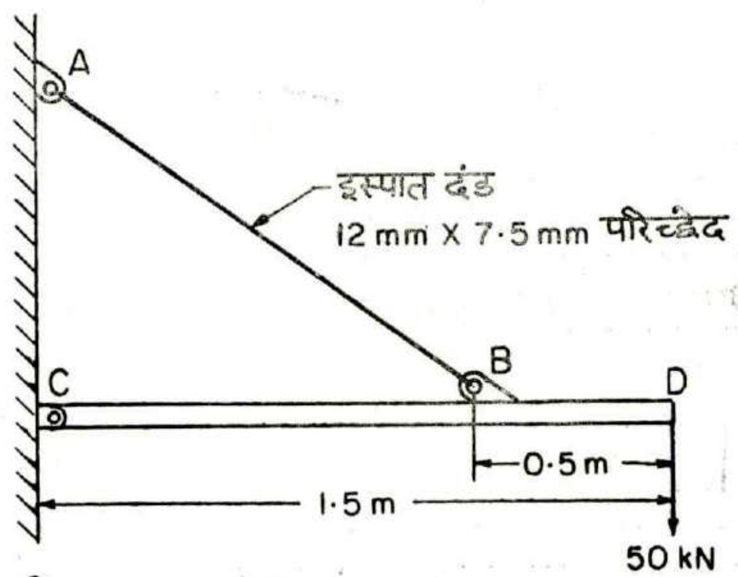
5. एक दंड CD बिन्दु C पर कब्जा युक्त है तथा चित्र (3.2) में दिखाये भाँति भार लगाया गया है । भारण से पहले दंड क्षैतिज अवस्था में है :

(अ) दंड AB में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए

(ब) AB में संपूर्ण दैर्ध्यवृद्धि बताइये

(स) दंड के परिच्छेद की छोटी भुजाओं की लंबाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिए दंड में बंकन एवं भार को नगण्य मानिये ।

मान लिजिए $E = 200\ GP_a$, $\nu = 0{\cdot}3$



चित्र 3·2

6. यदि ε_1 तथा ε_2 किसी समदैशिक एवं समांगी पदार्थ के किसी बिन्दु पर मुख्य विकृतियों को व्यक्त करते हैं तो सिद्ध कीजिए ।

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\tau}{G}$$

अध्याय 4

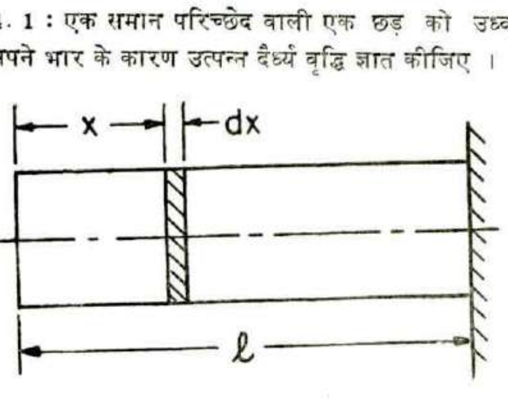
एकल दिश-प्रतिबल अवस्था वाले अवयव

4.1 विषय प्रवेश

पिछले अध्यायों में प्रतिबल, विकृति एवं उनमें परस्पर संबंधों का वर्णन किया गया है । इस अध्याय में हम ऐसे अवयवों का विश्लेषण करेंगे जो इस प्रकार भारित होते हैं कि उनमें एकलदिश-प्रतिबल अवस्था होती है । इंजीनियरी अनुप्रयोगों में यह सबसे सरल परिस्थिति होती है तथा सामान्यतः आधुनिक मशीनी अवयव जटिल भारण परिस्थितियों में होते हैं तथा उनके कारण प्रतिबल अवस्था त्रिविमीय अथवा द्वि-विमीय होती है । तथापि एकल दिश प्रतिबल अवस्था वाले अवयव का विश्लेषण भी महत्वपूर्ण होता है ।

सामान्य रूप से प्रयुक्त अवयवों में दो या एक सममिति-अक्ष विद्यमान होती है । यदि अवयव पर लगने वाला भार किसी एक सममित-अक्ष से संरेखी हो तब उसके कारण अवयव में एकलदिश प्रतिबल अवस्था उत्पन्न होगी । ऐसे अवयवों में या तो संपीडन बल लगते हैं अथवा तनन बल लगते हैं । ऐसे मशीनी अवयव जो यंत्र संरचना में इस प्रकार संयुक्त होते हैं कि उनके सिरे कब्जेदार हों तब वे केवल अक्षीय भार ही वहन कर सकने योग्य होते हैं तथा उनमें प्रतिबल अवस्था एकलदिश होती है । ऐसे अवयव अंतर्दहन इंजनों के संयोजी दंड अथवा भवनों की छतों तथा इस्पात के पुलों में प्रयुक्त कैंचियों में पाए जाते हैं ।

उदाहरण 4.1 : एक समान परिच्छेद वाली एक छड़ को उर्ध्वाधर लटकाया गया है छड़ में अपने भार के कारण उत्पन्न दैर्ध्य वृद्धि ज्ञात कीजिए ।



चित्र 4.1

हल : मान लीजिए चित्र में दिखाई गई छड़ की अनुप्रस्थ काट A तथा छड़ पदार्थ के प्रतिघन इकाई का भार ω है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि प्रत्येक परिच्छेद पर लगने वाला भार उस परिच्छेद के नीचे छड़ का भार है। यह ऊपरी परिच्छेद पर अधिकतम तथा सबसे निचले परिच्छेद पर शून्य होगा।

छड़ के एक सूक्ष्म भाग की कल्पना कीजिए जो निचले सिरे से x दूरी पर है तथा उसकी लंबाई dx है। अतः छड़ के इस सूक्ष्म भाग पर लगने वाला भार ω, A, x होगा। चूंकि dx का मान अत्यंत न्यून है, अतः इस लंबाई में उसके परिच्छेद पर प्रतिबल एक समान माना गया है। यदि छड़ पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक E है—

इस सूक्ष्म भाग में उत्पन्न विकृति $= \dfrac{\omega A x}{AE}$

छड़ के इस dx लंबाई वाले भाग में दैर्ध्यवृद्धि $= \dfrac{\omega A x}{AE}\, dx$

अतः संपूर्ण दैर्ध्य वृद्धि $\displaystyle\int_0^l = \frac{\omega x}{E}\, dx$

$$= \frac{\omega l^2}{2E} = \frac{\omega A l . l}{2AE}$$

$$\text{संपूर्ण दैर्ध्यवृद्धि} = \frac{\omega l}{2AE} \qquad (4.1)$$

यहाँ ω. A. l = ω छड़ के संपूर्ण भार को व्यक्त करता है। अतः स्पष्ट है कि इस दशा में छड़ में उत्पन्न संपूर्ण दैर्ध्यवृद्धि उतनी हैं जितनी छड़ के आधे भार को उसके मुक्त सिरे से लटकाने पर प्राप्त होगी। अतः यदि किसी एक समान परिच्छेद की छड़ में अपने भार के कारण उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात करना हो तब यह माना जा सकता है कि छड़ स्वयं भार हीन है तथा उसके मुक्त सिरे पर उसके आधे भार के बराबर एक बल लगाया गया है।

उदाहरण 4.2 : एक ढलवाँ लोहे का स्तंभ 200mm बाह्य व्यास तथा 25 mm मोटी दीवार वाला तथा 3m लंबा है। स्तंभ का परिच्छेद एक समान है तथा इसके ऊपरी सिरे पर 50kN का अक्षीय भार लगाया गया हैं। स्तंभ के जड भार को भी सम्मिलित करते हुए, ज्ञात कीजिए कि स्तंभ में किस परिच्छेद पर उत्पन्न प्रतिबल अधिकतम होगा तथा उसका मान भी बताइये। ढलवाँ लोहे का घनत्व 7200kg/m^3 मान लीजिए।

हल : यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि स्तंभ के किसी भी परिच्छेद पर क्रियाशील भार का मान = 50kN + उस परिच्छेद से स्तंभ के ऊपरी भाग का जड़ भार। अतः स्पष्ट है स्तंभ के सबसे निचले सिरे पर अधिकतम भार क्रियाशील होगा।

स्तंभ का जड़ भार $= \pi/_4 (0.2^2 - 0.15^2) \times 3 \times 7200 \times 9.81$
$= 2.91\text{kN}$

अतः तली परिच्छेद पर लगने वाला कुल भार
$= 50 + 2.91$
$= 52.91$ kN

अतः तली परिच्छेद पर

$$\text{प्रतिबल} = \frac{52.91 \times 10^3}{\pi/_4(0.2^2 - 0.15^2)} = 3.85\text{MPa}$$

उदाहरण 4.3 : एक प्रिज्मीय इस्पात की छड़ जो 3m लंबी है अर्ध्वाधर लटकाई गई है इसके नीचे वाले सिरे पर 100kN का भार लगाया गया है यदि छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल 70N/mm^2 तक सीमित हो तथा इस्पात का घनत्व 7500 kg/m^3 हो तब छड़ की अनुप्रस्थ काट एवं उसमें उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि का मान बताइये। E = 200 GPa

हल :

छड़ के ऊपरी परिच्छेद पर

$$\text{क्रियाशील भार} = 100 + \frac{A \times 3 \times 7500 \times 9.81}{1000}$$
$$= 100 + 220.73A$$

$$\text{छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल} = 70 \times 10^6 = \frac{(100 + 220.73A) \times 10^3}{A}$$

अतः $A = 14.3\text{cm}^2$

अतः छड का भार $= 220.73 \times 14.3 \times 10^{-4} \times 10^3\text{N}$
$= 0.315\text{kN}$ अतः दैर्ध्यवृद्धि हेतु इसका आधा भार नीचे वाले भार में जोड़ना चाहिए

$$\text{अतः संपूर्ण दैर्ध्यवृद्धि} = \frac{(100 + 0.315 \times 0.5) \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 14.3 \times 10^{-4}} \times 3.10^3$$

$$\delta = 10.5\text{mm}$$

उदाहरण 4.4 : एक केबिल जिसकी अनुप्रस्थ काट 2cm^2 हैं एक मिट्टी के ढेर के गिर जाने के कारण 50m लंबाई तक दब गई है। केबिल के चारों ओर की मिट्टी 200N/m का गति प्रतिरोध उत्पन्न करती है। यदि केबिल को खींच कर बाहर निकाला जाय तो उसमें अधिकतम प्रतिबल का मान तथा दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिए। केबिल पदार्थ के लिए $E = 20 \times 10^5\text{N/cm}^2$

हल :

दबे हुए सुदूरवर्ती सिरे से नापी गई xcm दूरी पर dx लंबे भाग की कल्पना कीजिए इस छोटी सी लम्बाई में अक्षीय प्रतिबल का मान इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है–

$$\sigma_x = \frac{2x}{2} \ \mathrm{N/cm^2}$$

$$\text{लंबाई में दैर्घ्यवृद्धि} = \frac{x}{20\times10^5} \times dx$$

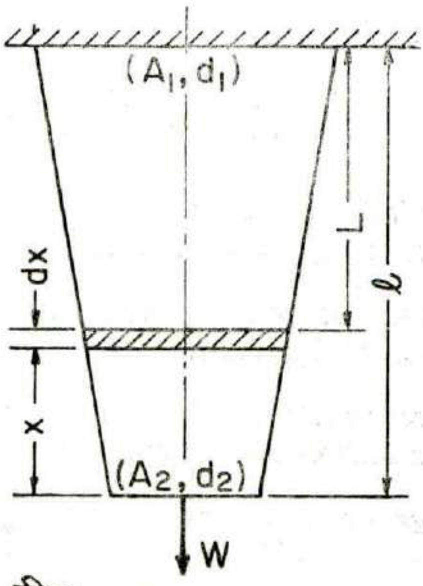
$$\text{केबिल में कुल दैर्घ्यवृद्धि} = \int^{5000} \frac{x\times dx}{020\times10^5} \times dx$$

$$= 6.25\mathrm{cm}$$

नीचे जानेवाले सिरे पर अधिकतम प्रतिबल जहाँ $x = 5000$ cm

$$= 5000 = 5000 \ \mathrm{N/cm^2}$$

उदाहरण 4.5 : चित्र 4.2 मे दिखाए गये एक समान टेपरवाले दंड की, उसके निचले सिरे पर लग रहे भार W के कारण दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिये । दंड के स्वयं के भार का विचार न कीजिए ।



चित्र 4.2

हल :

यहाँ A_1 d_1 तथा σ_1 क्रमशः सबसे ऊपरवाले परिच्छेद का क्षेत्रफल, व्यास तथा उस पर लग रहे प्रतिबल को व्यक्त करते हैं तथा उसी प्रकार A_2, d_2 और σ_2 निचले सिरे के परिच्छेद पर क्रमशः उन्हीं राशियों को व्यक्त करते हैं ।

दंड की एक अत्यंत न्यून लंबाई dx की कल्पना कीजिए जिसकी निचले सिरे से दूरी x हैं । इस स्थान पर अनुप्रस्थ काट A व्यास d तथा तनन प्रतिबल σ है

$$dx \text{ लंबाई की दैर्घ्यवृद्धि} = du = \frac{\sigma}{E} dx$$

चूंकि $\sigma A = \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2$

$$\sigma = \frac{\sigma_2 A_2}{A} = \sigma_2 \frac{d_2^2}{d^2} = \sigma_2 \frac{L^2}{(L+x)^2}$$

$$du = \frac{\sigma_2 L^2}{E(L+x)^2} dx$$

$$\mu = \int_0^l \frac{\sigma_2 L^2}{E(L+x)^2} dx = -\frac{\sigma_2 L^2}{L}\left[\frac{1}{L+l} - \frac{1}{L}\right]$$

$$= \frac{\sigma_2 L.\,l}{E(L+l)} = \frac{W.l}{A_2 E}\ \frac{L}{(L+l)} = \frac{Wl}{A_2 E}\ \frac{d_2}{d_1}$$

यदि $d_2 = d_1$ हो तो दैर्घ्यवृद्धि का मान $\frac{Wl}{A_2 E}$ हो जाता है जैसा कि प्रिज्मीय दंड पर अक्षीय बल लगने पर दैर्घ्यवृद्धि का मान पहिले ही निकाला जा चुका है ।

उदाहरण 4.6 : एक समान टेपर वाले दंड की, जिसके सिरे का व्यास d_1 तथा d_2 हो, अपने भार के कारण दैर्घ्यवृद्धि ज्ञात कीजिए ।

हल : चित्र 1.10 पर ध्यान दीजिए । पहिले अभ्यास के समान ही dx लंबाई की कल्पना कीजिए । इस लंबाई पर लगने वाले भार का मान :

$$= \frac{\pi}{3}\omega\,(L+x)^3 \tan^2\alpha - \frac{\pi}{3}\omega\, L^3 \tan^2\alpha$$

क्षेत्रफल $= \pi/_4\, d^2 = \pi\,(L+x)^2 \tan^2\alpha$

क्योंकि $(L+x)\tan\alpha = \frac{d}{2}$ (चित्र से स्पष्ट होता है)

$$\sigma = \frac{\text{भार}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{\pi/_3 w\tan^2\alpha[(L+x)^3 - L^3]}{\pi\,(L+x)^2 \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{w}{3(L+x)^2}\left\{(L+x)^3 - L^3\right\}$$

dx लंबाई की दैर्ध्यवृद्धि $du = \frac{w}{3E(L+x)^2}\left[(L+x)^3 - L^3\right]$

$$du = \frac{w}{3E}\left[(L+x) - \frac{L^3}{(L+x)^2}\right]dx$$

$$u = \int_0^l \left[(L+x) - \frac{L^3}{(L+x)}\right]dx$$

$$u = \frac{w}{3E}\left[L.\,l + \frac{l^2}{2} + \frac{L^3}{L+l} - L^2\right] \quad \ldots \quad (4.2)$$

समीकरण 4.2 से यह स्पष्ट है कि यदि दंड शंक्वाकार हो (अर्थात $L = 0$) तो

$$u = \frac{\omega l^2}{6E}$$

$$\frac{L\times l}{L} = \frac{d_1}{d_2} \text{ अथवा } \frac{l}{L} = \frac{d_1 - d_2}{d_2}$$

$$L = \frac{ld_2}{d_1 - d_2} \quad \ldots \quad (4.3)$$

यदि दंड का कुल भार W हो तो

$$W = \frac{\pi w}{3}\left[(L+l)^3 \tan^2\alpha - L^3 \tan^2\alpha\right]$$

$$= \frac{\pi w}{3}\left[(L+l)\frac{d_1^2}{4} - L\frac{d_2^2}{4}\right]$$

क्योंकि $(L+l)\tan\alpha = \frac{d_1}{2}$

तथा $L\tan\alpha = \frac{d_2}{2}$

समीकरण (4.3) से L का मान प्रतिस्थापन करने पर

$$W = \frac{\pi w}{12}\left[d_1^2\left\{\frac{ld_2}{d_1-d_2} + l\right\} - \frac{ld_2^3}{d_1-d_2}\right]$$

$$= \frac{\pi wl}{12}\,(d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2 \text{ ————————})$$

अथवा

$$w = \frac{12W}{\pi l(d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2)} \quad \ldots \quad (4.4)$$

समीकरण (4.2) में तथा w का मान क्रमशः समीकरणों (4.3) तथा (4.4) से प्रतिस्थापन करने पर

$$\mu = \frac{12W.\,l^2}{3\pi lE(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)_1}\left[\tfrac{1}{2} + \frac{d_2}{d_1-d_2} + \frac{d_2^3}{d_1(d_1-d_2)^2} + \frac{d_2}{(d_1-d_2}\right]$$

$$= \frac{2Wl(d_1+2d_2)}{\pi E(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)d_1}$$

यदि दंड शंक्वाकार हो तब $dx = 0$, अतः उपर्युक्त व्यंजक से

$$\mu = \frac{2Wl}{\pi Ed_1^2} = \frac{w.l^2}{6E}$$

तथा यदि $d_1 = d_2 = d$ तब $\mu = \frac{2Wl \times 3d}{\pi E \times 3d^3}$

अथवा $\mu = \frac{2Wl}{\pi E d^2} = \frac{W.l}{2AE}$ (प्रिज्मीय दंड के लिए यह व्यंजक पहिले ही प्राप्त किया जा चुका है)

उदाहरण 4.7 : एक मृदु इस्पात की प्लेट जो कि ऊपरी सिरे पर 100 mm चौड़ी तथा 15 mm मोटी है एक समान रूप से मोटाई तथा चौडाई में टेपर की गई है जिससे कि उसके निचले सिरे की चौडाई 50 mm तथा मोटाई 7.5 mm है । प्लेट की लंबाई 2500 mm हैं । इसमें 10kN कर्षण भार के कारण दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिए (प्लेट के स्वयं के भार पर विचार न कीजिए) । भार निचले सिरे पर लगाया गया है । $E = 210GPa$

हल : एक dx लंबाई के अवयव की, जिसकी निचले सिरे से दूरी x हो कल्पना कीजिए ।

इस अवयव की चौड़ाई $= \left(50 + \frac{50x}{2500}\right)$ mm

इस अवयव की मोटाई $= \left(7.5 + \frac{7.5x}{2500}\right)$ mm

क्षेत्रफल $A = 50 \times 7.5 \left(1 + \frac{x}{2500}\right)^2 mm^2$

प्रतिबल $\sigma = \frac{1000}{375\left(1 + \frac{x}{2500}\right)^2}$

$$du = \frac{\sigma dx}{E} = \frac{10000}{375E} \times \frac{d_x}{\left(1 + \frac{x}{2500}\right)^2}$$

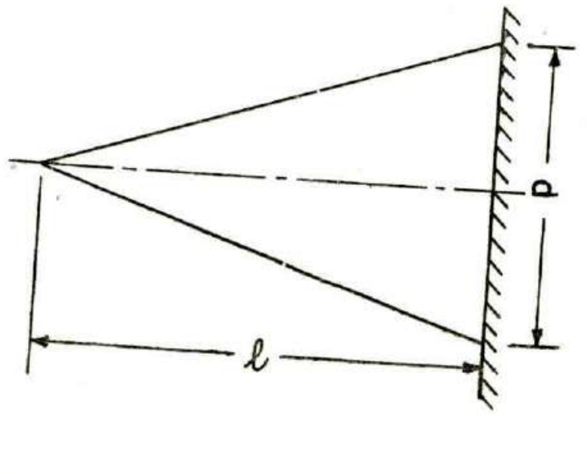
$$u = \frac{10000}{375E} \int_o^{2500} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{2500}\right)^2}$$

$$= -\frac{25 \times 10^6}{375E}\left[\left(1 + \frac{x}{2500}\right)^{-1}\right]^{2500}$$

$$= \frac{25 \times 10^6}{375 \times 21 \times 10^3} \times \frac{1}{2}$$

$$= 1.6 \text{ mm}$$

उदाहरण 4.8 : एक संकुआकार छड़ को इस प्रकार ऊर्ध्वाधर लटकाया गया हैं कि उसका आधार ऊपर बद्ध है तथा शीर्ष मुक्त रूप से नीचे लटक रहा है जैसा कि चित्र 4.3 में दिखाया गया है । छड़ की लंबाई l, आधार का व्यास d तथा पदार्थ के प्रति एकांक आयतन का भार w है । इस छड़ में अपने भार के कारण कुल दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिए ।



चित्र 4·3

हल : छड़ का कुल भार $= \frac{1}{3}\frac{\pi d^2}{4} \times l \times w = \frac{\pi d^2}{12} \times wl$ अब छड़ के एक एक अल्पांश पर ध्यान दीजिए जिसकी लंबाई dy तथा इसकी दूरी मुक्त सिरे से y है । मान लीजिए कि छड़ का व्यास नीचे से y दूरी पर d_1 है ।

अल्पांश पर लग रहा भार $= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} d_1^2 \times y \times w$

परन्तु $\frac{y}{d_1} = \frac{l}{d}$; अतः $d_1 = \frac{dy}{l}$

इस प्रकार अल्पांश पर लग रहे भार को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{l}y\right)^2 y \times w$$

$$= \frac{1}{12}\frac{d2}{l^2} y^3 \times w$$

अतः अल्पांश में दैर्घ्यवृद्धि $= \frac{1}{E} d_y \left(\frac{\frac{\pi}{12} \frac{d^2}{l^2} y^3 \times w}{\frac{\pi}{4} \times \frac{d^2}{l^2} y^2} \right)$

$= \frac{1}{3E} y. w. d_y.$

अतः संपूर्ण छड़ में दैर्घ्यवृद्धि $= \int_0^l \frac{w}{3E} w_{y.} d_y$

$$= \frac{wl^2}{6E} \quad . \quad . \quad . \quad (4.5)$$

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{A. l. w. l.}{A. 2E} = \frac{Wl}{2A.E.}$$

4.2 संयुक्त छड़ों में प्रतिबल

कभी कभी इंजीनियरी कार्यों में उपयोग किए जाने वाले अवयव विभिन्न पदार्थों के अथवा विभिन्न साइज के होते हैं तथा वे बाह्‌य भार को संयुक्त रूप से धारण करते हैं, अतः ऐसी परिस्थितियों में यह जानना आवश्यक होता है कि प्रत्येक पदार्थ खंड पर कितना भार लग रहा है तथा उसमें उत्पन्न प्रतिबल का परिमाण क्या है ।

एक सरल उदाहरण के रूप में दो छड़ों की कल्पना कीजिए, इनके दोनों सिरों को परस्पर इस प्रकार जोड़ दिया गया है कि बाहय भार लगने पर दोनों में समान रूप से ही अनुदैर्घ्य विरुपण हो अर्थात दोनों में विकृति का परिमाण बराबर होगा । ऐसी छड़ों को संयुक्त छड़ कहा जाता है । प्रतिबलित कंक्रीट के स्तंभ भी इसी प्रकार के एक उदाहरण को व्यक्त करते हैं ।

मान लीजिए उपर्युक्त वर्णित संयुक्त छड़ पर एक बाह्‌य बल P लगाया गया है। यहाँ एक छड़ ऐलुमिनियम की है जिसका अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल Aa तथा प्रत्यास्थता-गुणांक Ea हैं तथा दूसरी छड़ इस्पात की है जिसका अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल As तथा प्रत्यास्थता--गुणांक E_s है । दोनों की लंबाई बराबर है तथा दोनों सिरे परस्पर दृढतापूर्वक जुड़े हुए हैं ।

हम ऊपर बता चुके हैं कि बाह्‌य भार के कारण प्रत्येक छड़ में विरुपण बराबर होगा अतः यहाँ दोनों छड़ों में दैर्घ्यवृद्धि बराबर होगी इसका अर्थ यह न मान लेना

चाहिए कि दोनों छड़ों पर भार भी बराबर ही लगेगा । मान लीजिए संपूर्ण भार P में से P_a ऐलुमिनियम पर तथा P_s इस्पात पर लग रहा है, अतः

$$P = P_a + P_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.6)$$

चूंकि दोनों छड़ों में दैर्घ्यवृद्धि बराबर होगी, अतः

$$\frac{P_a \, l}{A_a \, E_a} = \frac{P_s \, l}{A_s \, E_s}$$

अथवा $\frac{P_a}{P_s} = \frac{A_a \, E_a}{A_s \, E_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.7)$

समीकरण (4.7) के दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$\frac{P_a + P_s}{P_s} = \frac{A_a \, E_a + A_s \, E_s}{A_s \, B_s}$$

अथवा $\frac{P}{P_s} = \frac{A_a \, E_a + A_s \, E_s}{A_s \, E_s}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{समीकरण (4.6) से} \\ P_a + P_s = P \text{ रखने पर} \end{array} \right\}$

$$\therefore P_s = \frac{A_s . E_s . P}{A_a . E_a + A_s . E_s .}$$

तथा समीकरण (4.7) की सहायता से $P_a = \frac{A_a . E_a . P}{A_{..} E_a + A_s . E_s}$

यदि σ_a तथा σ_s क्रमशः ऐलुमिनियम तथा इस्पात के छड़ में प्रतिबल के मान को व्यक्त करें, तब

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a = \dfrac{P. E_a}{A_a . E_a + E_s . A_s} \\ \text{तथा } \sigma_s = \dfrac{P. E_s}{A_a . E_a + E_s . A_s} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4.8)$$

समीकरण (4.8) से यह स्पष्ट है कि संयुक्त छड़ों में प्रतिबल उनके प्रत्यास्थता गुणांक का समानुपाती होता है ।

उदाहरण 4.9 : 3kN² के एक भार को दो छड़ों से जिनकी लंबाई बराबर हैं, लटकाया गया है । इनमें एक छड़ ऐलुमिनियम की है जिसका व्यास 4cm तथा दूसरी पीतल की है जिसका व्यास 5cm है । दोनों छड़ों में उत्पन्न प्रतिबल का मान बताइये । $Ea = 80 \times 10^3 N/mm^2$ तथा $E_b = 35 \times 10^3 N/mm^2$

हल : मान लीजिए ऐलुमिनियम की छड़ पर पड़ने वाला भार p_a तथा पीतल की छड़ पर पड़ने वाला भार P_b है ।

अतः $P_a + P_b = 3$ . . . . . . (a)

दोनों छड़ों में विकृति बराबर होगी, इसलिए :

$$\frac{P_a}{A_a \cdot E_a} = \frac{P_b}{A_b \cdot E_b}$$

चूंकि $A_a = \pi/4\ (4)^2 = 4\pi\ cm^2 = 400\pi\ mm^2$

तथा $A_b = \pi/4\ (5)^2 = 6.25\ \pi\ cm^2 = 625\pi\ mm^2$

$$\frac{P_a}{400\pi \times 80 \times 10^3} = \frac{P_b}{625\pi \times 35 \times 10^3}$$

$P_a = 1.46\ P_b$ . . . . . . (b)

समीकरण (a) तथा (b) को हल करने पर

$P_a = 1.78$ kN; $P_b = 1.22$ kN

अतः ऐलुमिनियम की छड़ में प्रतिबल

$$\sigma_a = \frac{17.8 \times 10^3}{400\pi} = 1.42\ N/mm^2$$

$$\text{and } \sigma_b = \frac{1.22 = 10^3}{625\pi} = 0.62\ N/mm^2$$

उदाहरण 4.10 : एक प्रतिबलित सीमेंट कंक्रीट के स्तंभ का अनुप्रस्थ परिच्छेद 900 cm^2 है तथा इसमें इस्पात की 1cm व्यास की 5 छड़ों प्रयोग की गई हैं यदि स्तंभ पर 40 kN का भार लग रहा हो तो कंक्रीट तथा इस्पात में उत्पन्न प्रतिबल को ज्ञात कीजिए । $E_s = 200 \times 10^5 N/cm^2$

तथा $E_c = 15 \times 10^5 N/cm^2$

हल : स्तंभ में इस्पात की छड़ों का कुल अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल $= 5 \times \pi/_4 \times (1)^2 = 3.93 cm^2$ अतः कंक्रीट का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल $= 900 - 3.93$

$= 896.07 cm^2$

अब $P_c + P = 40$ . . . . . . (a)

$$\text{तथा } \frac{P_c}{A_c\ E_c} = \frac{P_s}{A_s \cdot E_s}$$

$$\text{अथवा } \frac{P_c}{896.07 \times 1.5 \times 10^6} = \frac{P_s}{3.93 \times 20 \times 10^6}$$

$P_c = 17.1\ P_s$ . . . . . . (b)

(a) तथा (b) को हल करने पर

$P_c = 37.79$ kN; and $P_s = 2.21$ kN

$$\text{अतः } \sigma_c = \frac{37.79 \times 10^3}{896.07} = 42.4 N/cm^2$$

$$\text{तथा } \sigma_s = \frac{2.21 \times 10^3}{3.93} = 562 N/cm^2$$

उदाहरण 4.11 : एक 20cm व्यास तथा 3m लंबे लकड़ी के लट्ठे को टेक के रूप में प्रयोग किया गया है । इसका सामर्थ्य बढ़ाने के लिए 0.5cm मोटी इस्पात की चादर इसकी सम्पूर्ण लंबाई में अच्छी प्रकार से मढ़ दी गई है, यदि इस्पात के लिए अधिकतम प्रतिबल की सीमा 100 N/mm^2 तथा लकड़ी के लिए 7.5 N/mm^2 हो तो इस टेक पर लगाये जाने वाले निरापद् भार का मान ज्ञात कीजिए । इस्पात का प्रत्यास्थता गुणांक लकड़ी के प्रत्यास्थता गुणांक से 20 गुना है ।

हल :

$$\text{चूंकि } \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_t}{E_t}$$

$$\therefore \frac{\sigma_s}{\sigma_t} = \frac{E_s}{E_t} = 20. \quad \ldots \quad (अ)$$

अब यदि यह माना जाय कि लकड़ी में बाह्य भार के कारण अधिकतम प्रतिबल की सीमा प्राप्त हो जाती है अर्थात लकड़ी में $7.5 N/mm^2$ का प्रतिबल उत्पन्न होता है; तब समीकरण (अ) से $\sigma_s = 20 \times \sigma_t = 20 \times 7.5 = 150 N/mm^2$

इसका अर्थ यह है कि ऐसी दशा में इस्पात में इसके सीमा से अधिक प्रतिबल उत्पन्न हो जायेगा । अब यदि भार का मान इतना हो कि इस्पात के अधिकतम प्रतिबल की सीमा के बराबर प्रतिबल उत्पन्न हो जाय; तब फिर समीकरण (अ) से हम को ज्ञात होगा कि,

$$\sigma_t = \frac{100}{20} = 5 N/mm^2$$

यह मान लकड़ी के अधिकतम निर्धारित सीमा के भीतर है अतः यही भार का अधिकतम मान इस टेक पर लगाया जाना चाहिए ।

अतः टेक पर लगने वाले निरापद भार का अधिकतम मान,

$P = P_S + P_t = \sigma_S \times As + \sigma_t \times At$

$P_S = \pi/4 \times (21^2 - 20^2) \times 100 \times 10^2$

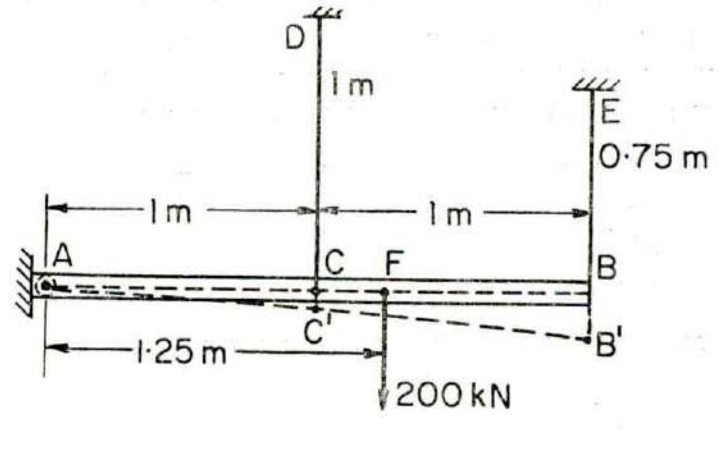
$= 322$ kN

तथा $P_t = \pi/4 \times (20)^2 \times 5 = 157$ kN

अतः $P = 322 + 157 = 479$kN

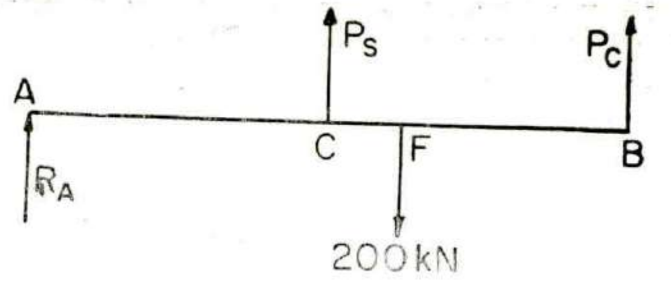
उदाहरण 4.12 : एक पूर्णतया सुदृढ़ छड़ AB को चित्र 4.4 (अ) की भाँति लटकाया गया है । छड़ का सिरा A कबजा दार (Hinge) है तथा बिन्दुओं B तथा C पर क्रमशः ताँबा तथा इस्पात की छड़ों से दृढ़तापूर्वक जोड़ा गया है । इस्पात की छड़ CD की लंबाई 1 m तथा ताँबे की छड़ BE की लंबाई 0.75m है । छड़ पर बिन्दु F से एक 200kN का भार लटकाया गया है, तथा दूरी AF 1.25m है ।

यदि $E_S = 20 \times 10^6 N/cm^2$; तथा $E_c = 12 \times 10^6$ N/cm^2 है तो दोनों छड़ें CD एवं BE में उत्पन्न प्रतिबल तथा दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजीए । इस्पात की छड़ का अनुप्रस्थ परिछेद क्षेत्रफल $3cm^2$ तथा ताँबे की छड़ का $5cm^2$ है ।



चित्र 4.4 (अ) (अ)

11—23 M. of HRD/ND/95



चित्र 4·4 (ब)

हल : चित्र 4.4 (ब) में छड़ AB का मुक्त पिंड आरेख दिखाया गया है, चूंकि छड़ दिखाये गए बलों द्वारा साम्यावस्था में है अतः

$P_s + P_c + R_A = 200 \times 10^3$ (अ)

तथा A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$P_s \times 1 + P_c \times 2 = 200 \times 1.25 \times 10^3$ (ब)

यहाँ P_s तथा P_c क्रमशः इस्पात तथा ताँबे के छड़ में उत्पन्न बल को व्यक्त करता है तथा R_A बिन्दु A पर प्रतिक्रियाबल है यहाँ हमारे पास केवल दो समीकरण हैं जब कि अज्ञात राशियों की संख्या तीन (P_s, P_c तथा R_A) है । चूंकि छड़ AB पूर्णतया दृढ़ मानी गई है अतः बालों के कारण इस छड़ में कोई विरूपण नहीं होगा । छड़ों CD तथा BE में दैर्ध्यवृद्धि के कारण छड़ AB झुक कर AB′ पर पहुंच जायगी क्योंकि सिरा A कब्जायुक्त है । अतः दूरियाँ CC′ तथा BB′ क्रमशः छड़ों CD तथा BE में उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि व्यक्त करती हैं ।

ज्यामिति द्वारा त्रिभुजों ACC′ तथा ABB′ में—

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

अतः $2CC' = BB'$ (स)

इस प्रकार हमें तीसरा समीकरण (स) भी प्राप्त हो जाता है ।

$$CC' = \frac{\sigma_S}{E_s} \times l_s = \frac{P_s \; l_s}{A_s E_s} = \frac{P_s \times 100}{3 \times 20 \times 10^6}$$

$$\text{तथा } BB' = \frac{\sigma_c}{E_c} \, l_c = \frac{P_c}{A_c} \frac{l_c}{E_c} = \frac{P_c \times 75}{5 \times 12 \times 10^6}$$

उपर्युक्त का मान समीकरण (स) में रखने पर --

$$\frac{2\times P_s\times 100}{3\times 20\times 10^6}=\frac{P_c\times 75}{5\times 12\times 10^6}$$

इस प्रकार $P_s = \frac{3}{8} P_c$ (द)

समीकरणों (ब) तथा (द) को हल करने पर

$P_s= \frac{750}{19}$ kN तथा $P_c= \frac{2000}{19}$ kN

अतः इस्पात छड़ में उत्पन्न प्रतिबल

$$\sigma_s= \frac{750\times 10^3}{19\times 3} = 131.6 \text{ N/mm}^2$$

इसी प्रकार ताँबे के छड़ में उत्पन्न प्रतिबल

$$\sigma_c= \frac{2000\times 10^3}{19\times 5} =210.5 \text{ N/mm}^2$$

इस्पात छड़ में हुई दैर्ध्यवृद्धि

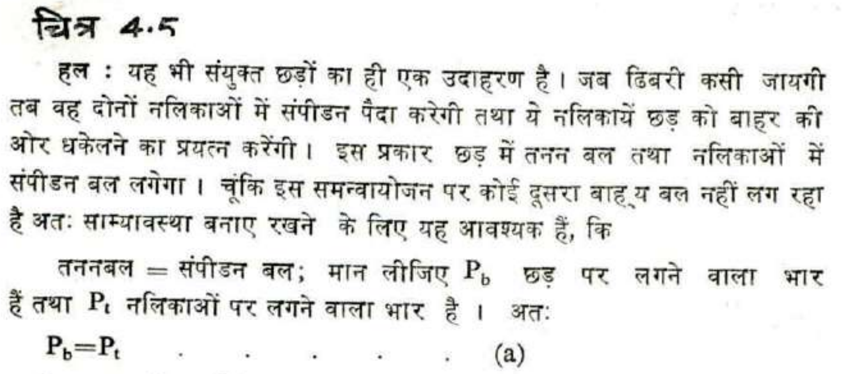
$$\Delta l_s'= \frac{131.6\times 1000}{200\times 10^3} = 0.658\text{mm}$$

ताँबे की छड में हुई दैर्ध्यवृद्धि

$$\Delta l_c= \frac{210.5\times 750}{120\times 10^3} =1.316\text{mm}$$

उदाहरण 4.13 : एक इस्पात की 40mm बाह्य व्यास की नलिका के भीतर, जिसकी मोटाई 5mm है, एक अन्य ताँबे की मलिका जिसका बाह्य व्यास 27.5mm तथा भीतरी व्यास 25mm है डाली गयी है तथा अन्दर वाली नलिका के भीतर से होकर एक इस्पात की छड़ जिस का व्यास 2cm है डाली गयी है । इस्पात तथा ताँबे की नलिकाओं की लंबाई 30cm है । ताँबे की नलिका से होकर जाने वाली छड़ के दोनों सिरों पर चूड़ियाँ कटी हुई हैं । अब नलिकाओं के सिरों पर दृढ़ वाशर लगाकर ढिबरियाँ कस दी गई हैं । यदि छड़ पर 4 चूड़ियाँ प्रति सेमी हों तथा एक सिरे की ढिबरी को एक चौथाई परिक्रमण देकर और कस दिया जाय तो दोनों नलिकाओं तथा छड़ में प्रतिबल के मान में क्या परिवर्तन होगा ?

$E_s= 200$ GPa; $E_c=120$ GPa



चित्र 4.5

हल : यह भी संयुक्त छड़ों का ही एक उदाहरण है । जब ढिबरी कसी जायगी तब वह दोनों नलिकाओं में संपीडन पैदा करेगी तथा ये नलिकायें छड़ को बाहर की ओर धकेलने का प्रयत्न करेंगी । इस प्रकार छड़ में तनन बल तथा नलिकाओं में संपीडन बल लगेगा । चूंकि इस समन्वायोजन पर कोई दूसरा बाह्य बल नहीं लग रहा है अतः साम्यावस्था बनाए रखने के लिए यह आवश्यक हैं, कि

तननबल = संपीडन बल; मान लीजिए P_b छड़ पर लगने वाला भार हैं तथा P_t नलिकाओं पर लगने वाला भार है । अतः

$P_b=P_t$ . . . . . (a)

P_t के कारण नलिकाओं में संकुचन होगा तथा P_b के कारण छड़ में दैर्ध्यवृद्धि होगी यदि इनका मान क्रमशः δl_t तथा δl_b हो तो इनका योग ढिबरी द्वारा छड़ के अक्ष की दिशा में तय की गई दूरी होगा ।

चूंकि छड़ पर 4 चू० प्र० cm है अतः ढिबरी के एक पूर्ण परिक्रमण देने पर वह छड़ की अक्ष की दिशा में 0.25cm आगे बढ़ेगी । अतः एक चौथाई परिक्रमण में ढिबरी आगे बढ़ेगी $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=1/16$ cm इस प्रकार

$\delta l_t+\delta l_b=1/16$ . . . . . (b)

यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि बल P_t इस्पात तथा ताँबे की नलिकाओं पर संयुक्तरूप से लग रहा है । अतः इनमें उत्पन्न प्रतिबल क्रमशः इनके प्रत्यास्थता गुणांक के समानुपाती होगा ।

मान लीजिए कि इस्पात की नलिका, ताँबे की नलिका तथा अंदर वाली छड़ में उत्पन्न प्रतिबल का मान क्रमशः σ_s, σ_c तथा σ_b है तथा इनके अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल क्रमशः A_s, A_c, तथा A_b है ।

$\sigma_s\ A_s + \sigma_c.\ A_c = P_t$ . . . . . . (c)

$\frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c}$ . . . . (d)

समीकरण (a) को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$\sigma_s.\ A_s + \sigma_b.\ A_c = \sigma_c.\ A_b$ . . . . . . (e)

एवं समीकरण (b) को इस प्रकार लिखा जा सकता है, कि

$\frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{\sigma_b}{E_b} = 1/16$ . . . . . . (f)

अब समीकरणों (d), (e) तथा (f) पर ध्यान दीजिए, हमारे पास तीन समीकरण तथा तीन ही अज्ञात राशियाँ σ_s, σ_c तथा σ_b हैं अतः इनको हल किया जा सकता है

$$A_s = \pi/4\left(4^2 - 3^2\right) = \frac{7\pi}{4}\text{cm}^2$$

$$A_c = \pi/4\left\{2.75^2 - 2.5^2\right\} = \frac{1.31\pi}{4}\ \text{cm}^2$$

$$A_b = \pi/4 \times (2)^2 \qquad = \pi\ \text{cm}^2$$

समीकरण (d) में मान रखने पर

$$\frac{\sigma_s}{200} = \frac{\sigma_c}{120}$$

अथवा $\sigma_s = \frac{5}{3}\sigma_c$ . . . . (g)

समीकरण (e) में मान रखने पर

$$\sigma_s \frac{7\pi}{4} + \sigma_c \times \frac{1.31\pi}{4} = \sigma_b \times \pi$$

अथवा $7\sigma_s + 1.31\sigma_c = 4\sigma_b$ . . . . . (h)

(h) में (g) का मान रखने पर

$$7 \times \frac{5}{3}\sigma_c + 1.31\sigma_c = 4\sigma_b$$

अथवा $\sigma_c = 0.306\,\sigma_b$ . . . . . . (i)

अथवा $\sigma_s = \frac{5}{3}\sigma_c = \frac{5}{3} \times 0.306\,\sigma_b$

$\sigma_s = 0.51\,\sigma_b$ . . . . . . (j)

(b) को मान समीकरण (f) में रखने पर

$$\frac{0.51\,\sigma_b}{200 \times 10^5} \times 30 + \frac{\sigma_b \times 30 \times 1}{200 \times 10^5} = \frac{1}{16}$$

$$15.3\sigma_b + 30\,\sigma_b = \frac{200 \times 10^5}{16}$$

$$\sigma_b = \frac{200 \times 10^5}{16 \times 45.3} \times \frac{1}{10^2} = 276\ \text{Nmm}^2$$

अतः $\sigma_s = 0.51\,\sigma_b = 0.51 \times 276$

$\sigma_s =$

तथा $\sigma_c =$

4.3 तापजन्य प्रतिबल

लगभग सभी धातुयें ऊष्मा से प्रभावित होती हैं। मान लीजिए एक इस्पात की छड़ की मानक ताप लम्बाई l है तथा उसका प्रसार गुणांक α प्रति °C है, अब यदि इस छड़ के ताप में t°C का परिवर्तन हो तो हम जानते हैं कि इसकी लंबाई में भी $l\alpha t$ का परिवर्तन होगा। यदि छड़ के ताप में की वृद्धि हुई है तो इसकी लंबाई में भी $l\alpha t$ की वृद्धि होगी तथा यदि छड़ के ताप में t°C की कमी हुई है तो उसके लंबाई में $l\alpha t$ के बराबर कमी होगी।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि यदि ताप में कमी अथवा वृद्धि के कारण छड़ की लंबाई में भी कमी अथवा वृद्धि मुक्त रूप से हो तो उसमें किसी प्रकार का भीतरी बल नहीं उत्पन्न होता है परन्तु यदि ताप परिवर्तन के कारण होने वाली लंबाई में कमी अथवा वृद्धि पूर्ण रूप अथवा आंशिक रूप में न होने दी जाय तो इसमें आंतरिक बल उत्पन्न हो जाता है जिसके कारण छड़ में प्रतिबल उत्पन्न हो जायेगा। इस प्रकार उत्पन्न प्रतिबल को ताप जन्य प्रतिबल कहा जाता है। यहाँ यह याद रखना चाहिए कि इस प्रतिबल का स्वरूप अभिलंब प्रतिबल से जिसका वर्णन हम पहले कर चुके हैं, भिन्न नहीं है। अतः ताप जन्य प्रतिबल भी अभिलंब प्रतिबल ही हैं एवं ये तनन अथवा संपीडन दोनों प्रकार के हो सकते हैं।

उदाहरण 4.14 : एक इस्पात की छड़ जिसकी लंबाई 1m तथा व्यास 2 cm है, दोनों सिरों पर दृढ़तापूर्वक बद्ध (rigidly fixed) है, यदि छड़ का ताप 50°C बढ़ा दिया जाय तो इसमें उत्पन्न प्रतिबल का मान बताइये। इस्पात का प्रसार गुणांक (Coefficient of expansion)

$$\alpha_s = 10 \times 10^{-6}\ \text{per °c};\ E = 200\ \text{GP}_a$$

हल :

छड़ की लंबाई $= 1m$

$50°C$ ताप बढ़ाने पर लंबाई $= 1 + 1. \alpha. t.$

परन्तु ताप के बढ़ जाने पर भी छड़ की लंबाई 1m रहती है अतः इस पर दोनों सिरों पर P बल लगेंगे जो कि इसमें $(1 + 1\, \alpha\, t - 1)$ का संकुचन उत्पन्न करेगा।

अतः बल P के कारण छड़ में $\alpha.t$ के बराबर संकुचन होगा। छड़ में विकृति

$$= \frac{1.\alpha.\ t}{1 + 1.\alpha.\ t} \simeq \alpha.\ t.$$

$$\text{अतः} \quad \frac{\sigma}{E} = 10 \times 10^{-6} \times 50$$

$$\therefore \quad \sigma = 200 \times 10^{3} \times 10^{-6} \times 50 = 100 N/mm^2$$

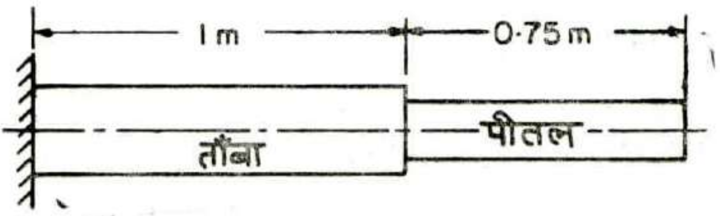
अतः यहाँ ताप के कारण उत्पन्न भीतरी बल का मान :

$$P = 100 \times \pi/4 \times 400 = 31.4\ kN$$

यदि ताप का मान $50°C$ बढ़ाने के बजाय घटा दिया जाय तब यही बल छड़ में तनन उत्पन्न करेगा।

उदाहरण 4.15 : चित्र 4.6 में दिखाई गई एक संयुक्त छड़ को उसके दोनो सिरों पर दृढ़ आधार से जोड़ा गया है। छड़ का 1m लंबा भाग ताँबा का है तथा इसका व्यास 4cm है शेष 0.75m लंबा भाग पीतल का है तथा इसका व्यास 2cm है। $20°C$ पर यह छड़ प्रतिबल मुक्त है। अब यदि इस संयुक्त छड़ का ताप बढ़ाकर $40°C$ कर दिया जाय तो दोनों भागों में प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए, यदि (a) आधार पूर्णतया सुदृढ़ हैं (b) आधार 1mm खिसक जाते हैं।

$$\alpha_c = 15 \times 10^{-6}/°C; \quad \alpha_B = 12 \times 10^{-6}/°C;$$
$$E_c = 100\ G\ Pa; \quad E_B = 100\ G\ Pa$$



चित्र 4.6

हल : यहाँ संयुक्त छड़ का ताप $20°C$ बढ़ जाता है; अतः यदि दोनों भाग पूर्णतया मुक्त होते तो छड़ में कुल दैर्ध्यवृद्धि,

$$\delta l = \alpha_c.\ t. \times 100 + \alpha_b t \times 75$$
$$= 15 \times 10^{-6} \times 20 \times 100 + 12 \times 10^{-6} \times 20 \times 75$$
$$= 20 \times 10^{-6} (1500 + 900)$$
$$= 20 \times 2400 \times 10^{-6}\ cm$$
$$= 0.48 mm$$

चूंकि ताप बढ़ने के कारण संयुक्त छड़ पर संपीडन बल लगेगा, मान लीजिए कि इस बल का मान N है। अतः इस बल के कारण छड़ में कुल संकुचन 0.48mm के बराबर होना चाहिए।

$$\text{अतः} \quad \left(\frac{P \times 100}{A_c.\ E_c} + \frac{P \times 75}{A_b.\ E_b} \right) \times 10 = 0.48 \ldots \quad (a)$$

$$\text{यहाँ} \quad A_c = \pi/4 \times (4)^2 = 4\pi cm^2$$
$$A_b = \pi/4 \times (2)^2 = \pi\ cm^2$$

अतः समीकरण (a) में उपर्युक्त मान रखने पर :

$$\left(\frac{P \times 100}{4\pi \times 100 \times 10^5} + \frac{P \times 75}{\pi \times 100 \times 10^5} \right) \times 10 = 0.48$$

$$\text{अतः} \quad P = 15072\ N$$

$$\text{अतः} \quad \sigma_c = \frac{15072N}{4\pi} = 1200 N/cm^2$$

$$\text{तथा} \quad \sigma_b = \frac{15072N}{\pi} = 4800\ N/cm^2$$

अब यदि आधार 1mm खिसक जाता है तो इसका अर्थ यह है कि संयुक्त छड़ में संकुचन 0.48mm के स्थान पर 0.38mm ही होगा, अतः

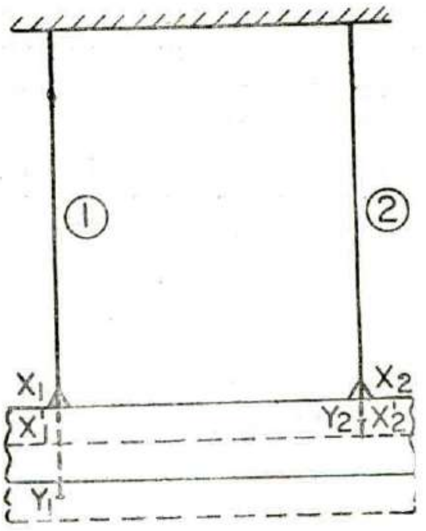
$$\left(\frac{P \times 100}{4\pi \times 100 \times 10^5} + \frac{P \times 75}{\pi \times 100 \times 10^5} \right) \times 10 = .038$$

अतः $P = 11,932$ N

अतः $\sigma_c = \dfrac{11,932}{4 \times \pi} = 950 \text{ N/cm}^2$

तथा $\sigma_B = 3800 \text{ N/cm}^2$

उदाहरण 4.16 : दो छड़ें, जिनकी लंबाई बराबर है परन्तु उनके अनुप्रस्थ परिच्छेद क्रमशः A_1 तथा A_2 हैं, एक आधार से दृढ़ता पूर्वक बद्ध हैं। उनके दूसरे सिरों को भी परस्पर दृढ़ता पूर्वक जोड़ दिया गया है जैसा कि चित्र 4.7 में दिखाया गया है। अब यदि इस संयुक्त छड़ का तापमान $t°C$ बढ़ा दिया जाय तो दोनों छड़ों में प्रतिबल का मान अलग अलग ज्ञात कीजिए। मान लीजिए प्रथम छड़ का प्रसार गुणांक α_1 तथा दूसरे का प्रसार गुणांक α_2 है तथा α_1 का मान α_2 से अधिक है।



चित्र 4.7

हल : यहाँ यद्यपि दोनों छड़ों की आरंभिक लंबाई (initial length) बराबर ही है परन्तु उनके प्रसार गुणांक अलग-अलग हैं अतः इनमें ताप वृद्धि के कारण विरूपण (deformation) भी अलग-अलग मात्रा में होगा।

चूंकि प्रथम छड़ का प्रसार गुणांक दूसरे की अपेक्षा अधिक है अतः प्रथम छड़ में दूसरे छड़ की अपेक्षा लंबाई में वृद्धि अधिक होगी; परन्तु चूंकि छड़ों के दोनों सिरे परस्पर दृढ़तापूर्वक बद्ध हैं अतः दोनों छड़ों में लंबाई में वृद्धि अंत में एक ही होगी जिसके परिणामस्वरूप प्रथम छड़ में जिसका प्रसार गुणांक α_1 है संपीडन प्रतिबल उत्पन्न होगा तथा दूसरे छड़ में तनन प्रतिबल उत्पन्न होगा। चूंकि इन पर कोई अन्य बाह्य बल नहीं लग रहा है अतः साम्यावस्था बनाने रखने के लिए यह आवश्यक होगा कि प्रथम छड़ पर लग रहा संपीडन बल का मान दूसरे छड़ पर लगने वाले तनन बल के मान के बराबर हो।

इस प्रश्न को हल करने के लिए चित्र (4.7) पर ध्यान दीजीए। मान लीजिए कि आरंभ में जब छड़ों का ताप नहीं बढ़ाया गया है उस समय इनके मुक्त सिरों की स्थिति X_1 X_2 द्वारा दिखाई गई है। अब यदि दोनों सिरे परस्पर जुड़े हुए न हों तो तापमान $t°C$ बढ़ाने पर मान लीजिए। प्रथम छड़ में लंबाई में वृद्धि X_1Y_1 के बराबर होती है, जब कि दूसरे छड़ की लंबाई में वृद्धि X_2Y_2 होती है; परन्तु चूंकि दोनों सिरे आपस में दृढ़ता पूर्वकबद्ध हैं अतः पहली छड़ जिसका प्रसार गुणांक अधिक है दूसरी को अपने ओर खींचने का प्रयत्न करेगी तथा दूसरी छड़ पहली की अपने ओर खींचेगी और इस प्रकार छड़ों का दुसरा सिरा किसी बीच की स्थिति में आ जायेगा। मान लीजिए चित्र में यह स्थिति $X'_1X'_2$ द्वारा दिखाई गई है। इस दशा में प्रथम छड़ संपीडन तथा दूसरी में तनन बल लगेंगे, तथा साम्यावस्था बनाए रखने के लिए दोनों का मान बराबर ही होगा।

$X_1Y_1 = \alpha_1 tl.$ = प्रथम छड़ में ताप वृद्धि के कारण लंबाई मे परिवर्तन $X_2Y_2 = \alpha_2 tl.$ = दूसरे छड़ में ताप वृद्धि के कारण लंबाई में परिवर्तन।

चूंकि छड़ के सिरों की अंतिम स्थिति $X'_1X'_2$ है, अतः

प्रथम छड़ में संकुचन (Contraction) $= X'_1Y_1 = \varepsilon_1 \times l$

दूसरे छड़ में दैर्ध्यवृद्धि (Elongation) $= X'_2Y_2 = \varepsilon_2 \times l$

ε_1 = प्रथम छड़ में संपीडन विकृति (Compressive Strain) $= \dfrac{P}{A_1E_1}$

ε_2 = दूसरे छड़ में तनन विकृति (Tensile Strain) $= \dfrac{P}{A_2E_2}$

$$\text{अतः } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{A_2E_2}{A_1E_1} \quad \ldots \quad (4.9)$$

चूंकि $X_1Y_1 - X_2Y_2 = X'_1Y_1 + X'_2Y_2$

अथवा $\alpha_1 t l - \alpha_2 t l = \varepsilon_1 l + \varepsilon_2 l$

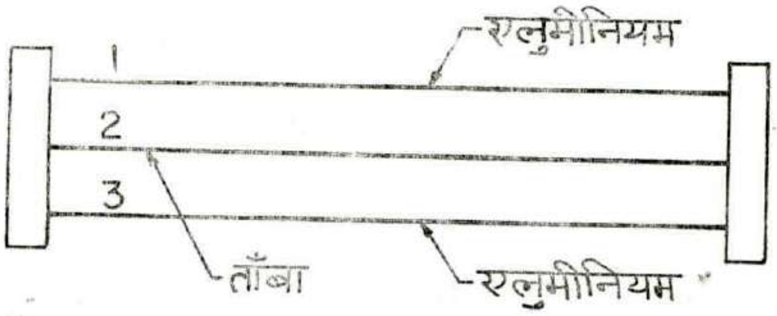
अथवा $(\alpha_1 - \alpha_2)t = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. . . . (4.10)

समीकरणों (4.9) तथा (4.10) की सहायता से ε_1 तथा ε_2 का अलग-अलग मान ज्ञात किया जा सकता है तथा इनके ज्ञात हो जाने पर छड़ों में प्रतिबल का मान भी ज्ञात हो जायगा ।

उदाहरण 4.17 : तीन छड़ों को परस्पर दोनों सिरों से दृढ़तापूर्वक जोड़ा गया है जैसा कि चित्र 4.8 में दिखाया गया है । इनमें बीच की छड़ ताँबे की है तथा दोनों बाहरी छड़े एलुमिनियम की हैं । तीनों छड़ों का व्यास 5mm है । यदि इस संयुक्त छड़ का ताप 60°C बढ़ा दिया जाय तो प्रत्येक में उत्पन्न प्रतिबल की मान बताइये।

यदि इस बढ़े हुए ताप पर छड़ों पर 5 kN का तनन भार लगाया जाय तो प्रत्येक छड़ में अंतिम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।

$\alpha_a = 20 \times 10^{-6}/°c$; $\alpha_c = 15 \times 10^{-6}/°c$; $E_a = 80 \times 10^5$ N/cm²
$E_c = 100 \times 10^5$ N/cm²



चित्र 4.8

हल :

$$\varepsilon_a + \varepsilon_c = \frac{\sigma_a}{E_a} + \frac{\sigma_c}{E_c} = (\sigma_a - \sigma_c)t$$

अथवा $$\frac{\sigma_a}{10 \times 10^5} + \frac{\sigma_c}{100 \times 10^5} = (20 - 15) \times 10^{-6} \times 60$$

अथवा $(5\alpha_a + 4\sigma_c) = 400 \times 300 \times 10^{-6} \times 10^5$

अथवा $5\sigma_a + 4\sigma_c = 12000$ . . . . . (4.11)

साम्यावस्था में

ताँबे में तनन बल = एलुमिनियम में संपीडन बल

$\sigma_c = 2\sigma_a$ . . . . (4.12)

उपर्युक्त समीकरण 4.11 तथा 4.12 समीकरणों को हल करने पर

$\sigma_a = 9.23$ N/mm² (तनन)

$\sigma_c = 18.46$ N/mm² (संपीडन)

यदि संयुक्त छड़ों पर 5000 N का अतिरिक्त भार लगाया जाय तो यह तीनों छड़ों में उनके प्रत्यास्थता मापांक तथा अनुप्रस्थ क्षेत्रफल के अनुसार बट जायगा ।

अतः $\sigma'_c \times A_c + 2\sigma'_a \times A_a = 5000$ .... (4.13)

यहाँ σ_c' तथा σ_a' बाह्य भार के कारण ताँबे तथा ऐलुमिनियम की छड़ों में उत्पन्न प्रतिबल को व्यक्त करते हैं । इस भार के कारण छड़ों में विकृति एक समान होगी

$$\frac{\sigma'_c}{E_c} = \frac{\sigma'_a}{E_a} \quad . . . . (4.14)$$

$$A_c = A_a = \pi/4(\tfrac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{16} \text{ cm}^2$$

$$\sigma'_c + 2\sigma'_a = \frac{5000\ 16}{\pi}$$

तथा $\sigma'_c = 1.25\sigma'_a$ (समीकरण 4.14 द्वारा)

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर

$\sigma'_a = 79.5$ N/mm² (तनन)

$\sigma'_c = 98$ N/ mm² (तनन)

अतः एलुमिनियम की छड़ में अंतिम प्रतिबल $= 79.5 + 9.2$
$= 88.7$ N/mm²

ताँबे की छड़ में अंतिम प्रतिबल $= 98 - 18.4$
$= 79.6$ N/mm²

अभ्यास प्रश्नमाला

1. एक मृदु इस्पात के दंड पर, जिसका परिच्छेद 10 cm× 0.6 cm है, 12kN का अक्षीय कर्षण बल लगाने पर उसकी लम्बाई 25.025 cm हो जाती है। बिना भार के उसकी लंबाई 25 cm है। मृदु इस्पात के लिए E का मान ज्ञात कीजिए।

(200GPa)

2. एक खोखले ढलवां लोहे के स्तंभ को जिसका बाह्य व्यास 20cm है 1000 kN का भार वहन करना है, यदि उसकी चरम संपीडन सामर्थ्य 700 N/mm^2 हो तो सुरक्षा गुणक का मान 10 मानते हुए स्तंभ की मोटाई ज्ञात कीजिए।

इस भार के कारण स्तंभ में विकृति एवं लंबाई में कमी का भी मान ज्ञात कीजिए। स्तंभ की लंबाई 3m तथा E=100GPa मान लीजिए।

(2.66cm. ; 7×10^{-4} ; 0.21cm)

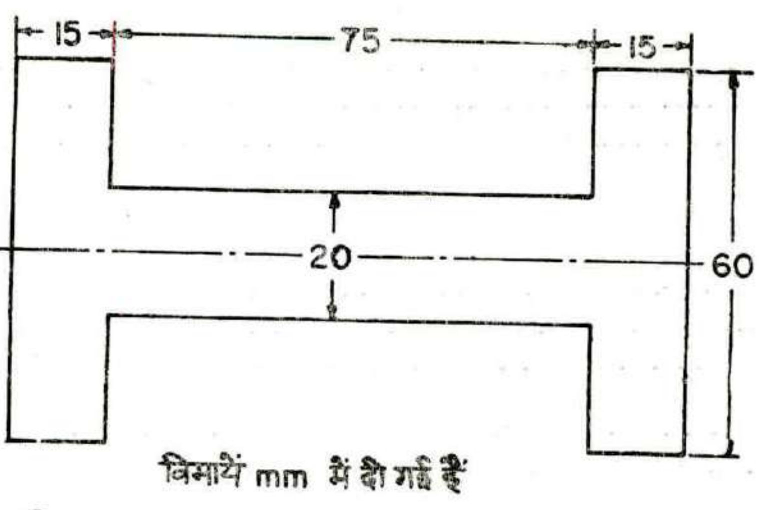
3. एक 40 cm लंबी गोल छड़ के मध्य स्थित आधे भाग का व्यास 5 सेमी. है तथा दोनों सिरों के भागों का व्यास कम है। इसपर 100 kN का तनन भार लगाया गया है तो इसके सिरों का व्यास ज्ञात कीजिये यदि (अ) अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 150N/mm^2 हो (b) संपूर्ण अनुमेय दैर्ध्यवृद्धि 0.03 cm हो। E का मान 200 GPa लिया जा सकता है।

(2.88 cm)

4. एक 5 cm व्यास की मृदु इस्पात के छड़ को 200 kN द्वारा 0.006 संकुचन किया गया है। इसकी 100 kN कर्षण बल के कारण दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिए। तनन तथा संपीडन में प्रत्यास्थता मापांक का मान समान लिया जा सकता है।

(0.003 cm)

5. चित्र में दिखाये गये H- परिच्छेद वाले ढलवां लोहे के स्तंभ की लंबाई 3 m है। यदि स्तंभ में अनुमेय (अधिकतम) संपीडन प्रतिबल 40 N/mm^2 तो यह स्तंभ अपने भार के अतिरिक्त कितना भार सुरक्षापूर्वक वहन कर सकता है? ढलवां लोहे का भार 7000 kg/m^3 होता है।



विमायें mm में दी गई हैं

चित्र 4.9

6. एक मृदु इस्पात की छड़ जिसकी लम्बाई 10 m तथा व्यास 2 cm है सीधी अर्ध्वधार लटकाई गई है। इसके ऊपरी सिरे पर अपने भार के कारण प्रतिबल ज्ञात कीजिए। इसके निचले सिरे पर लटकाये जाने वाले उस भार का भी मान ज्ञात कीजिए जिससे कि इसमें अधिकतम प्रतिबल इसकी प्रत्यास्थता सीमा 300 N/mm^2 से अधिक न हो। इस्पात का भार 8000 Kg/m^3 मान लीजिए। छड़ में कुल दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिए। E= 200 GPa

(6.8 N/mm^2 ; 93.95kN; 1.5cm)

7. एक 30 cm^2 परिच्छेद की तांबे की नलिका AC सिरों पर दृढ़ आधारों के मध्य जिनके बीच की दूरी 90 cm है, स्थित है। बाये सिरे से 60 cm की दूरी पर बिन्दु B पर एक 100 KN का क्षैतिज बल लगाया गया है, तो छड़ के AB तथा BC भागों में उत्पन्न प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। बिन्दु B कितना विस्थापित होगा यह भी बताइये तथा छड़ में दैर्ध्यवृद्धि का मान प्राप्त कीजिए। संपीडन तथा तनन दोनों ही में E=100 GPa मान लीजिए।

8. एक पंच दाबक $400\ N/mm^2$ मिमी प्रतिबल तक निरापद रूप से कार्य कर सकता है । उस मृदु इस्पात चादर की अधिकतम मोटाई ज्ञात कीजिए जिसकी चरम अपरुपण सामर्थ्य $200\ N/mm^2$ है तथा जिसमें 40 mm व्यास का छिद्र बनाया जा सके ।

(20 mm)

9. एक समान टेपर वाली छड़ की दैर्ध्यवृद्धि ज्ञात कीजिये यदि उसके निचले सिरे पर 40kN का भार लग रहा हो । छड़ की लम्बाई 300 मिमी तथा ऊपरी एवं निचले सिरों का व्यास क्रमशः 40 तथा 20 mm है । यदि उसका स्वयं का भार $8000\ Kg/m^3$ हो तो उसका प्रभाव भी गणना में सम्मिलित कीजिए ।

$E = 200$ GPa (0.090612mm)

10. एक टेपर स्तंभ का शीर्ष 10 सेमी का वर्ग है तथा तली 20 cm का वर्ग है । उस अक्षीय भार का मान बताइये जो इसकी लम्बाई में 0.25 cm की न्यूनता उत्पन्न कर सके । स्तंभ की लंबाई 300cm है ।

$E = 10$GPa (166.7 kN)

अध्याय 5

बंकन अथवा नमन भार वाले अवयवों का विश्लेषण

5.1 विषय प्रवेश

अध्याय-1 में भार के विभिन्न स्वरूप का वर्णन करते समय यह बताया गया था कि बंकन भार भी हो सकता है । अध्याय-4 में हमने उन्हीं परिस्थितियों पर ध्यान दिया है जहाँ भार किसी अवयव के अक्ष की दिशा में लग रहा हो; परन्तु जब भार संरचनात्मक अवयव के अभिलम्ब दिशा में लगता है तब अवयव में बंकन तथा अपरुपण दोनों ही होता है । ऐसे अवयव जिनके अक्ष के अभिलंब दिशा में भार लगतें हैं, धरन कहलाते हैं । इस अध्याय में हम ऐसे अवयवों पर ही विशेष रूप से ध्यान केंद्रित करेंगे ।

5.2 धरन के प्रकार

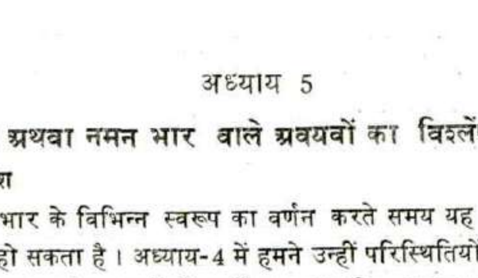
सामान्यतः धरन दो प्रकार के हो सकते हैं (1) सीधे धरन तथा (2) वक्र धरन । यहाँ पर हम सीधे धरन का ही वर्णन करेंगे । धरन का प्रकार उसके आधार (Support) के स्वरुप पर भी निर्भर होता है तथा आधार निम्नांकित प्रकार का हो सकता है ।

(i) रोलर आधार

(ii) हिंज अथवा कब्जा आधार

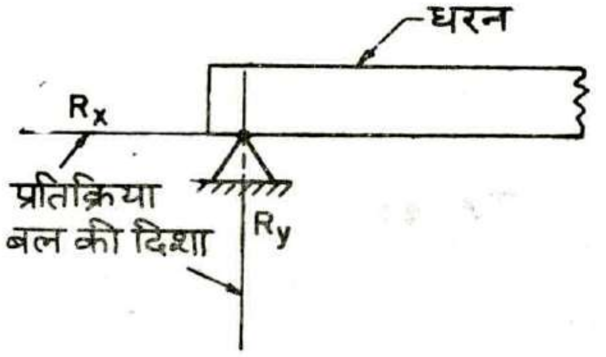
(iii) बद्ध आधार

धरन पर लगने वाले प्रतिक्रिया बल उपर्युक्त वर्णित आधार के स्वरुप पर निर्भर करते हैं । यदि धरन रोलर आधार पर टिका है तो आधार का प्रतिक्रिया बल सदैव ऊर्ध्वाधर होगा । इस प्रकार के आधार को चित्र 5.1 में दिखाये गए रेखाचित्र द्वारा व्यक्त किया जाता है । हिंज आधार का प्रतिक्रिया बल क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर



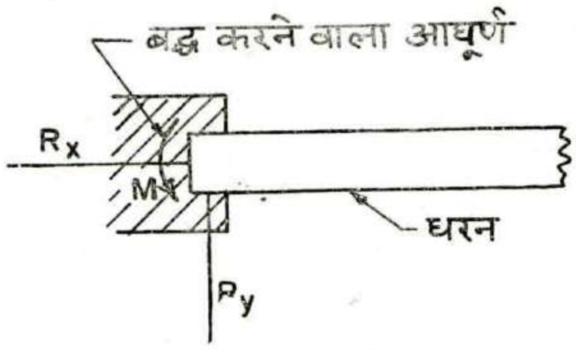
चित्र 5.1

दोनों ही होता है तथा उसको रेखाचित्र द्वारा चित्र–5.2 के समान व्यक्त किया जाता है। बद्ध आधार का प्रतिक्रिया बल क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशा में तो लगता ही है इसके साथ साथ यह एक प्रतिक्रिया आघूर्ण भी उत्पन्न करता है जिसको बद्ध करने



चित्र 5.2

वाला आघूर्ण कहा जाता है। इस प्रकार के आधार को चित्र 5.3 में दिखाया गया है।



चित्र 5.3

आधार के स्वरूप के अनुसार धरन को निम्नलिखित छः वर्गों में विभाजित किया जा सकता है :

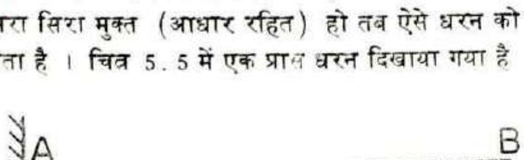
(i) शुद्ध आलंब धरन : यदि किसी धरन के अपने दोनों सिरे रोलर आधार पर टिके हो तो इसको शुध्दालंब धरन कहा जाता है; इसको मुक्त

12—23 M. of HRD/ND/95

आधार वाला धरन भी कहा जाता है चित्र 5.4 में एक ऐसे धरन को दिखाया गया है। यहाँ धरन को सांकेतिक रूप में सीधी रेखा AB से व्यक्त किया गया है।

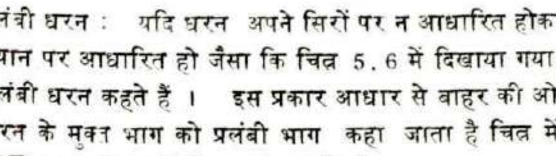
चित्र 5.4

(ii) प्रास धरन : यदि किसी धरन का एक सिरा बध्द आधार वाला हो तथा दूसरा सिरा मुक्त (आधार रहित) हो तब ऐसे धरन को प्रास धरन कहा जाता है। चित्र 5.5 में एक प्रास धरन दिखाया गया है।



चित्र 5.5

(iii) प्रलंबी धरन : यदि धरन अपने सिरों पर न आधारित होकर किसी अन्य स्थान पर आधारित हो जैसा कि चित्र 5.6 में दिखाया गया है तो इसको प्रलंबी धरन कहते हैं। इस प्रकार आधार से बाहर की ओर निकले हुए धरन के मुक्त भाग को प्रलंबी भाग कहा जाता है चित्र में AC तथा BD धरन के प्रलंबी भाग को दर्शाते हैं।



चित्र 5.6

(iv) बद्ध धरन : यदि धरन के दोनों सिरे बद्ध आधार वाले हों तो इसको बद्ध धरन कहा जाता है। चित्र 5.7 में ऐसे धरन को दिखाया गया है।

चित्र 5.7

(v) बहु आधारित धरन : यदि कोई धरन दो से अधिक स्थानों पर आधारित हो तो उसको बहु आधारित धरन कहा जाता है । चित्र 5.8 में एक ऐसे धरन को दिखाया गया है । इसको सतत धरन भी कहते हैं ।

चित्र 5.8

(vi) टेक युक्त प्रास धरन : यदि प्रास धरन का मुक्त सिरा रोलर आधार पर टिका हुआ हो तो ऐसे धरन को टेक युक्त प्रास धरन कहा जाता है तथा मुक्त सिरे वाले आधार को टेक (Prop) कहा जाता है । चित्र 5.9 में इस प्रकार के धरन को दिखाया गया है ।

चित्र 5.9

धरन को उसके परिछेद के आकृति के आधार पर भी विभिन्न नामों से पुकारा जाता है । उदाहरण के लिए सामान्य रुप से प्रयोग किए जाने वाले परिच्छेदों

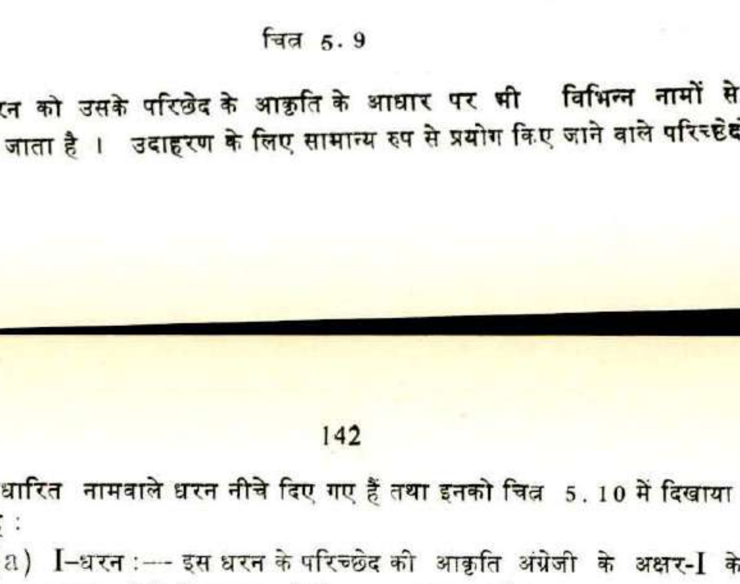
पर आधारित नामवाले धरन नीचे दिए गए हैं तथा इनको चित्र 5.10 में दिखाया गया है :

(a) I–धरन :— इस धरन के परिच्छेद की आकृति अंग्रेजी के अक्षर-I के समान होती है अतः इसको I-धरन कहा जाता है ।

(b) T-धरन :— इस धरन के परिच्छेद की आकृति अंग्रेजी के अक्षर T के समान होती है अतः इसको T-धरन कहा जाता है ।

(c) नाली दार धरन :— इस धरन का परिच्छेद नाली की आकृति का होता है ।

(d) आयताकार धरन :— इस धरन का परिच्छेद आयत होता है चित्र (5.10) में इस प्रकार के धरनों के परिच्छेद दिखाए गए है ।



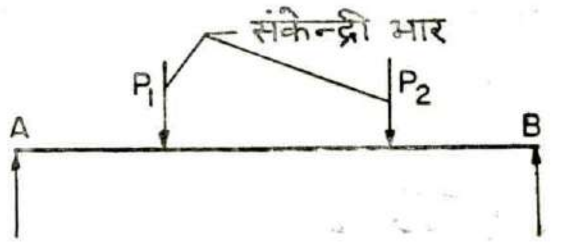
चित्र 5.10

5.3 धरन पर लगनेवाले भार का स्वरूप

धरन पर विभिन्न प्रकार का भार लगाया जा सकता है । सामान्य रुप से लगाये जाने वाले भार का वर्णन नीचे किया गया है :

(1) संकेंद्री भार : जब धरन के एक बहुत थोड़े भाग पर ही भार लगे तो इसको सन्निकट रुप में एक रेखा अथवा बिन्दु पर लगने वाला भार मान लिया जाता है तथा इस

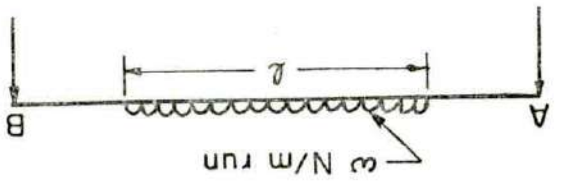
प्रकार के भार को संकेन्द्री भार कहा जाता है । धरन पर हुक से लटकने वाला भार, स्तंभ द्वारा लगने वाला भार तथा रिवेट जोड़ों से संचारित होने वाला भार इसी श्रेणी में आता है । चित्र-5.11 में इस प्रकार के भार को व्यक्त किया गया है ।



चित्र 5.11

(2) वितरित भार : संकेन्द्री भार के अतिरिक्त धरन पर वितरित भार भी लगाए जाते हैं । ऐसे भार धरन के बड़े भाग पर लगते हैं तथा भार के विस्तार (spread) को एक लंबाई द्वारा व्यक्त किया जाता है । वितरित भार दो प्रकार का हो सकता है :

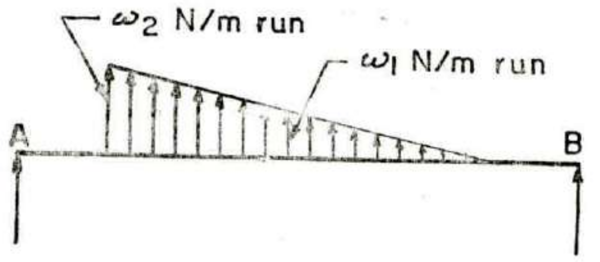
(a) एक समान वितरित भार : इस प्रकार के भार के कारण धरन के प्रति एकांक लंबाई पर भार का मान बराबर रहता है तथा संपूर्ण लंबाई पर जिसमें भार लग रहा हो यह मान अचर होता है । इस प्रकार के भार को ωN/m द्वारा व्यक्त किया जाता है । इसको सांकेतिक रुप में चित्र 5.12 में दिखाया गया है ।



चित्र 5.12

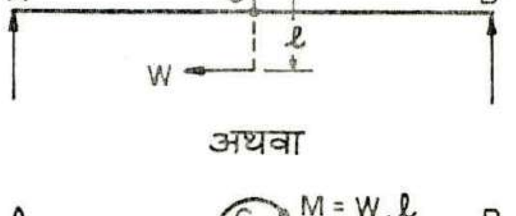
(b) एक समान चार भार : यह भार भी उपर्युक्त वर्णित भार के समान ही होता है, परन्तु इस प्रकार के भारण स्थिति में प्रति एकांक लंबाई पर भार का मान बराबर नहीं रहता तथा वह एक निश्चित मात्रा से घटता अथवा बढ़ता

जाता है चित्र 5.13 में इस प्रकार के भार को दिखाया गया है । यह ध्यान देने योग्य है कि भार का मान ωN/m व्यक्त किया गया है जो कि एक समान वितरित भार के समान है, परन्तु इस भार की तीव्रता का मान धरन के बहुत ही सीमित लंबाई के लिए स्थिर माना जा सकता है तथा भार की तीव्रता का मान धरन के लंबाई के प्रत्येक बिन्दु पर बदलता जाता है ।

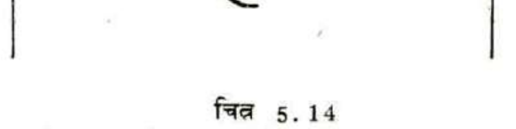


चित्र 5.13

ऊपर वर्णन किए गए भार के स्वरुप के अतिरिक्त कुछ विशेष परिस्थितियों में अन्य प्रकार के भार भी लग सकते हैं जैसे धरन के किसी बिन्दु पर आघूर्ण लग रहा हो, जैसा कि चित्र-5.14 में दिखाया गया है ।



अथवा

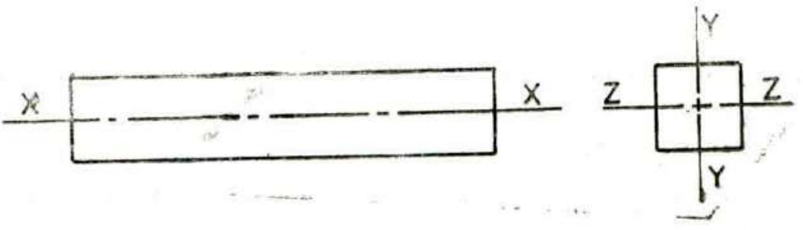


चित्र 5.14

किसी धरन पर यह आवश्यक नहीं है कि ऊपर वर्णन किए भार मे से केवल एक ही प्रकार का भार लगेगा । यह संभव है कि एक ही समय में एक से अधिक प्रकार के भार लगें अथवा धरन की लंबाई के विभिन्न भागों पर अलग-अलग प्रकार के भार लगें ।

5.4 धरन का स्थैतिक-बल विश्लेषण:

धरन पर लगने वाले बलों का विश्लेषण करने के लिए उस पर लगने वाले सभी वाह्य बलों एवं आघूर्ण की जानकारी बहुत आवश्यक है। सामान्यतः धरन पर लगने वाले बल समतलीय होते हैं। यदि धरन को सीधा माना जाय तथा वह क्षैजिज अवस्था में हो तो X, y, तथा Z अक्ष चित्र 5.15 में एक



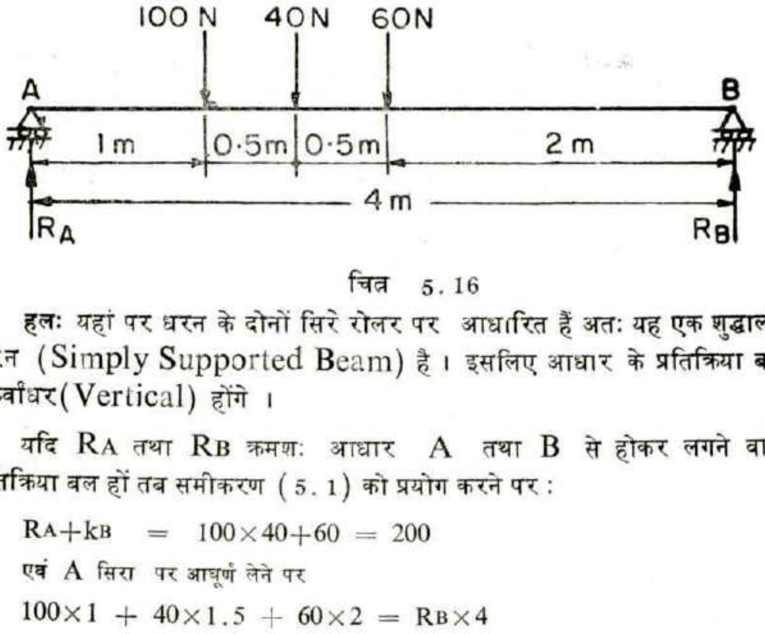
चित्र 5.15

आयताकार धरन के लिए दिखाये गए हैं। साधारण परिस्थितियों में धरन लगने वाले बल x–y समतल में स्थिर होते हैं। धरन को स्थैतिक साम्यावस्था में बनाए रखने के लिए स्थैतिक नियमों को धान में रखते हुए निम्नलिखित समीकरण लिखे जा सकते हैं :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0\\ \Sigma F_y &= 0\\ \Sigma F_z &= 0\end{aligned}\right\} \text{— — — — — — — —} \quad (5\cdot1)$$

धरन पर लगने वाले भारों के स्वरुप का वर्णन पहिले ही किया जा चुका है, तथा धरन के आधार के प्रकार भी बताए जा चुके हैं अतः धरन पर लगने वाले सब बलों को ज्ञात करने के लिए आधार से होकर प्रतिक्रिया बल को ज्ञात करना बहुत जरुरी होता है। समीकरण (5.1) की सहायता से धरन के प्रतिक्रिया बल बहुत आसानी से मालूम किए जा सकते हैं ।

उदाहरण 5.1: चित्र 5.16 में दिखाए गए धरन पर लगने वाले भार के कारण आधार से होकर लगने वाले प्रतिक्रिया बल निकालिए । धरन के भार को नगण्य माना जा सकता है ।



चित्र 5.16

हलः यहां पर धरन के दोनों सिरे रोलर पर आधारित हैं अतः यह एक शुद्धालंब धरन (Simply Supported Beam) है। इसलिए आधार के प्रतिक्रिया बल ऊर्ध्वाधर (Vertical) होंगे ।

यदि R_A तथा R_B क्रमशः आधार A तथा B से होकर लगने वाले प्रतिक्रिया बल हों तब समीकरण (5.1) को प्रयोग करने पर :

$R_A + k_B = 100\times40+60 = 200$

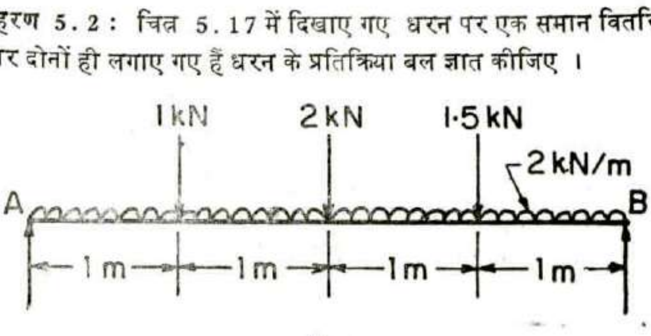
एवं A सिरा पर आघूर्ण लेने पर

$100\times1 + 40\times1.5 + 60\times2 = R_B\times4$

$R_B = 70N$

अतः $R_A = 200-70 = 130N$

उदाहरण 5.2 : चित्र 5.17 में दिखाए गए धरन पर एक समान वितरित तथा संकेन्द्री भार दोनों ही लगाए गए हैं धरन के प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए ।



चित्र 5.17

हल :

यहाँ धरन की संपूर्ण लंबाई पर 2 kN/m लंबाई के हिसाब से एक समान वितरित भार लग रहा है । प्रतिक्रिया बल ज्ञात करने के लिए इस बल को $2 \times 4 = 8$ kN का धरन के मध्य में लगने वाला संकेन्द्री भार माना जा सकता है । अत: समीकरण (5.1) का उपयोग करने पर

$R_A + R_B = 1+2+1\cdot5+8$

अथवा $R_A + R_B = 12\cdot5$ . . . . (अ)

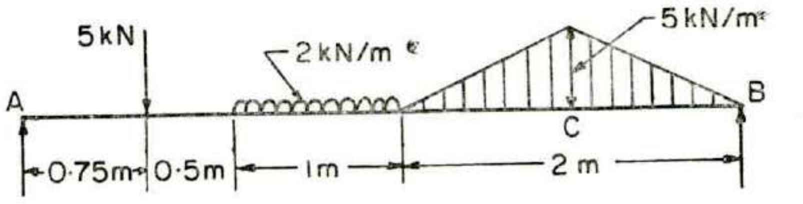
A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$R_B \times 4 = 1\times1+2\times2+1.5\times3+8\times2$

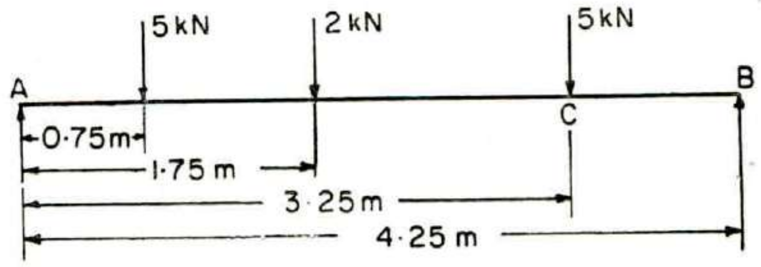
$$R_B = \frac{25.5}{4} = 6.375\text{kN}$$

$R_A = 12\cdot5 - 6\cdot375$
$= 6.125$kN

उदाहरण 5.3 : चित्र 5.10 में दिखाए गए धरन पर प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए ।



(अ)



(ब) तुल्यमान भारण आरेख

चित्र 5.18

हल : यहाँ पर हम देखते हैं कि धरन पर तीन प्रकार के भार लग रहे हैं । जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि धरन के 1m की लंबाई पर लगने वाला एक समान वितरित भार 2kN के एक संकेन्द्री भार के समतुल्य माना जा सकता है जो धरन के सिरा A से 1.75m की दूरी पर लगेगा इसी प्रकार एक समान चर भार को भी तुल्यमान संकेन्द्री भार के रूप में माना जा सकता है । यहाँ तुल्यमान संकेन्द्री भार का मान भारण की ज्यामितीय आकृति के क्षेत्रफल के बराबर होगा तथा यह संकेन्द्री भार उस ज्यामितीय आकृति के गुरुत्व केंद्र से होकर लगेगा । यहां एक समान चर भारण की ज्यामितीय आकृति एक त्रिभुज है अर्थात भार का मान धरन के B बिन्दु पर शून्य kN/m से एक समान बढ़ता हुआ C बिन्दु पर 5kN/m का हो जाता है उसके पश्चात इसका मान एक समान रूप से घटता रहता है तथा सिरा B से 2m पर इसका मान शून्य kN/m हो जाता है । उपर्युक्त वर्णित विधि के अनुसार तुल्य मान संकेन्द्री भार त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा । इस प्रकार धरन का एक तुल्य मान भारण आरेख चित्र 5.18 (ब) में दिखाया गया है तथा इससे प्रतिक्रिया बल ज्ञात करना बहुत सरल हो जाता है ।

अत: समीकरण 5.1 का प्रयोग करने पर

$R_A + R_B = 5+2+5 = 12$kN . . . . (a)

A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

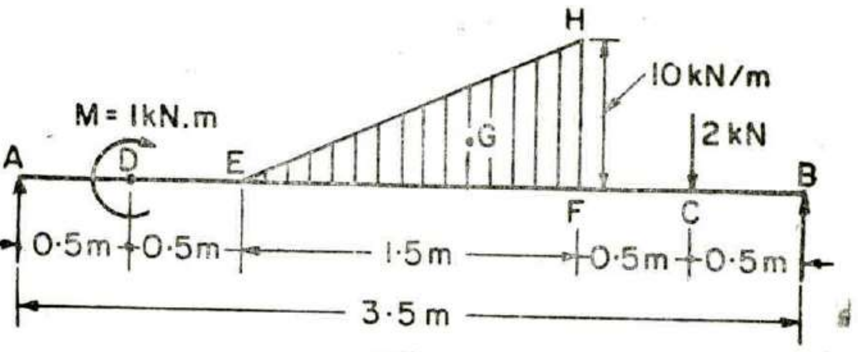
$5\times0.75+2\times1.75+5\times3.25 = R_B\times4.25$ . . . . (b)

अथवा $R_B = \dfrac{23.5}{4.25} = 5.53$kN

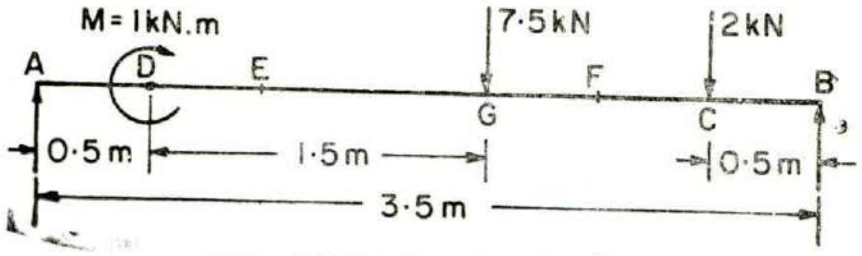
$R_A = 12-5.53 = 6.47$kN

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि त्रिभुज का गुरुत्वकेंद्र उसके आधार से $\frac{h}{3}$ की दूरी पर होगा, इसीलिए तुल्यमान आरेख में तुल्यमान संकेन्द्री भार बिन्दु C से होकर लगता हुआ दिखाया गया है ।

उदाहरण 5.4 : चित्र 5.19 में दिखाए गए धरन पर आधार के प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए ।



(अ)



(ब) तुल्यमान भारण आरेख

चित्र 5.19

हलः यहाँ पर भी धरन पर तीन प्रकार के भार लग रहे हैं, धरन के बिन्दु D पर एक आघूर्ण M लग रहा है जिसका मान 10 kN. m है इसके अतिरिक्त बिन्दु C पर 2 kN का एक संकेंद्री भार तथा EF लंबाई पर एक समान चर भार जिसका मान शून्य से 10 kN/m तक एक समान बढ़ता जाता है, लग रहा है । जैसा कि उदाहरण 5.3 में बताया गया है एक समान चर भार को एक तुल्यमान संकेन्द्री भार में बदला जा सकता है जिसका मान भार त्रिभुज EFH के क्षेत्रफल $\frac{10\times1.5}{2} = 7.5$kN के बराबर होगा तथा यह भार त्रिभुज EFH के गुरुत्व केंद्र G से होकर लगेगा । इस प्रकार धरन का तुल्यमान भारण आरेख चित्र 5.19(ब) में दिखाया गया है ।

यहाँ समीकरण (5.1) का उपयोग करने पर

$R_A + R_B = (7.5+2) = 9.5$ . . . . . . (अ)

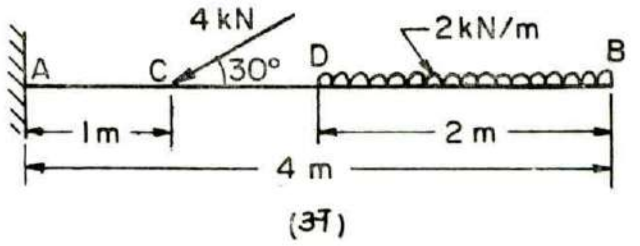
तथा A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$1 + 7.5\times2 + 2\times3 = R_B\times3.5$

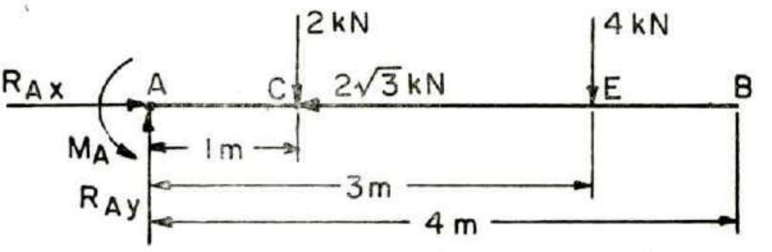
$\because R_B = \frac{22}{3.5} = 6.29$kN

$\because R_A = 3.21$kN

उदाहरण 5.5 : चित्र 5.20 में दिखाये गए प्रास धरन के बद्ध सिरे पर प्रतिक्रिया बल एवं बद्ध करने वाले आघूर्ण को ज्ञात कीजिए



(अ)



(ब) तुल्यमान भारण आरेख

चित्र 5.20

हलः यहाँ प्राप्त धरन पर दो प्रकार के बल लग रहे हैं एक तो एक समान वितरित भार तथा दूसरा बिन्दु C पर लग रहा संकेन्द्री भार । यहाँ यह ध्यान देने योग्य है । कि संकेन्द्री भार धरन के अक्ष के अभिलंब दिशा में न लगकर 30° के कोण पर लग रहा है । इस भार को बिन्दु C पर लगने वाले दो घटकों में वियोजित किया जा

सकता है। धरन के भाग BD पर लगने वाले एक समान वितरित भार को बिन्दु E पर लगने वाला एक संकेन्द्री भार माना जा सकता है। अब आधार A पर लगने वाले प्रतिक्रिया बल एवं आघूर्ण पर ध्यान दीजिए। यह पहले ही बताया जा चुका है कि प्रास के बद्ध सिरे पर प्रतिक्रिया बल तथा बद्ध करने वाला आघूर्ण दोनों ही लगते हैं यहाँ चूंकि धरन के बिन्दु C पर लगने वाला संकेन्द्री भार झुका हुआ है अतः बद्ध सिरे पर लगने वाले प्रतिक्रिया बल के भी दो घटक क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशाओं में लगने वाले क्रमशः R_{AX} तथा R_{AY} होंगे तथा बद्ध करने वाला आघूर्ण M_A लग रहा है। धरन का तुल्यमान भारण आरेख चित्र 5.20 (ब) में दिखाया गया है।

यहाँ समीकरण (5.1) का प्रयोग करने पर

$$R_{AX} = 2\sqrt{3}$$

$$R_{Ay} = 2+4=6$$

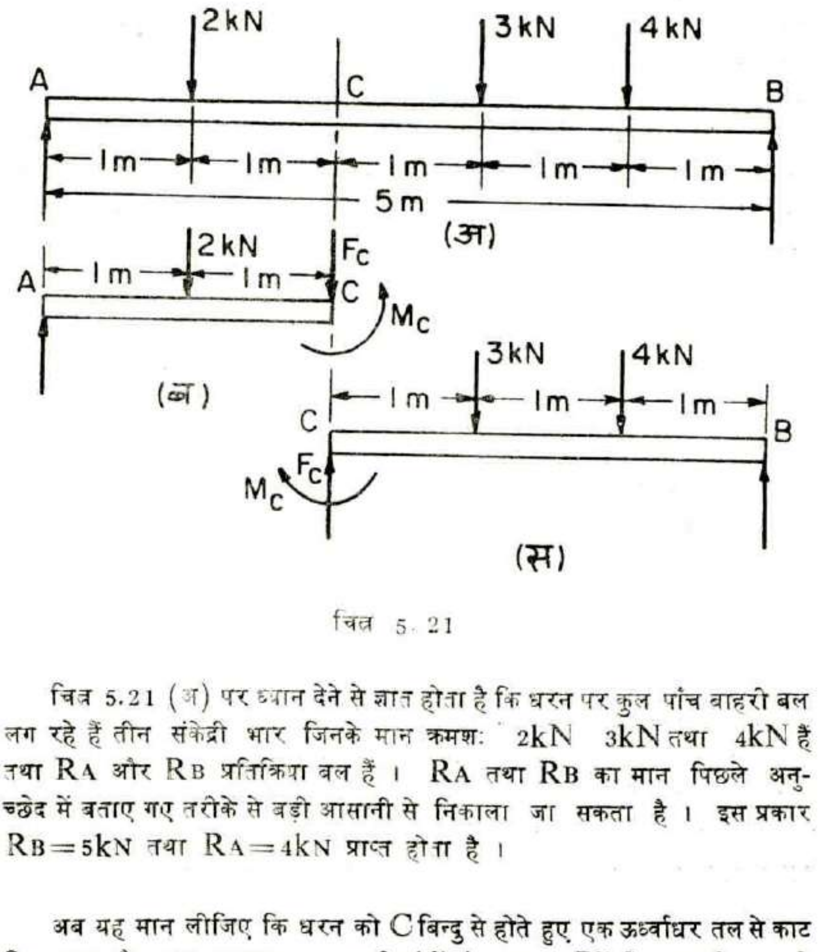
तथा A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$M_a = 2\times1 + 4\times3 = 14\text{kN.m}$$

यहाँ यह ध्यान देना चाहिए कि प्रास के बद्ध सिरे पर हमेशा ही R_{AX} नहीं लगेगा। यदि धरन पर लगने वाले सभी भार ऊर्ध्वाधर दिशा में लग रहे हों तो प्रतिक्रिया बल भी केवल R_{AY} ही होगा तथा ऐसी स्थिति में R_{AX} नहीं लगेगा। परन्तु यहाँ M_A सदा ही लगेगा। क्योंकि धरन पर बलों के कारण बद्ध सिरे पर जो भी आघूर्ण होगा उसको सन्तुलित करने के लिए बद्ध सिरे पर एक आघूर्ण उत्पन्न होगा।

5.5 धरन के किसी परिच्छेद का बल विश्लेषण

पिछले अनुच्छेद में हमने संपूर्ण धरन का बल विश्लेषण किया था तथा धरन को साम्यावस्था में बनाए रखने के लिए आवश्यक समीकरण लिखे थे। पाठक गण यह जानते ही हैं कि यदि पूरा धरन साम्यावस्था में होगा तो यदि धरन को कई खंडों में बंटा हुआ माना जाय उस दशा में प्रत्येक खंड अलग-अलग भी साम्यावस्था में होगा।



चित्र 5.21

चित्र 5.21 (अ) पर ध्यान देने से ज्ञात होता है कि धरन पर कुल पांच बाहरी बल लग रहे हैं तीन संकेंद्री भार जिनके मान क्रमशः 2kN 3kN तथा 4kN हैं तथा R_A और R_B प्रतिक्रिया बल हैं। R_A तथा R_B का मान पिछले अनुच्छेद में बताए गए तरीके से बड़ी आसानी से निकाला जा सकता है। इस प्रकार $R_B = 5$kN तथा $R_A = 4$kN प्राप्त होता है।

अब यह मान लीजिए कि धरन को C बिन्दु से होते हुए एक ऊर्ध्वाधर तल से काट दिया गया है। इस प्रकार धरन अब दो खंडों AC तथा CB में बँट जाता है तथा पूरे धरन को साम्यावस्था में बनाए रखने के लिए यह जरूरी है कि ये दोनों खंड अलग-अलग भी साम्यावस्था में हों।

चित्र 5.21 (अ) पर ध्यान दीजिए, यहाँ हम खंड के AC लिए यदि साम्यावस्था बनाये रखने के लिए आवश्यक समीकरण (5.1) पर ध्यान दें तो ज्ञात होगा कि,

$\Sigma F_y = 0$ तथा $\Sigma M_z = 0$ लागू होना चाहिए

अब यदि खंड AC पर लगने वाले भार RA तथा 2kN का संकेन्द्री भार ही माने जायें तब,

$\Sigma F_y \mp 0$ क्योंकि $R_A - 2 = 4 - 2 = 2$

इस विश्लेषण से यह स्पष्ट होता है कि जब धरन के केवल एक खंड की साम्यवस्था पर ध्यान दिया जाता है तब उस खंड पर लगने वाले केवल बाहरी बल ही संतुलन की स्थिति में नहीं रहते अतः यह ज्ञात होता है कि इस खंड पर 2kN का नीचे की दिशा में भार किसी और स्थान पर लगना चाहिए स्पष्ट है कि यह भार धरन के दूसरा खंड BC द्वारा खंड AC के परिच्छद C से होता हुआ लगेगा क्योंकि धरन को काटे जाने से पहले समतल C पर से अलग होने वाले दोनों भाग संतुलन में थे अतः BC द्वारा AC पर एक प्रतिक्रिया बल लगेगा जो C पर धरन के परिच्छेद में अपरूपण बल उत्पन्न करेगा ।

इस प्रकार अपरुपण बल तथा खंड BC द्वारा प्रतिक्रिया बल का मान बराबर होगा परन्तु दोनों की दिशायें विपरीत होंगी । चित्र 5.21(ब) में खंड AC के परिच्छेद C पर खंड BC द्वारा लगने वाले प्रतिक्रिया बल को FC से दिखाया गया है । खंड AB के परिच्छेद C पर लग रहा अपरुपण बल FC द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

उपर्युक्त वर्णन से धरन के एक खंड के किसी परिच्छेद पर अपरुपण बल (V) ज्ञात करने की विधि प्राप्त हो जाती है । इस विधि को इस प्रकार बताया जा सकता है कि जिस बिंदु पर अपरुपण बल ज्ञात करना हो तो उस ओर के सिरे तथा उस बिंदु के बीच लगने वाले सभी बाह्य बलों का बीजीय योग प्राप्त करने पर उस परिच्छेद पर अपरुपण बल प्राप्त हो जायगा । यहाँ यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि चित्र 5.21 (ब) में परिच्छेद C पर FC को दिखाया गया है को क्योंकि खंड AC को साम्यावस्था में बनाये रखने के लिए FC ही लगेगा तथा FC के परिणामस्वरूप परिच्छेद में आंतरिक बल जिसे अपरुपण बल कहा जाता है, उत्पन्न होगा तथा दोनों के मान बराबर एवं दिशाये विपरीत होंगी ।

अब खंड AC के लिए समीकरण (5.1) के दूसरे भाग पर ध्यान दीजिए जिसके अनुसार $\Sigma Fz = 0$ होना चाहिए ।

यदि खंड AC के बिन्दु C पर इस समीकरण को लिखें तब,

$RA \times 2 - 2 \times 1 = 4 \times 2 - 2 \times 1 = 6$

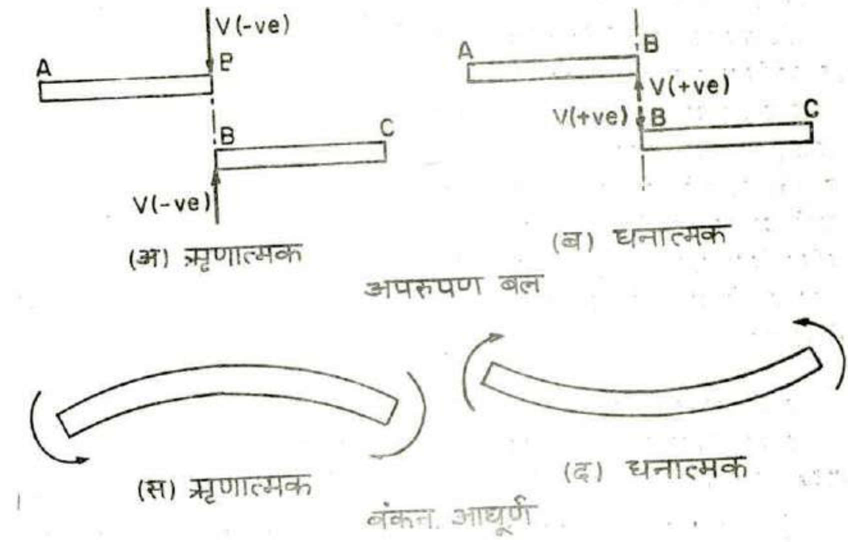
यहाँ फिर प्राप्त होता है कि खंड AC पर लग रहे केवल बाह्य बलों द्वारा समीकरण $\Sigma Mr = 0$ सिद्ध नहीं होता है अतः $4 \times 2 - 2 \times 1 = 6$kN.m का एक आघूर्ण वामावर्त (Anticlockwise direction) लगेगा इसको प्रतिरोध आघूर्ण कहते हैं जो बाह्य आघूर्ण द्वारा संतुलित होगा । धरन के इस परिच्छेद पर लग रहे बाह्य आघूर्ण को बंकन अघूर्ण कहा जाता है । अतः धरन के किसी खंड के एक परिच्छेद पर बंकन आघूर्ण मालूम करने का एक आसान तरीका प्राप्त हो जाता है जिसको इस प्रकार कहा जा सकता है । धरन के किसी परिच्छेद पर बंकन आघूर्ण ज्ञात करने के लिए उस परिच्छेद के सापेक्ष उसके एक ओर के बाहरी बलों के आघूर्ण का बीजीय योग हो उस परिच्छेद पर बंकन आघूर्ण होता है । यह बंकन आघूर्ण उस परिच्छेद के प्रतिरोध आघूर्ण के बराबर होता है । दोनों का मान बराबर परन्तु दिशा विपरीत होती है ।

अभी तक हमने धरन के खड AC पर ही ध्यान दिया था, अब खंड BC पर ध्यान दीजिए । RB का मान 5 kN है अब यदि चित्र 5.21(स) को ध्यान में रखते हुए समीकरण $\Sigma Fy = 0$ तथा बिन्दु C के सापेक्ष $\Sigma Mz = 0$ लिखा जाय तो अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण के वही मान प्राप्त होंगे जो परिच्छेद C के लिए खड AC में प्राप्त हुए थे परन्तु उनकी दिशायें विपरीत होंगी अब यदि AC तथा BC को परस्पर मिला दिया जाय तो परिच्छेद C साम्यावस्था में हो जायगा तथा संपूर्ण धरन के लिए समीकरण $\Sigma Fy = 0$ तथा $\Sigma Mz = 0$ सिद्ध हो जायँगे । अतः धरन के किसी परिच्छेद पर अपरुपण बल अथवा बंकन आघूर्ण ज्ञात करने के लिए चाहे परिच्छेद के बायें तरफ के सभी बाह्य बलों को सक्रिय मानते हुए अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण ज्ञात किए जाय अथवा परिच्छेद के दाहिने ओर के सभी बाह्य बलों को सक्रिय मानते हुए निकाला जाय, मान एक ही प्राप्त होगा । यदि धरन के विभिन्न परिच्छेदों पर अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण ज्ञात करना हो तो सदैव परिच्छेद के एक ही तरफ के बाह्य बलों को सक्रिय मानते हुए समीकरण $\Sigma Mz = 0$ तथा $\Sigma Fy = 0$ की सहायता से क्रमशः बंकन आघूर्ण तथा अपरुपण बल का मान ज्ञात करना चाहिए ।

5.6 अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण का बीजीय चिन्ह

यदि किसी परिच्छेद पर उसके बायें ओर के बाह्य बलों के कारण अपरुपण बल की दिशा ऊपर की ओर हो तो यह अपरुपण बल धनात्मक कहलायेगा तथा यदि यह बल नीचे की दिशा में हो तो ऋणात्मक मान जायेगा । परन्तु उसी परिच्छेद पर यदि दाहिने ओर के बाह्य बलों के कारण अपरुपण बल की दिशा नीचे की ओर हो तो धनात्मक तथा ऊपर की ओर होने पर ऋणात्मक माना जाता है । यह इसलिए भी आवश्यक है कि धरन के किसी

परिच्छेद पर अपरुपण बल का मान एक ही होगा चाहे बाँये ओर के बाह्य बल सक्रिय माने जाय अथवा दाहिने ओर के ।



चित्र 5.22

इसी प्रकार यदि किसी परिच्छेद पर बाह्य बलों के कारण बंकन आघूर्ण धरन में इस प्रकार का बंकन उत्पन्न करे कि धरन का वक्रता केंद्र ऊपर की ओर स्थित हो तो इसको धनात्मक माना जाता है तथा यदि वक्रता केंद्र नीचे की ओर हो तो इसको ऋणात्मक माना जाता है यह इस बात पर निर्भर नहीं करता कि धरन बायें ओर के बलों के कारण वक्र होता है अथवा दाहिने ओर के बलों के कारण ।

धरन के विभिन्न परिच्छेदों पर अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण ज्ञात करने के लिए इसको आरेख के रूप में व्यक्त करना सुविधाजनक रहता है तथा आरेख बनाते समय बीजीय चिह्नों पर विशेष रूप से ध्यान दिया जाना चाहिए । चित्र 5.22 में अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण के बीजीय चिह्नों को स्पष्ट किया गया है ।

5.7 अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख :

धरन को डिजाइन करते समय उसमें लगने वाले अधिकतम अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण की आवश्यकता पड़ती है, यद्यपि सरल भारण परिस्थितियों में इनका मान सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है; परन्तु जब धरन पर एक से अधिक प्रकार के बल उसके विभिन्न बिन्दुओं पर लग रहे

13—23 M. of HRD/ND/95

हों तब अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण के मान को धरन की लंबाई के प्रत्येक बिन्दु पर ज्ञात करना आवश्यक हो जाता है, जिससे इनके अधिकतम मान एवं धरन का वह परिच्छेद जहाँ पर ये लग रहे हों, ज्ञात किया जा सके । इसके लिए धरन की लंबाई को आधार मानकर उसके विभिन्न बिन्दुओं पर अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण का मान अंकित किया जाता है । धरन की लंबाई तथा अपरुपण बल द्वारा उपर्युक्त विधि से प्राप्त आरेख को अपरुपण बल आरेख तथा धरन की लंबाई एवं बंकन आघूर्ण द्वारा प्राप्त आरेख को बंकन आघूर्ण आरेख कहा जाता है । ये आरेख बनाते समय अनुच्छेद 5.6 में बताए गए बीजीय चिह्न को ध्यान में रखना चाहिए तथा धनात्मक मानों को धरन की लंबाई के रेखा के ऊपर एवं ऋणात्मक मानों को इस रेखा के नीचे अंकित किया जाना चाहिए । धरन की लंबाई के किसी भी बिन्दु पर अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण को प्राप्त करने की विधि को अनुच्छेद 5.5 में विस्तृत रूप से वर्णन किया गया है ।

यद्यपि अपरुपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख प्राप्त करने की विधि का उल्लेख ऊपर किया जा चुका है परन्तु फिर भी पाठकों की सुविधा हेतु इस प्रकार का आरेख बनाने की क्रमिक विधि नीचे दी जा रही है :—

(i) धरन का स्वच्छ चित्र बनाइये जिस पर सभी बाह्य बल स्पष्ट रूप से अंकित हों तथा सभी दूरियों को इस चित्र पर स्पष्ट रूप से अंकित कर दीजिए ।

(ii) यदि धरन पर कोई बल उसके अक्ष के अभिलम्ब न लग कर किसी अन्य कोण पर लग रहा हो तो इस बल को उस बिन्दु पर दो घटकों में वियोजित कर लीजिए तथा अनुच्छेद 5.4 में बताई गई विधि से प्रतिक्रिया बलों का मान ज्ञात कर लीजिए तथा इस मान को ऊपर प्राप्त किए गए चित्र में अंकित कर दीजिए ।

(iii) अब (i) में खींचे गए चित्र में धरन के सिरों से होती हुई ऊर्ध्वधर रेखायें खींचिए, इनके मध्य की दूरी धरन की लंबाई को व्यक्त करती है तथा ऊपर खींचे गए चित्र के नीचे कुछ दूरी छोड़कर एक क्षैतिज रेखा खींचिए जो ऊर्ध्वाधर रेखा को काटे; यह रेखा अपरुपण बल आरेख के आधार को व्यक्त करेगी; दूसरे शब्दों में यह धरन की लंबाई को व्यक्त करेगी ।

(iv) अब धरन के दाहिने अथवा बायें किसी सिरे से आरंभ कर उसके विभिन्न बिन्दुओं पर अपरुपण बल का मान ज्ञात कीजिए । इन बिन्दुओं को ऊपर बताई गई क्षैतिज रेखा पर अंकित करते रहिए तथा इन बिन्दुओं पर प्राप्त अपरुपण बल के मान को इस क्षैतिज रेखा के अभिलंबत आलेखित

करते रहिए । इसके लिए कोई समुचित स्केल माना जा सकता है । अपरुपण बल के मान को आलेखित करते समय उसके बीजीय चिह्न पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है । धनात्मक मान को क्षैतिज रेखा के ऊपर तथा ऋणात्मक मान को क्षैतिज रेखा के नीचे खींचिए । इसी प्रकार विभिन्न बिन्दुओं पर अपरुपण बल के मान को क्षैतिज रेखा पर आलेखित करते हुए धरन के दूसरे सिरे तक इस विधि को जारी रखिए ।

(v) अब धरन के विभिन्न बिन्दुओं पर (एक सिरे से आरंभ होकर दूसरे सिरे तक) अपरुपण बल को व्यक्त करने वाले बिन्दुओं को सरल रेखा अथवा उचित वक्र से जोड़ दीजिए यह अपरुपण बल आरेख कहलायेगा ।

(vi) बंकन आघूर्ण आरेख बनाने के लिए अब अपरुपण बल आरेख के नीचे कुछ दूरी पर एक अन्य क्षैतिज रेखा खींचिए जो धरन के सिरों से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा को काटे । यह रेखा बंकन आघूर्ण आरेख की आधार रेखा होगी तथा धरन की लंबाई व्यक्त करेगी ।

(vii) अब (iv) में बताई गई विधि के अनुसार जिस प्रकार धरन के एक सिरे से आरंभ कर दूसरे सिरे तक विभिन्न बिन्दुओं पर अपरुपण बल ज्ञात किया गया था यहाँ इन बिन्दुओं पर बंकन आघूर्ण ज्ञात कीजिए एवं इनको भी अपरुपण बल ही की भाँति आलेखित कीजिए तथा विभिन्न बिन्दुओं पर बंकन आघूर्ण को व्यक्त करने वाले बिन्दुओं को परिस्थिति के अनुसार सरल रेखा अथवा उचित वक्र से मिला दीजिए यह बंकन आघूर्ण आरेख होगा । अपरुपण बल आरेख के समान ही यहाँ भी बीजीय चिह्न का विशेष ध्यान रखना चाहिए तथा धनात्मक मान को क्षैतिज रेखा के ऊपर एवं ऋणात्मक मान को नीचे खींचना चाहिए ।

अपरुपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख के विषय में कुछ ध्यान रखने योग्य बातें :—

(i) शुद्धालंब धरन में उसके सिरों पर बंकन आघूर्ण शून्य होता है ।

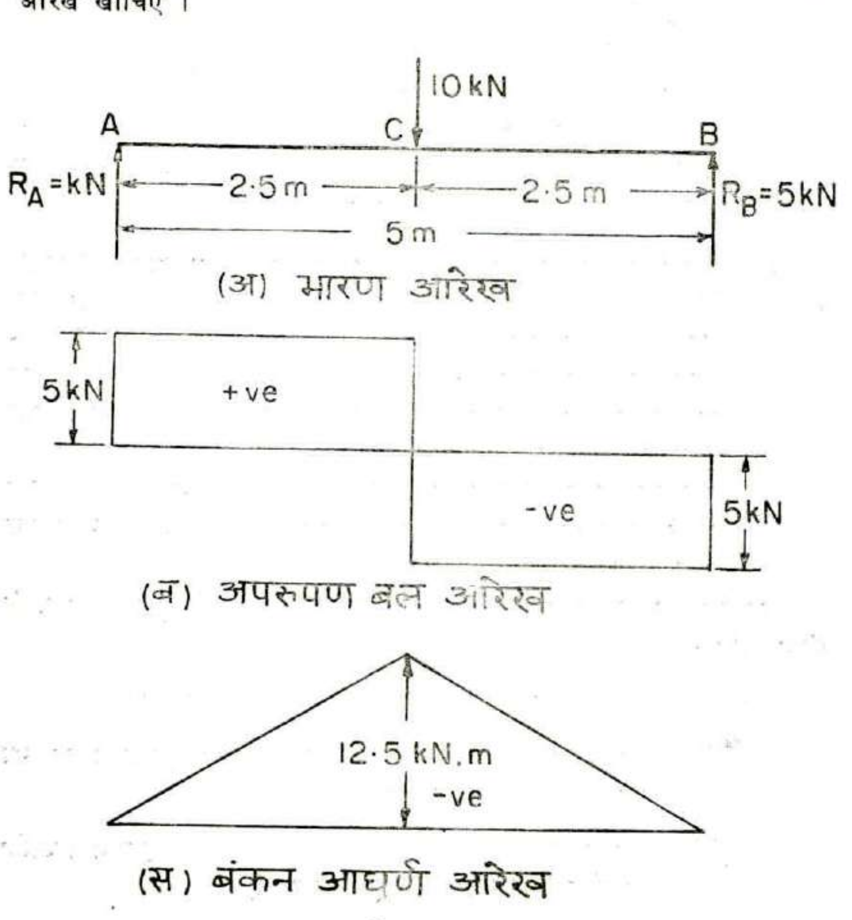
(ii) धरन के जिस बिन्दु पर अपरुपण बल शून्य होता है उस स्थान पर बंकन आघूर्ण अधिकतम होता है ।

(iii) धरन के जिस बिन्दु पर बंकन आघूर्ण के बीजीय चिह्न में परिवर्तन होता है उसे अवनमन बिन्दु कहा जाता है ।

(iv) यदि धरन पर वितरित भार लग रहा हो तो प्रतिक्रिया बल निकालने के लिए प्रयोग किए जानेवाले तुल्यमान भारण आरेख को अपरुपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख खींचने के लिए नहीं प्रयोग किए जाने चाहिए ।

(v) धरन के दो आधारों के बीच की दूरी को विस्तृति कहा जाता है । बंकन आघूर्ण एवं अपरुपण बल ज्ञात करते समय सामान्यतः उन परिच्छेदों पर अवश्य ध्यान दिया जाता है जहाँ संकेन्द्री भार अथवा आघूर्ण लग रहे हों ।

उदाहरण 5.6 : एक शुद्धालंब धरन जिसकी विस्तृति 5 m है, के मध्य बिन्दु पर एक 10kN का संकेंद्री भार लग रहा है । इसका अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख खींचिए ।



चित्र 5.23

हल : भारण आरेख चित्र 5.23 (अ) में दिखाया गया है । यहाँ प्रतिक्रिया बल ज्ञात करने के लिए,

$R_A + R_B = 10$ . . . . (a)

तथा A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$10 \times 2.5 = R_B \times 5$ . . . . (b)

$R_B = 5$ KN अतः $R_A = 5$ kN

ये प्रतिक्रिया बल सममिति को ध्यान रखते हुए सीधे ही ज्ञात किए जा सकते थे क्योंकि भार मध्य में होने के कारण दोनों आधार पर प्रतिक्रिया बल ऊपर की दिशा में एवं बराबर मान का होगा ।

अब अपरुपण बल आरेख बनाने के लिए बायें सिरे से आरंभ करने पर तथा पहले बताए गए नियम के अनुसार अपरुपण बल के बीजीय चिह्न का ध्यान रखते हुए हम लिख सकते हैं कि,

$V_A = +5$ kN

तथा A एवं C के मध्य कहीं भी अपरुपण बल ज्ञात किया जाय वह + 5KN ही होगा, अतः आधार रेखा के ऊपर किसी समुचित स्केल के अनुसार उस अपरुपण बल को चित्र 3.22(ब) में दिखाया गया है,

$V_c = +5 - 10 = -5$ kN

बिन्दु C पर अपरुपण बल -5KN हो जाता है । यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि परिच्छेद C के थोड़ा बाये स्थित परिच्छेद पर अपरुपण बल + 5 kN है तथा परिच्छेद C के थोड़ा दाये स्थित परिच्छेद पर अपरुपण बल —5 kN हो जाता हैं परन्तु परिच्छेद C पर अपरुपण बल का मान +5kN से -5kN हो जाता है । ऐसे धरन पर जो शुद्धालंब प्रकार का हो तथा जहाँ एक ही संकेन्द्री भार लग रहा हो वहीं भार के लगनेवाले बिन्दु पर अपरुपण बल के बीजीय चिह्न में परिवर्तन होता है । संपूर्ण अपरुपण बल आरेख चित्र 5.23(स) में दिखाया गया है धरन के खंड B में फिर अपरुपण बल का मान -5kN रहता है ।

बंकन आघूर्ण आरेख बनाने के लिए फिर चित्र 5.22 (अ) पर ध्यान दीजिए तथा सिरा A से आंरभ करने पर एवं बीजीय चिह्न के नियम को ध्यान में रखने हुए,

$M_A = 0$

$M_c = 5 \times 2.5 = 12.5$ kN/m

यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि यदि धरन के खंड AC के मध्य किसी बिन्दु पर बंकन आघूर्ण ज्ञात किया जाय तो वह उस बिन्दु की सिरा से दूरी पर निर्भर करेगा अतः A से C तक अपरुपण बल का मान बराबर सरल रेखीय रूप में बढ़ता रहेगा ।

अब यदि BC के मध्य किसी बिन्दु पर बंकन आघूर्ण निकाला जाय तो हम देखें कि उस बिन्दु के सापेक्ष R_A का आघूर्ण तो धनात्मक होगा परंतु C पर लगने वाले भार के कारण आघूर्ण ऋणात्मक होगा तथा उस परिच्छेद पर परिणामी आघूर्ण का मान कम होगा । इस प्रकार हम देखेंगे कि B तथा C के मध्य बंकन आघूर्ण बराबर घटता चला जायगा एवं यदि B पर आघूर्ण ज्ञात करें तो $M_B = 0$ होगा । इस प्रकार क्षैतिज रेखा के ऊपर बंकन आघूर्ण के मान को अंकित कर देने से बंकन आघूर्ण आरेख प्राप्त हो जाता है । यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि अधिकतम बंकन आघूर्ण का मान वहीं अधिकतम होगा जहाँ पर अपरुपण बल के मान के बीजीय चिह्न में परिवर्तन होता है। यह बात पाठक को याद रखनी चाहिए । पाठकों को आरेख में अंकित बीजीय चिह्न पर विशेष ध्यान देना चाहिए, चित्र 5.23(स) में बंकन आघूर्ण आरेख को दिखाया गया है ।

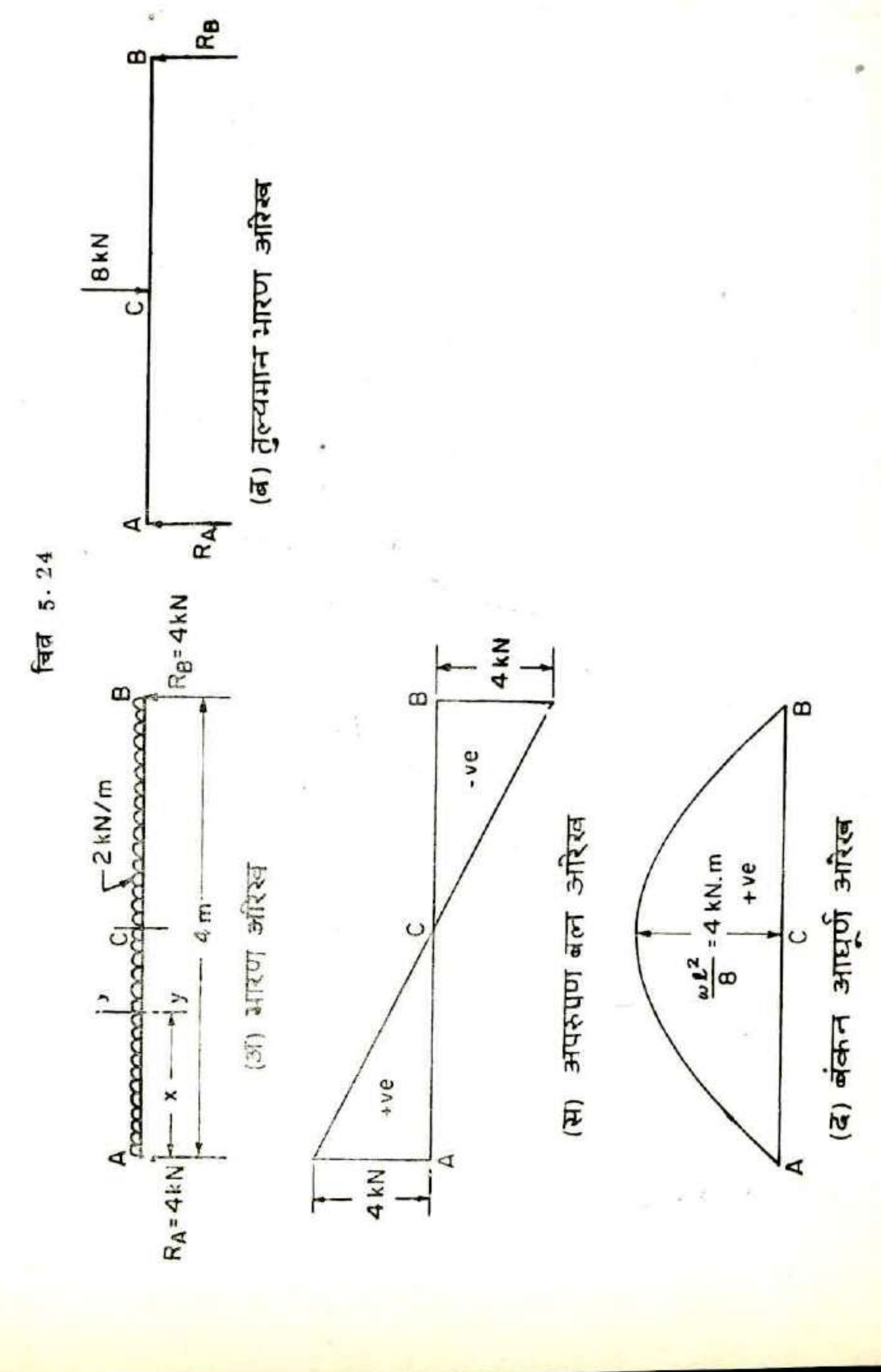
उदाहरण 5.7 : एक शुद्धालंब धरन पर जिसकी विस्तृति 4 m है एक 20 KN/m का एक समान वितरित भार लग रहा है । इसका अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख बनाइये ।

हल : यहाँ संपूर्ण धरन पर कुल वितरित भार 2 × 4=8 kN लगेगा चूंकि यह संपूर्ण धरन पर एक समान वितरित है अतः इसको धरन के मध्य बिन्दु C पर लगनेवाला संकेन्द्री भार 8 kN का माना जा सकता है तथा तुल्यमान भारण आरेख चित्र 5.24 (ब) में दिखाया गया है, जिससे प्राप्त होता है ।

$R_A = R_B 4$kN यह भार के सममिति को ध्यान में रखते हुए सीधे ही लिखा जा सकता है । **यहाँ यह स्मरण रखना चाहिए कि तुल्यमान भारण आरेख को केवल प्रतिक्रिया बल ज्ञात करने के लिए ही प्रयोग करना चाहिए न कि अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण ज्ञात करने के लिए**

अब अपरुपण बल ज्ञात करने के लिए चित्र 5.23 (ब) पर ध्यान दीजिए,

$V_A = +4$KN



अब धरन के किसी परिच्छेद y-y पर जो सिरा A से x दूरी पर स्थित है ध्यान दीजिए परिच्छेद y-y के बायें वाले धरन के खंड में निम्नलिखित भार लग रहे हैं :-

(i) $R_A = +4$kN

(ii) यदि एक समान वितरित भार के मान को wkN/m मान लिया जाय तो इस खंड पर (w×x)kN का भार नीचे की ओर लगेगा ।

अतः $V_x = +4 - w \times x$ (अ)

उपर्युक्त समीकरण से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे X का मान बढ़ता जायेगा वैसे ही वैसे अपरुपण बल का मान घटता चला जायेगा तथा अपरुपण बल सरल रेखीय रूप में घटता रहेगा । यदि धरन की लंबाई l मान लें तो स्पष्ट है कि $R_A = R_B = \frac{wl}{2}$ होगा ।

इस प्रकार यदि $x = l/2$ हो तो

$$V_x = \frac{wl}{2} - \frac{wl}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (ब)$$

अर्थात धरन के मध्य बिन्दु पर अपरुपण बल शून्य होगा । समीकरण (अ) में भी हम देखेंगे कि यदि $x = 2$m हो तब,

$V_x = +4 - 2\times2 = 0$ हो जाता है ।

अब यदि X का मान $l/2$ से अधिक हो तब हम देखेंगे कि इस परिच्छेद पर अपरुपण बल का मान ऋणात्मक होगा तथा जैसे-जैसे X का मान बढ़ता जायेगा वैसे वैसे अपरुपण बल के ऋणात्मक मान में भी वृद्धि हो जायेगी तथा सिरा B पर

$$V_B = \frac{wl}{2} - wl = -\frac{wl}{2} \text{ होगा} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (स)$$

समीकरण (a) में $x = 4$m रखने पर हम देखेंगे कि

$V_B = +4 - 2 \times 4 = -4$kN होगा । इस प्रकार

अपरुपण बल आरेख को चित्र 5.24(स) में दिखाया गया है तथा बीजीय चिह्न स्पष्ट रूप से अंकित किए गए हैं ।

अब बंकन आघूर्ण ज्ञात करने के लिए की परिच्छेद y—y पर ध्यान दीजिए जिसकी दूरी सिरा A से x है ।

अतः

$$M_y = R_A x - wx.\ \frac{x}{2} = R_A.\ x - \frac{wx^2}{2} \qquad (द)$$

यहाँ w धरन पर लगने वाला प्रति मीटर पर भार है । समीकरण (द) में परिच्छेद y—y के बाँये भाग पर एक समान वितरित भार को सिरा A से x की दूरी पर लगने वाला w. x का तुल्यमान संकेन्द्री भार माना गया है । स्पष्ट है कि (द) एक परिवलय (Parabola) के समीकरण को व्यक्त करता है अतः बंकन आघूर्ण आरेख एक परिवलय होगा ।

समीकरण (द) से यदि $x = 0$ है तब

$M_A = 0$; यदि $x = \iota/2$ है। तब

M_c = धरन के मध्य बिन्दु पर बंकन आघूर्ण

$$= \frac{\omega\iota}{2}\frac{\iota}{2} - \frac{\omega\iota^2}{8}$$

$$= \frac{\omega\iota^2}{8}$$

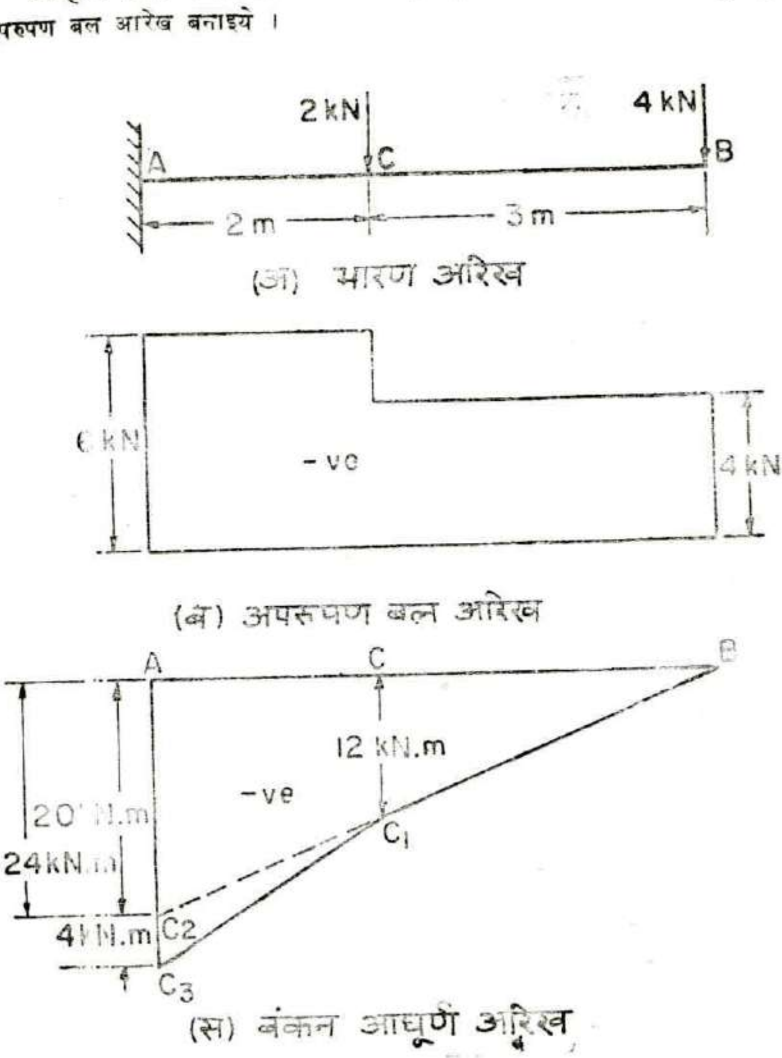
चूंकि यहाँ $\iota = 4m$ है अतः

$$M_c = \frac{2 \times 16}{8} = 4\,kN.m$$

एवं $M_B = \frac{W\iota}{2}\iota - W.\iota.\frac{\iota}{2} = 0$

अतः इस प्रकार की भारण अवस्था में बंकन आघूर्ण आरेख एक परिवलय होता है तथा अधिकतम बंकन आघूर्ण धरन के मध्य बिन्दु पर लगता है जिसका मान $\frac{wl^2}{8}$ होता है । यहाँ बंकन आघूर्ण आरेख बीजीय चिह्न सहित चित्र 5.24(द) में दिखाया गया है ।

उदाहरण 5.8 : चित्र 5.25 में दिखाए गए प्राप्त धरन का बंकन आघूर्ण एवं अपरूपण बल आरेख बनाइये ।



चित्र 5.25

हल : यहाँ प्राप्त धरन के बिन्दु B तथा C पर क्रमशः 4kN तथा 2kN का भार लग रहा है । इस प्रश्न में अपरूपण बल ज्ञात करने के लिए हम धरन के किसी

परिच्छेद के दाहिने ओर लगने वाले भारों पर ध्यान देंगे अतः अपरुपण बल का बीजीय चिह्न पहले प्रश्नों से भिन्न होंगे। पहले बताए गए नियम को ध्यान में रखने से यह स्पष्ट हो जायेगा ।

$V_B = +4kN$

चूंकि धरन के बिन्दु B तथा C के मध्य कोई अन्य भार नहीं लग रहा है । अतः उपर्युक्त प्राप्त अपरुपण बल का मान C तक अचर (Constant) रहेगा

$V_c = +4 + 2 = +6kN$

तथा यह मान C से A तक अचर रहेगा । अपरुपण बल आरेख चित्र 5.25 (ब) में दिखाया गया है ।

इसी प्रकार बंकन आघूर्ण के लिए,

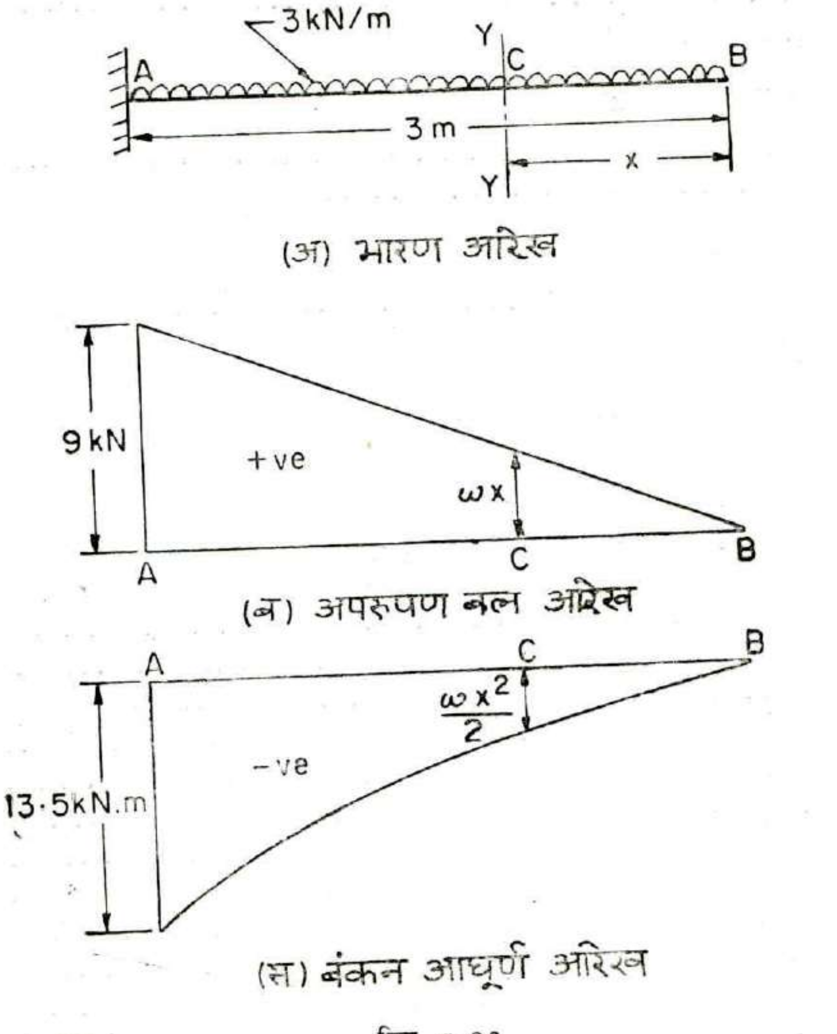
$M_B = 0;$

$M_c = 4 \times 3 = 12kN\text{-}m$

तथा $M_A = 4 \times 5 + 2 \times 2 = 24kN\text{-}m$

यहाँ बंकन आघूर्ण BC के मध्य सरल रेखा BC_1 द्वारा व्यक्त होता है तथा AC के मध्य सरल रेखा C_1C_2 द्वारा व्यक्त होता है । यदि धरन पर C पर लगने वाला 20kN का भार न होता तो AC के मध्य बंकन आघूर्ण बिन्दुकित रेखा C_1C_2 द्वारा व्यक्त होता तथा C_1C_2 केवल BC_1 के आगे बढ़ाने से ही प्राप्त होती है परन्तु C पर 20kN का अतिरिक्त भार होने के कारण सरल रेखा BC_1 का झुकाव बदल जाता है तथा इस खंड में बंकन आघूर्ण C_1C_3 द्वारा व्यक्त होता है । यह स्पष्ट है कि बंकन आघूर्ण आरेख किसी स्केल पर बनाया जाता है । अतः यदि धरन के किसी बिन्दु पर बंकन आघूर्ण ज्ञात करना हो तो बंकन आघूर्ण आरेख की आधार रेखा BC पर पहले वह बिन्दु अंकित किया जाना चाहिए उसके पश्चात् इस बिन्दु पर लंब इस प्रकार उठाना चाहिए कि वह आरेख को काटे लंब की लंबाई को स्केल द्वारा परिवर्तित करने पर उस बिन्दु पर बंकन आघूर्ण का मान प्राप्त हो जायेगा । चित्र 5.25 (स) में बंकन आघूर्ण आरेख को स्पष्ट किया गया है ।

उदाहरण 5.9 : चित्र में दिखाए गए प्राप्त धरन के लिए अपरुपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख बनाइये ।



हल :

चित्र 5.26

धरन के किसी परिच्छेद y–y पर ध्यान दीजिए जिसकी दूरी सिरा B से x मीटर है । अतः

$V_e = w.x$ (यहाँ w वितरित भार का मान है)

स्पष्ट है कि उपर्युक्त समीकरण एक सरल रेखा का समीकरण है। अतः यदि $x = 0$,

$V_B = 0$ तथा यदि $x = l$ तब

$V_A = wl = 3\times3 = 9kN$

चित्र 5.26 (ब) की भाँति अपरुपण बल आरेख आसानी से खींचा जा सकता है।

इसी प्रकार बंकन आघूर्ण आरेख के लिए

$$M_c = w.x.\frac{x}{2} = \frac{wx^2}{2}$$

यह एक परिवलय का समीकरण है अतः

यदि $x = 0$ तब $M_B = 0$

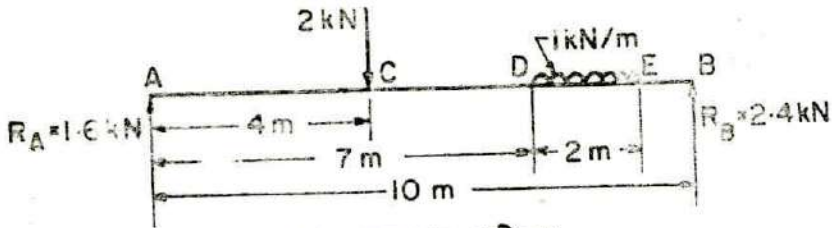
तथा यदि $x = l$ तब

$$M_A = \frac{\omega l^2}{2} = \frac{3\times(3)^2}{2} \quad 13.5kN.m$$

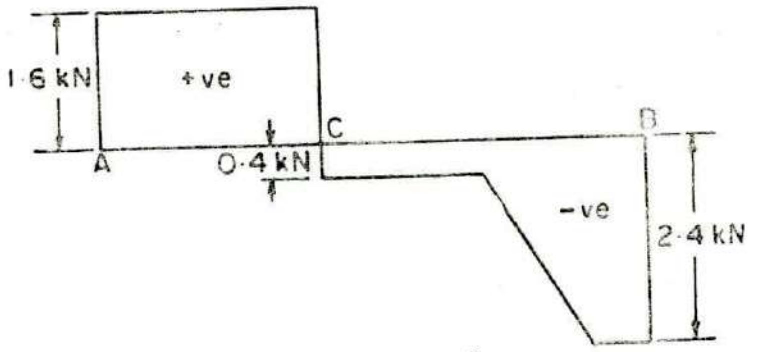
बंकन आघूर्ण आरेख को चित्र 5.25 (स) में दिखाया गया है।

उदाहरण 5.10 : एक 10m लंबे शुद्धालंब धरन पर उसके बायें सिरे से 4m की दूरी पर एक 2 kN का संकेन्द्री भार तथा 7m से 9m की दूरी तक 1kN का एक समान वितरित भार लग रहा है। इस धरन का अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख स्वच्छतापूर्वक बनाइये।

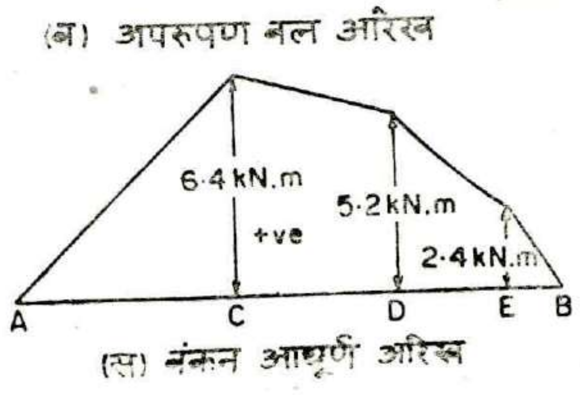
(प्रविधिक परिषद् 1966)



(अ) भारण आरेख



(ब) अपरुपण बल आरेख



(स) बंकन आघूर्ण आरेख

चित्र 5.27

हल :

$R_A + R_B = 2 + 1 \times 2 = 4$ . . . . . (अ)

तथा A सापेक्ष के आघूर्ण लेने पर

$2 \times 4 + 2 \times 1 \times 8 = R_B \times 1$ . . . . . . (ब)

अतः $R_B = 2.4kN$ तथा $R_A = 1.6kN$

अब अपरुपण बल आरेख के लिए बायें सिरे से आरंभ करने पर

$V_A = +1.6kN$ (A से C तक यह मान अचर रहता है)

$V_c = +1.6 - 2 = -0.4kN$ (C से D तक यह मान अचर रहता है)

$V_E = -0.4 - 2 = -2.4kN$ (D से E तक सरल रेखीय परिवर्तन होता है)

$V_B = -2.4kN$ (E से B तक यह मान अचर रहता है.)

अपरुपण बल आरेख चित्र 5.27(ब) में दिखाया गया है ।

अब बंकन आघूर्ण आरेख के लिए

$M_A = 0$

$M_c = +1.6 \times 4 = +6.4kN\text{-}m$ (A से C तक सरल रेखीय रूप से बढ़ता है)

$M_D = 7 \times 1.6 - 3 \times 2 = +5.2kN\text{-}m$ (C से D तक सरल रेखीय रूप से बढ़ता है)

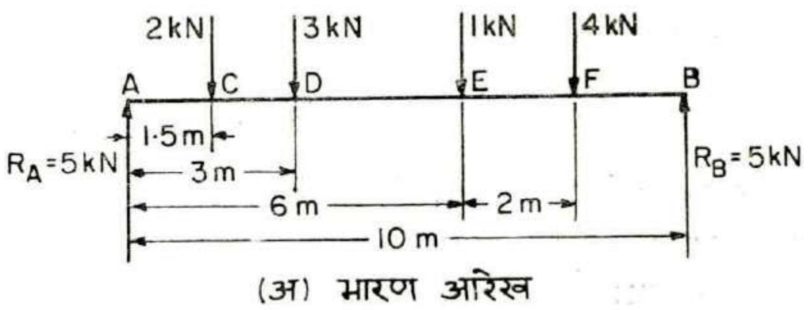
$M_E = 9 \times 1.6 - 5 \times 2 - 2 \times 1 = +2.4kN\text{-}m$ (D से E तक परिवलय के अनुसार घटता है)

$M_B = 0$ (E से B तक सरल रेखीय रूप से घटता है।)

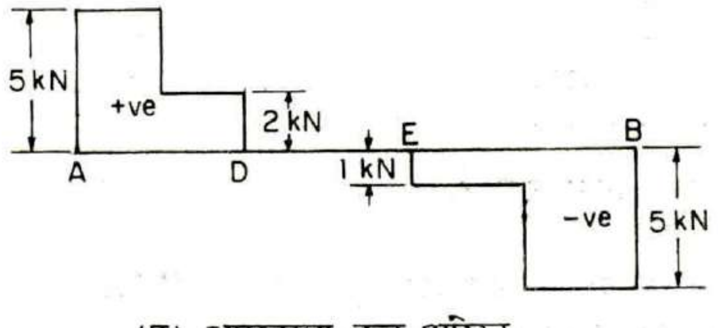
इस प्रकार बंकन आघूर्ण आरेख को चित्र 5.27 (स) में दिखाया गया है । यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि D तथा E के मध्य परिवलय खींचते समय यह नीचे की ओर उत्तल होना चाहिए ।

उदाहरण 5.11 : एक क्षैतिज धरन अपने सिरों पर आधारित है इसकी विस्तृति 10m है । इस पर 2, 3, 1 तथा 4 kN के संकेंद्री भार बायें आधार से क्रमशः 1. 5, 3, 6 तथा 8 की दूरी पर लग रहे हैं । धरन में अधिकतम अपरुपण बल तथा बंकन आघूर्ण ज्ञात कीजिए । अपरुपण बल एवं बंकन आघूर्ण का आरेख भी खींचिए ।

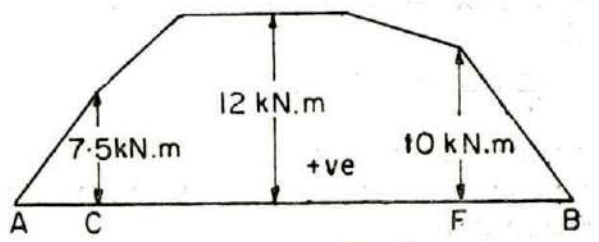
(प्राविधिक परिषद 1961)



(अ) भारण आरेख



(ब) अपरुपण बल आरेख



(स) बंकन आघूर्ण आरेख

चित्र 5.28

हल : चित्र 5.28 में धरन का चित्र बनाया गया है जिसमें सभी बल एवं दूरियाँ स्पष्ट रूप से अंकित की गई हैं । इसको भारण आरेख कहा जाता है । अब ऊपर बताई गई विधि के अनुसार प्रतिक्रिया बल ज्ञात करना चाहिए :—

$R_A + R_B = 2 + 3 + 1 + 4 = 10$

A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$2 \times 1.5 + 3 \times 3 + 6 \times 1 + 8 \times 4 = R_B \times 10.$

$R_B = 5kN$

$R_A = 5kN$

अब धरन सिरे A से प्रारंभ करते हुए एवं केवल बायें ओर के बाह्य बलों पर ध्यान देते हुए अपरूपण बल ज्ञात करने पर

$V_A = +5kN$

$V_G = +5-2= +3kN.$

$V_D = +5-2-3=0kN.$

$V_E = =5-2-3-1= -10kN.$

$V_C = +5-2-3-1-4= -5kN$

$V_B = -50kN.$

अपरूपण बल आरेख चित्र 5.28(ब) में दिखाया गया है। अपरूपण बल ज्ञात करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि जहाँ पर अपरूपण बल में परिवर्तन हो वहीं पर उसका मान ज्ञात करना चाहिए। यहाँ पर जैसे यदि A तथा B के मध्य कई बिन्दुओं पर अपरूपण बल निकाला जाय तो मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा इसी प्रकार B से C तक अपरूपण बल का मान एक समान रहता है, अतः ऐसे प्रश्नों को हल करते समय जहाँ जहाँ भार लग रहे हों वहीं पर अपरूपण बलों को ज्ञात करना चाहिए। अपरूपण बल आरेख से हम देखते हैं कि धरन पर अधिकतम अपरूपण बल A तथा B पर 5kN के बराबर लगेगा।

अब बंकन आघूर्ण ज्ञात करने के लिए सिरा A से प्रारंभ कीजिए तथा बिन्दुओं A,C,D,E,F तथा B पर इनका मान निकालिए, इस प्रकार

$M_A = 0$

$M_C = +R_A \times 1.5 = 5 \times 1.5 = 7.5kN\text{-}m$

$M_D = (+5 \times 3 - 2 \times 1.5) = 15-3= +12kN\text{-}m$

$M_E = (6 \times 5 - 2 \times 4.5 - 3 \times 3) = +12kN\text{-}m$

$M_F = (5 \times 8 - 2 \times 6.5 - 3 \times 5 - 1 \times 2) = +10kN\text{-}m$

$M_B = 0$

बंकन आघूर्ण आरेख चित्र 5.28 (स) में दिखाया गया है। यहाँ पर चूंकि किसी परिच्छेद पर बंकन आघूर्ण उस परिच्छेद की भार से दूरी पर निर्भर करता है अतः इसका मान प्रत्येक बिन्दु पर अलग अलग होता है जैसा कि ऊपर बताया गया है, पाठक इस बात पर ध्यान दें कि धरन में D से E तक अपरूपण बल शून्य है तथा जहाँ पर धरन

में अपरूपण बल शून्य है वहाँ पर बंकन आघूर्ण का मान अधिकतम है, इन बातों को ध्यान में रखने पर आरेख बनाना सरल हो जाता है तथा आरेख की जाँच (Check) भी हो जाती है। यहाँ पर संपूर्ण धरन पर बंकन आघूर्ण का बीजीय चिन्ह एक ही रहता है अतः अवनमन बिन्दु (Point of Contraflecture) कोई नहीं है।

उदाहरण 5.12 : एक क्षैतिज धरन AB जिसकी लंबाई 10m है, सिरा पर हिंज की हुई है तथा A से 4.5m की दूरी पर एक अन्य बिन्दु पर शुद्ध आलंब पर टिकी है। इसकी संपूर्ण लंबाई पर 3kN का एक समान वितरित भार लग रहा है। इसमें बंकन आघूर्ण तथा अपरूपण बल का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए तथा बंकन आघूर्ण एवं अपरूपण बल आरेख खींचिए।

(प्रविधिक परिषद 1962)

हल :

$R_A + R_C = 3 \times 10 = 30$ — — — — — — — (a)

A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$4.5 \times R_C = 30 \times 5$ — — — — — — — — — (b)

अतः $R_C = 33.34kN$ तथा $R_A = 3.34kN$

चित्र 5.29 (अ) में R_A के ऋणात्मक मान पर ध्यान दीजिए यह प्रतिक्रिया बल नीचे की दिशा में लगेगा।

अपरूपण बल के लिए

$V_A = -3.34kN$

$V_C = -3.34kN - 4.5 \times 3 = -16.84kN$ (परिच्छेद C के थोड़ा बायें की ओर) A तथा C के मध्य सरल रेखीय परिवर्तन होगा

$V_C = 16.84 + 33.4 = 16.5kN$ (परिच्छेद C को थोड़ा दाहिने की ओर)

$V_B = 0$, B तथा C के मध्य सरल रेखीय परिवर्तन होगा

अतः परिच्छेद C पर अधिकतम धनात्मक अपरूपण बल 165kN का अधिकतम एवं ऋणात्मक अपरूपण बल 16.84kN का होगा।

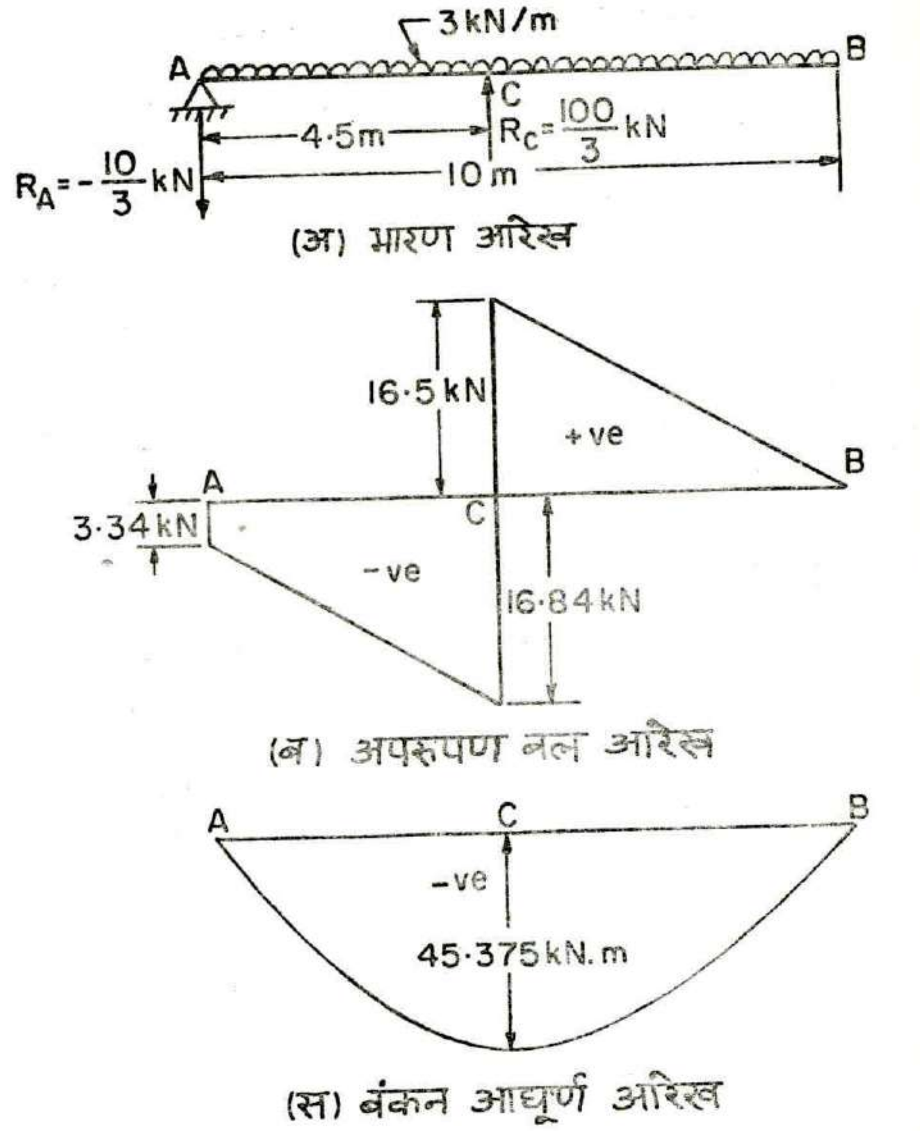
बंकन आघूर्ण के लिए

$M_A = 0$

$M_C = -\frac{10}{3} \times 4.5 - 3 \times 4.5 \times \frac{4.5}{2} = 45.375kN\text{-}m$ (अधिकतम).

A तथा C के मध्य परिवलय के रूप का परिवर्तन होगा।

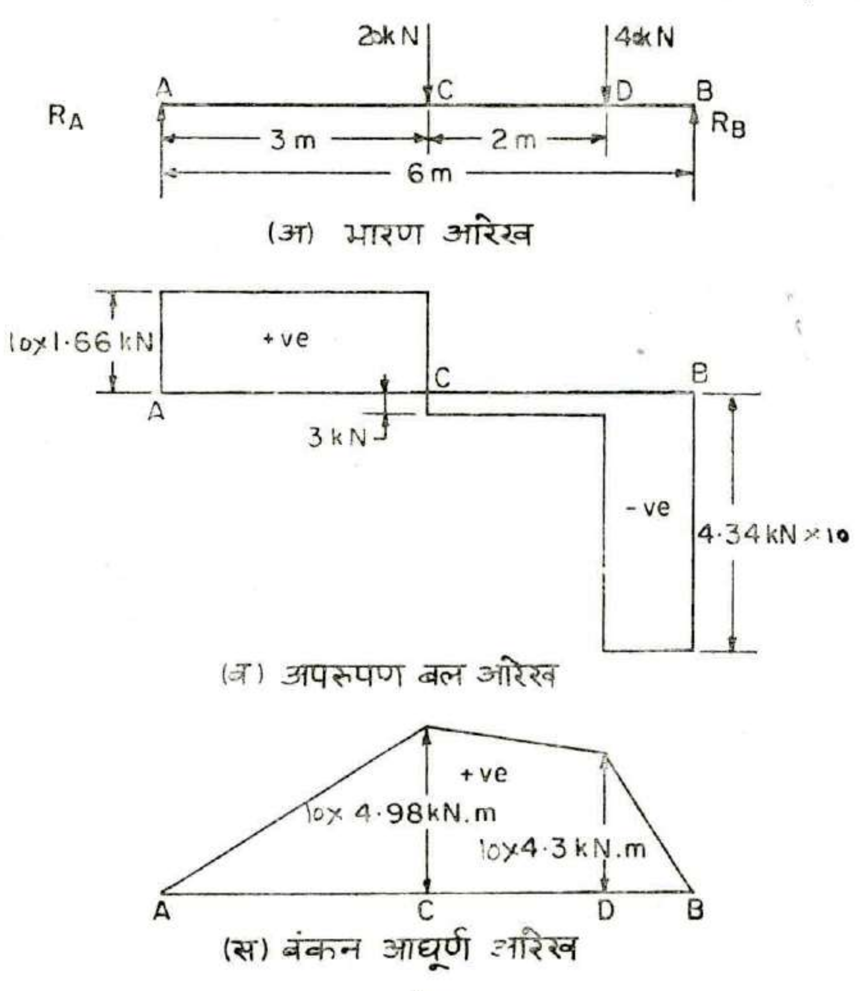
$M_B = 0$ तथा B एवं C के मध्य भी परिवलय के रूप में परिवर्तन होगा। बंकन आघूर्ण आरेख चित्र 5.29 (स) में दिखाया गया है।



चित्र 5.29

उदाहरण 5.13 : क रेल के इंजन के आगे तथा पीछे के धुरों पर भार क्रमश: 20kN तथा 40kN लगता है तथा इनके मध्य की दूरी 2m है। यह इंजन एक पुल पर से होकर जा रहा है जिसकी विस्तृति 6m है जब इंजन का अगला धुरा पुल के मध्य में पहुंच गया हो उस समय पुल के धरन के लिए अपरूपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख बनाइये ।

(प्राविधिक परिषद् 1963)



चित्र 5.30

हल : इंजन के पहियों द्वारा पुल पर संकेंद्री भार लगेगा अतः जब अगला धुरा धरन के मध्य बिन्दु पर होगा उस समय पिछला धुरा मध्य बिन्दु से 2m पीछे होगा । भारण आरेख चित्र 5·30 (अ) में दिखाया गया है ।

$$R_A+R_B = 60 \qquad \text{(a)}$$

A के सापेक्ष आघूर्ण होने पर

$$3\times20+40\times5 = R_B\times6 \qquad \text{(b)}$$

$R_B = 43.4\text{kN}, \quad R_A = 16.6\text{kN}$

$V_A = 16.6\text{kN}$

$V_c = 16.6-20 = -3.4\text{kN}$

$V_D = -3.4-40 = -43.4\text{kN}$

$V_B = -43.4\text{kN}$

अपरूपण बल आरेख चित्र 5.30 (ब) में दिखाया गया है ।

$M_A = 0$

$M_c = 16.6\times3 = 49.8\text{kN-m}$

$M_D = 16.6\times5-2\times20 = 83-40 = 43\text{kN-m}$

बंकन बल आरेख चित्र 5.30 (स) में दिखाया गया है ।

उदाहरण 5.14 : एक धरन ABC जिसकी लंबाई 10 m है, A पर हिन्ज आधार पर टिकी है तथा B पर जो A से 5m की दूरी पर है रोलर आधार पर टिकी है । धरन के भाग AB पर 5kN/m का एक समान वितरित भार तथा सिरा C पर 15kN का संकेंद्री भार लग रहा है । धरन का अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख खींचिए । बीजीय चिन्हों को स्पष्ट लिखिए ।

स्पष्ट है कि समीकरण (a) एक परिवलय को व्यक्त करता है, अतः धरन के खड AB के मध्य बंकन आघूर्ण आरेख एक परिवलय होगा, अतः

$$M_G = -R_A\times5-50\times\frac{25}{2} = 75\text{kN-m}$$

चूंकि B तथा C के मध्य कोई, अन्य भार नहीं है, अतः B से C तक बंकन आघूर्ण आरेख एक सरल रेखा होगा । यदि x का मान 5 मीटर से अधिक मान लें तो यह स्पष्ट हो जाएगा अतः इस स्थिति में जब x>5m हो तब

$$M_L = -R_A\times x - W\times5(x-2.5)-R_c(x-5)$$

यदि उपर्युक्त समीकरण में W, R_A तथा R_c का मान रख दिया जाय तथा सरल रेखा को रेखांकित किया जा सकता है ।

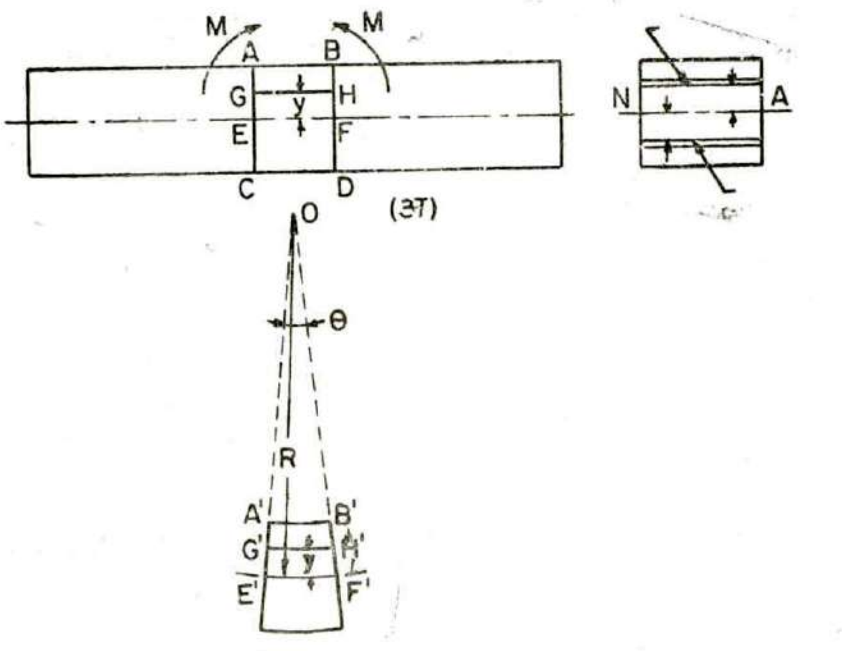
तथा M_c=0 अतः बंकन आघूर्ण आरेख सरलतापूर्वक खींचा जा सकता है, इसको चित्र 5.31 (स) में दिखाया गया है ।

5.8 धरन में बंकन प्रतिबल

दंड के लंबाई के अभिलंबवत भारण के कारण उत्पन्न अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण दंड का विरूपण करने का प्रयत्न करते है जिससे कि इनका प्रतिरोध करने के लिए, उसमें आंतरिक प्रतिबल उत्पन्न होते हैं । अगले अनुच्छेद में यह वर्णन किया जायगा कि बंकन आघूर्ण (बं० ब० आ०) के कारण उत्पन्न आंतरिक प्रतिबल का मान तथा इसका धरन के किसी परिच्छेद पर बंटन किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है ।

5.9 सामान्य बंकन सिद्धांत

यदि किसी सीधे धरन के सिरों पर समान मान वाले परन्तु विपरीत दिशाओं में बलयुग्म लग रहे हों, अर्थात् धरन का केवल बंकन हो रहा हो तथा उसमें कोई अपरूपण बल क्रियाशील न हो, तो इसको सामान्य बंकन कहा जाता है ।



(ब)

चित्र 5.32

चित्र 5.32 में दिखाए गये धरन के एक छोटे खंड ABCD पर ध्यान दीजिये जिस पर कि बंकन आघूर्ण M क्रियाशील है। इस बंकन आघूर्ण के कारण खंड ABCD का बंकन A'B'C'D' के रूप में हो जाएगा जिसका वक्रता केन्द्र O होगा जैसा कि चित्र (ब) में दिखाया गया है। ऊपरी सतह AB का A'B' के रूप में संपीड़न हुआ है तथा नीचे वाली सतह DC की C'D' के रूप में दैर्ध्यवृद्धि हो गई है। क्योंकि यह दैर्ध्य-अन्तर ऊपर की सतह से नीचे की सतह की ओर क्रमिक रूप में होता है अतः ABCD के मध्य एक सतह ऐसी भी होती है जिसकी लंबाई में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात्

EF=E'F'=AB=CD। EF और AB के मध्य सभी सतह संपीडन में होती है तथा EF एवं CD के मध्य सभी सतहें तनन में होती है। सतह EF को, जिसमें न तो संकुचन होता है तथा न ही दैर्ध्यवृद्धि, उदासीन सतह कही जाती है।

यदि बंकन बल आघूर्ण ऋणात्मक हो तथा दंड का ऊपर की ओर उत्तल बंकन हो तो ऊपरी सतहों में तनन तथा नीचे की सतहों में संपीड़न प्रतिबल उत्पन्न होगा। इन बंकन प्रतिबलों का परिकलन करते समय निम्नलिखित कल्पनायें निहित होती हैं।

1. अनुप्रस्थ परिच्छेद AC तथा BD जो बंकन से पूर्व समतल रहे हैं वे बंकन के पश्चात् भी समतल रहते हैं।

2. पदार्थ समांगी तथा समदैशिक है अर्थात् प्रत्येक दिशा में, इसके प्रत्यास्थ गुण समान होते हैं तथा प्रत्यास्थता सीमा का उल्लंघन नहीं होता है।

3. यंग का मापांक तनन तथा संपीडन में समान होता है।

4. प्रत्येक सतह अपने संलग्न सतह से स्वतंत्र रूप में संकुचित अथवा प्रसरण कर सकती है।

5. दंड परिच्छेद बंकन तल के सापेक्ष सममिति होता है।

यदि दंड परिच्छेद के उदासीन सतह की वक्रता-त्रिज्या R है तो $E'F' = R\theta$। उदासीन सतह EF से y की दूरी पर एक अन्य सतह GH पर ध्यान दीजिए जिसकी बंकन के पश्चात् लंबाई $G'H' = (R-y)\theta$ है।

इस सतह में संपीडन विकृति

$$\frac{GH-G'H'}{GH} = \frac{E'F'-G'H'}{E'F'} = \frac{R\theta-(R-y)\theta}{R\theta} = \frac{y}{R}$$

यदि इस सतह में संपीडन प्रतिबल σ_c है तो संपीड़न विकृति का मान $\frac{\sigma_c}{E} = \frac{y}{R}$

अथवा $\sigma_c = \frac{E}{R}.y$ . . . . (5.2)

उदासीन सतह के नीचे की ओर की सतह में तनन प्रतिबल का मान भी इसी प्रकार के व्यंजक द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। समीकरण (5.2) को व्यापक रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

$$\frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t} = \frac{E}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.3)$$

y_c तथा y_t क्रमशः संपीड़न एवं तनन में उन सतहों की उदासीन सतह से दूरी व्यक्त करते हैं जिनमें संपीड़न एवं तनन प्रतिबल σ_c तथा σ_t है

चूंकि R उदासीन सतह की वक्रता-त्रिज्या व्यक्त करता है जिसका मान एक बंकन परिस्थिति के लिए अचर होता है तथा E भी धरन पदार्थ के लिए अचर होता है अतः समीकरण (5.2) से स्पष्ट है कि प्रतिबल का मान y के सापेक्ष रेखीय रूप में विचरण करता है, अर्थात् "किसी भी सतह में प्रतिबल का मान उसके उदासीन सतह से दूरी का समानुपाती होता है" ।

5.10 उदासीन अक्ष

किसी परिच्छेद का उदासीन अक्ष उस रेखा को व्यक्त करता है जोकि उदासीन सतह के समतल अथवा शून्य प्रतिबल एवं विकृति के समतल तथा परिच्छेद के अंतर्छेदन से प्राप्त होती है । चित्र 5.32 में दिखाये गये धरन परिच्छेद का उदासीन अक्ष NA है तथा वह शून्य प्रतिबल रेखा है । यह दंड परिच्छेद को संपीडन एवं तनन के दो क्षेत्रों में विभाजित कर देता है ।

ऊपरी संपीडन क्षेत्र में उदासीन अक्ष से y_c की दूरी पर अवयव क्षेत्रफल δ_{a1} पर ध्यान दीजिए,

इस अवयव पर कुल संपीड़न बल

$$= \sigma_c \times \delta_{a1}$$

$$= \frac{E}{R} \times y_c \times \delta_{a1}$$

संपीडन क्षेत्र में कुल संपीडन बल

$$= \frac{E}{R} \Sigma\, y_c \times \delta_{a1}$$

इसी प्रकार उदासीन अक्ष के नीचे की ओर तनन क्षेत्र में कुल तनन बल

$$\frac{E}{R} \;\Sigma\; y_t \;\; \delta_{a2}$$

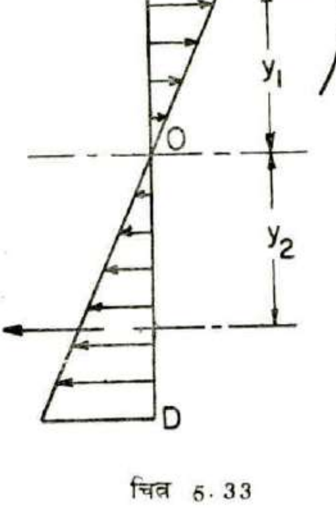
परिच्छेद साम्यावस्था में है अतः कुल संपीड़न बल का मान कुल तनन बल के मान के बराबर होना चाहिए ।

अतः $\Sigma\ y_c \times \delta_{a1} \;=\; \Sigma\ \mu_t \times \delta_{a2}$ . . . . . (5.4)

समीकरण (5.4) से यह स्पष्ट है कि उदासीन अक्ष के ऊपर के क्षेत्रफल का आघूर्ण उसके नीचे के क्षेत्रफल के आघूर्ण के बराबर होता है अतएव उदासीन अक्ष परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से होकर जाने वाली रेखा होती है ।

5.11 बंकन प्रतिरोध

चित्र 5.32 अ में दिखाये गए धरन के खंड ABCD के फलक BD पर ध्यान दीजिए जिस पर कि वामावर्त बलयुग्म M लग रहा है । यदि उदासीन तल पर कोई बिन्दु O है तो भाग BO संपीड़न में तथा DO तनन में होगा । दोनों खंडों में आंतरिक प्रतिबल चित्र (5.33) में दिखाई गई दिशा में क्रियाशील होंगे । तनन तथा संपीड़न बल का मान समान तथा दिशायें विपरीत होने के कारण ये एक दक्षिणावर्ती बलयुग्म बनायेंगे जो कि परिच्छेद पर लग रहे वामावर्ती बाह्य बलयुग्म से संतुलन में होगा, अतः



चित्र 5.33

$$M \;=\; F(y_1 + y_2)$$

$= Fy_1 + Fy_2$ संपूर्ण संपीड़न बल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण + संपूर्ण तनन बल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण ।

चित्र 5.34 (अ) में दिखाये गये एक अवयव क्षेत्रफल δ_{a1} पर ध्यान दीजिए, जिसकी उदासीन अक्ष से दूरी y_c है ।

इस क्षेत्रफल पर लग रहे संपूर्ण बल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण

$$= \sigma_c \times \delta_{a1} \times y_c$$

$$= \frac{E}{R}\,\delta_{a1} \times y_c^2$$

or $$Fy_1 = \frac{E}{R}\,\Sigma\,\delta_{a1} \times y_c^2$$

इसी प्रकार $$Fy_2 = \frac{E}{R}\,\Sigma\,\delta_{a2} \times y_t^2$$

तथा $$M = \frac{E}{R}\left[\Sigma\,\delta_{a1} \times y_c^2 + \Sigma\,\delta_{a2} \times y_t^2\right]$$

यहाँ पद $[\Sigma\,\delta_{a1} \times y_c^2 + \Sigma\,\delta_{a2} \times y_t^2]$ संपूर्ण क्षेत्रफल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष द्विघाती आघूर्ण को व्यक्त करता है। तथा इसको परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण कहा जाता है तथा सामान्यतः I द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

अतः $$M = \frac{E}{R} \times I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.5)$$

समीकरणों (5.2) तथा (5.5) के संयोग से एक व्यापक समीकरण प्राप्त किया जा सकता है जैसे,

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.6)$$

उपर्युक्त सूत्र को प्रायः "नमन सूत्र" कहा जाता है। y_c तथा y_t को उदासीन अक्ष से बाहर की दिशा में नापने पर धनात्मक मानना चाहिए। समीकरण (5.6) द्वारा,

यदि y_c तथा y_t परिच्छेद के सीमांत सतहों की उदासीन अक्ष से दूरी व्यक्त करें जिनमें कि अधिकतम संपीड़न तथा तनन प्रतिबल लग रहा हो तब,

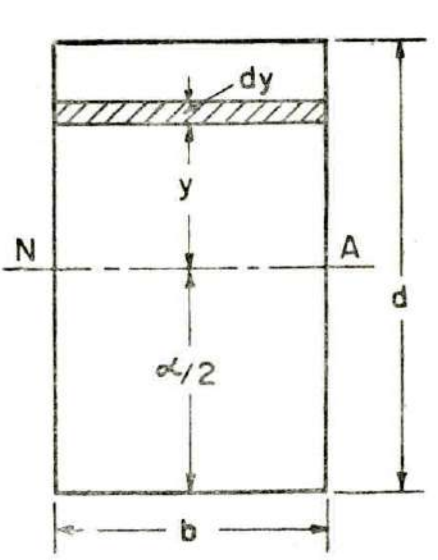
$$\frac{\sigma_t(\text{अधिकतम})}{\sigma_c(\text{अधिकतम})} = \frac{y_c(\text{अधिकतम})}{y_t(\text{अधिकतम})} = \frac{\text{उदासीन अक्ष से सीमांत संपीड़न सतह की दूरी}}{\text{उदासीन अक्ष से सीमांत तनन सतह की दूरी}}\text{ ।}$$

इस प्रकार के पद जैसे $\frac{I}{y_c\ (\text{अधिकतम})}$ अथवा $\frac{I}{y_t\ (\text{अधिकतम})}$ परिच्छेद के गुण विशेष को दर्शाते है तथा इनको "परिच्छेद मापांक" कहा जाता है। संपीडन तथा तनन परिच्छेद मापांक को क्रमशः Z_c तथा Z_t से व्यक्त किया जाता है।

अतः $$M = \sigma_c\ (\text{अधिकतम}) \times Z_c = \sigma_t\ (\text{अधिकतम}) \times Z_t \quad . \quad . \quad . \quad (5.7)$$

5.12 उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

(अ) आयताकार परिच्छेद :— आयताकार परिच्छेद का गुरुत्व केन्द्र आधार से $d/2$ की दूरी पर होगा तथा उदासीन अक्ष चित्र में दिखाया गया है । उदासीन अक्ष से y की दूरी पर एक dy मोटी पट्टी लीजिए, इसका क्षेत्रफल $b \times dy$ होगा तथा उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $b\,dy\,y^2$ होगा ।

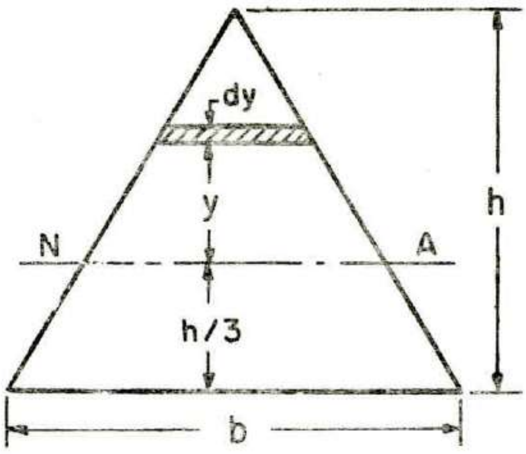


चित्र 5.34

अतः संपूर्ण क्षेत्र का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I_{NA})

$$= \int_{-d/2}^{d/2} b\,dy.\,y^2 = \left[\frac{by^3}{3}\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{bd^3}{12}$$

(ब) त्रिभुजाकार परिच्छेद :—त्रिभुजाकार परिच्छेद का गुरुत्व केन्द्र आधार से $h/3$ की दूरी पर होगा । उदासीन अक्ष के समांतर y की दूरी पर dy मोटाई की एक पट्टी लीजिए ।



(चित्र 5.35)

इस पट्टी की चौड़ाई $= \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)$

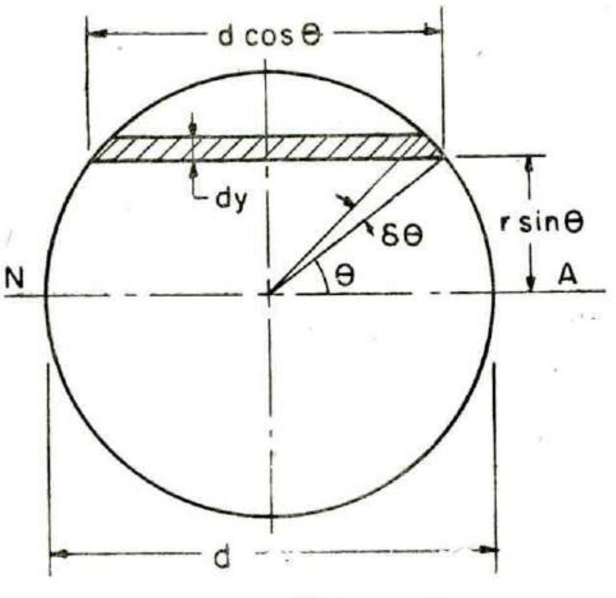
इसका क्षेत्रफल $= \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) dy$

इसका उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) dy\; y^2$

त्रिभुजाकार क्षेत्र का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) y^2 \times dy$

$$= \left[\frac{2hy^3}{9} - \frac{y^4}{4}\right]_{-h/3}^{+2h/3}$$

$$= \frac{bh^3}{36}$$



(चित्र 5.36)

(स) वृत्ताकार परिच्छेद :---- वृत्ताकार परिच्छेद का उदासीन अक्ष उसके केन्द्र से होती हुई रेखा होगी अर्थात् वह परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से भी होती हुई जाएगी । इस अक्ष से θ कोण पर एक पट्टी की कल्पना कीजिए जो उदासीन अक्ष के समानांतर हो तथा यह वृत्त के केन्द्र पर कोण $\delta\theta$ बनाती हो । इस पट्टी की चौड़ाई $= d\cos\theta$ होगी । यदि वृत्त का अर्धव्यास r हो तो इस पट्टी की मोटाई $rd\theta \times \cos\theta$ होगी ।

इस पट्टी का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$(I_{NA}) = d\cos\theta \times rd\theta \times \cos\theta \times (r\sin\theta)^2$$

$$= \frac{d^4}{8}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta .\ \sin^2\theta .\ d\theta$$

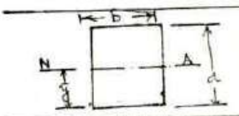
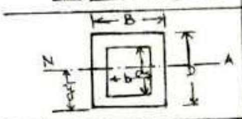
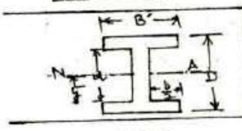
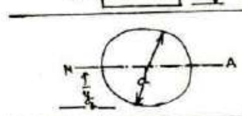
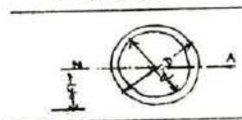
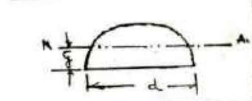
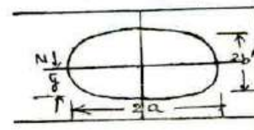
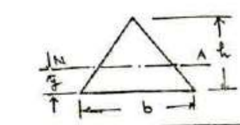
अतः संपूर्ण परिच्छेद का $I_{NA} = \frac{2d^4}{8}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta .\ \sin^2\theta \times d\theta.$

$$= \frac{d^4}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 - \cos_4\theta}{4}\right) d\theta$$

$$= \frac{d^2}{32}\left[\theta - \frac{\sin_4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi d^4}{64}$$

तालिका 5.1

परिच्छेद विवरण	क्षेत्रफल	निचली सतह से गुरुत्व केंद्र की दूरी $\bar{y}$	उदासीन अक्ष NA के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण INA	घनात्मक बंकन बला-घूर्ण के लिए y_c का अधिकतम मान	घनात्मक बंकन बला-घूर्ण के लिए y_t का अधिकतम मान
	bd	$\frac{d}{2}$	$\frac{bd^3}{12}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$
	$BD - bd$	$D/2$	$\frac{BD^3 - bd^3}{12}$	$D/2$	$D/2$
	$BD - bd$	$\frac{D}{2}$	$\frac{BD^3 - bd^3}{12}$	$D/2$	$D/2$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$d/2$	$d/2$
	$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$	$D/2$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$D/2$	$D/2$
	$\frac{\pi d^2}{8}$	$\frac{2d}{3\pi}$	$0.11\left(\frac{d}{2}\right)^4$	$\left(\frac{d}{2} - \frac{2d}{3\pi}\right)$	$\left(\frac{2d}{3\pi}\right)$
	πab	b	$\frac{\pi ab^3}{4}$	$b/2$	$b/2$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{h}{3}$

15—23 M. of HRD/ND/95

विभिन्न परिच्छेदों के गुरुत्व केन्द्र तथा उदासीन अक्ष तालिका 5.1 में दिए गये हैं।

प्रायः सामान्य रूप में प्रयोग किये जाने वाले धरन परिच्छेदों को आयताकार, त्रिभुजाकार तथा वृत्ताकार रूपों में विभाजित किया जा सकता है तथा उनके उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण के मान को "समान्तर अक्ष" प्रमेय के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रमेय के अनुसार यदि किसी परिच्छेद का उसके गुरुत्वीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात हो तो किसी अन्य समान्तर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है, गणितीय राशियों में व्यक्त करने पर,

$$Ix_1 = Ix + Ah^2$$

यहाँ पर h दोनों अक्षों के मध्य की दूरी व्यक्त करता है। I_x तथा I_{x1} क्रमशः गुरुत्वीय तथा अन्य समान्तर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण हैं।

उदाहरण 5.15 : एक 5 cm व्यास के इस्पात के छड़ को वृत्तीय वक्र रूप में मोड़ना है, यदि पदार्थ की अनुमेय बंकन प्रतिबल सामर्थ्य 1000 N/mm² हो तो वह न्यूनतम त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिससे कि छड़ को मोड़ा जा सकता है। छड़ के परिच्छेद का प्रतिरोध आघूर्ण भी ज्ञात कीजिए E = 200 G Pa

हल :

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t}$$

$\sigma \quad \sigma_t = 1000 \text{ N/mm}^2$

तथा $y_c = y_t = 2.5$ cm

$$R = \frac{E.\,y_c}{\sigma_c} = \frac{200 \times 10^9 \times 2.5 \times 10}{1000 \times 10^6 \times 10^3} = 500 \text{ cm.}$$

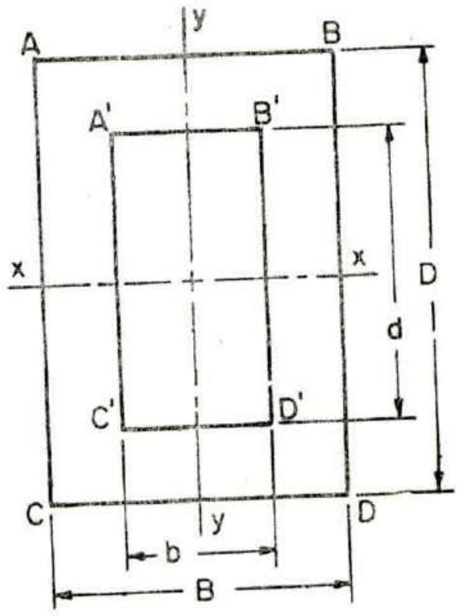
$$= \underline{\underline{5\text{m}}}$$

एवं $\frac{M}{I} = \frac{\sigma_c}{y_c} \quad \therefore \quad M = \frac{\sigma_c.\,I.}{y_c} = \frac{\pi}{64} \quad \frac{d^4 \times 1000 \times 2}{d}$

$$\text{or } M = \frac{\pi}{64} \times 2000 \times (5)^3$$

$$M = 12{,}266 \text{ N/m.}$$

उदाहरण 5.16 : चित्र (5.37) में दिखाये गये आयताकार परिच्छेद का क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर गुरुत्वीय अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।



चित्र 5.37

हल :

$$I_{xx},\ \text{ABCD के लिए} = \frac{BD^3}{12}$$

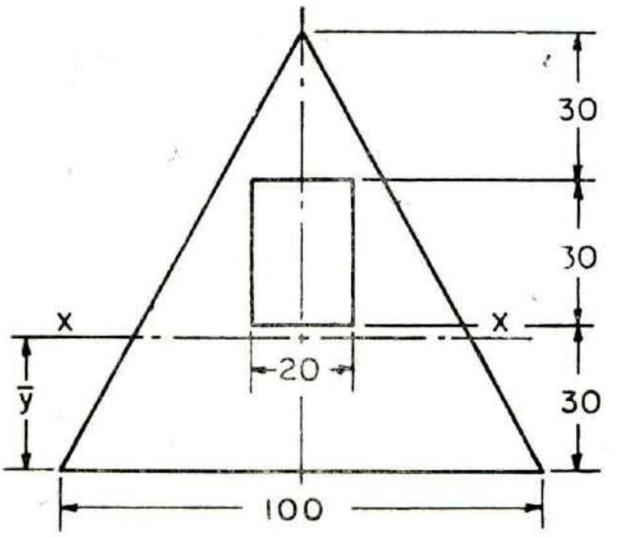
$$A'\,B'\,C'\,D' \text{ का } I_{xx} = \frac{bd^3}{12}$$

$$\text{खोखले परिच्छेद का } I_{xx} = \frac{BD^3 - bd^3}{12}$$

yy–अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण की गणना करते समय परिच्छेद की चौड़ाई D तथा मोटाई B होगी ।

$$\text{अतः परिच्छेद का } I_{yy} = \frac{DB^3 - db^3}{12}$$

उदाहरण 5.17 : चित्र (5.38) में दिखाये गए परिच्छेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.38)

हल :

त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{10 \times 9}{2} = 45\ cm^2$

इसके गुरुत्व केन्द्र की आधार से दूरी = 3 cm

आयत का क्षेत्रफल = 6 cm^2

इसके गुरुत्व केन्द्र की त्रिभुज आधार से दूरी = 4.5 cm

$$\text{अतः परिच्छेद के गुरुत्व केंद्र की आधार से दूरी } \bar{y} = \frac{45 \times 3 - 6 \times 4.5}{45 - 6}$$

$$= 2.77\ cm$$

$$\text{त्रिभुज का } I_{xx} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3} - 2.77\right)^2$$

$$= \frac{10 \times 9^3}{36} + \frac{10 \times 9}{2}(3 - 2.77)^2$$

$$= 202.5 + 2.4 = 204.9 \text{ cm}^2$$

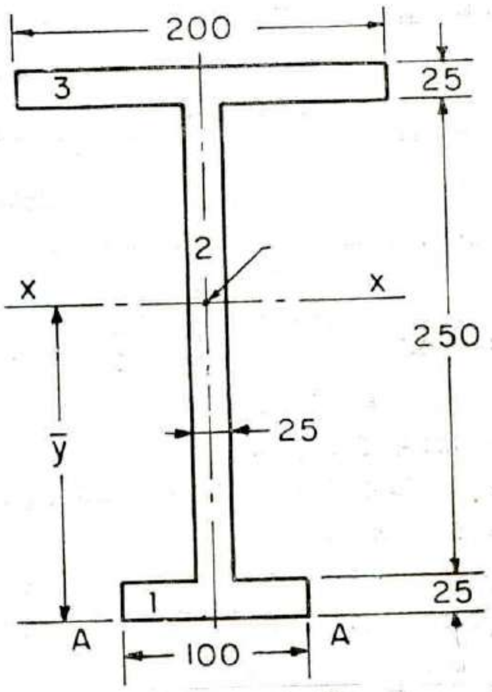
आयताकार छिद्र का $Ixx = \frac{bd^3}{12} + bd\ (4.5 - 2.77)^2$

$$= \frac{2 \times 3^3}{12} + 2 \times 3 \times 1.73^2$$

$$= 4.5 + 18 = 22.5 \text{ cm}^4$$

संपूर्ण क्षेत्र का $Ixx = 204.9 - 22.5 = 182.4 \text{ cm}^4$

उदाहरण 5.18 : चित्र (5.39) में दिखाये गये परिच्छेद का I_{xx}, I_{yy} तथा I_{AA} ज्ञात कीजिए। यदि धरन परिच्छेद पदार्थ के लिए अधिकतम अनुमेय प्रतिबल $100 N/mm^2$ हो तो धरन पर प्रति मीटर लग रहे एक समान बंटित भार का मान ज्ञात कीजिए यदि 4m लंबा धरन दोनों सिरों पर सामान्य रूप से आधारित है।



c सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.39)

हल : यह परिच्छेद तीन आयत खंडों में विभाजित किया जा सकता है जो चित्र में (1), (2) तथा (3) द्वारा दिखाये गये हैं। इनके भुजायें, क्रमशः 10×2.5, 20×2.5 तथा 20×2.5 cm हैं।

$$\bar{y} = \frac{10 \times 2.5 \times 1.25 + 25 \times 2.5 \times 15 + 20 \times 2.5 \times 28.75}{10 \times 2.5 + 25 \times 2.5 + 20 \times 2.5}$$

$$= \frac{2406.25}{137.5} = 17.5 \text{ cm.}$$

समांतर अक्ष प्रमेय द्वारा

आयत (1) का $I_{xx} = \frac{10 \times (2.5)^3}{12} + 10 \times 2.5\,(17.5 - 1.25)^2$

$$= 6{,}613 \text{cm}^4$$

आयत (2) का $I_{xx} = \frac{2.5 \times (25)^3}{12} + 2.5 \times 25\,(17.5 - 15)^2$

$$= 3{,}646 \text{cm}^4$$

आयत (3) का $I_{xx} = \frac{20 \times (2.5)^3}{12} + 20 \times 2.5\,(28.75 - 17.5)$

$$= 6{,}354 \text{cm}^4$$

अतः संपूर्ण परिच्छेद का $Ixx = 6{,}613 + 3{,}646 + 6{,}354$

$$= 16{,}613 \text{cm}^4$$

इसी प्रकार $Iyy = \frac{25 \times 10^3}{12} + \frac{25 \times 2.5^3}{12} + \frac{2.5 \times 20^3}{12}$

$$= 1{,}908 \text{cm}^4$$

$$I_{AA} = Ixx + A \times (17.5)^2$$

$$= 16{,}613 + (10 + 20 + 25) \times 2.5 \times (17.5)^2$$

$$= 58{,}722 \text{cm}^4$$

सबसे नीचे वाला रेशा सबसे ऊपर वाले रेशे की अपेक्षा उदासीन अक्ष से अधिक दूरी पर है अतः सबसे निचले वाले रेशे में अधिकतम प्रतिबल होगा।

$$M = \frac{\sigma_t . I.}{y_t} = \frac{100 \times 16613 \times 10^6 \times 10^2}{17.5 \quad\quad 10^8} = \text{N-m}$$

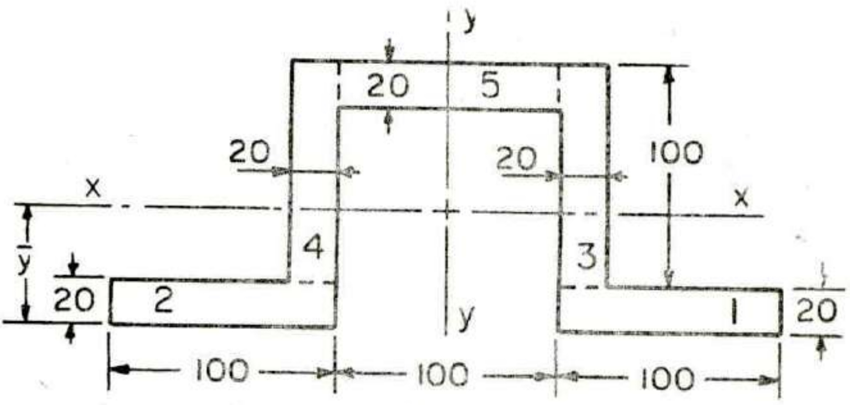
$$= 94931 \text{ N-m}$$

एक समान बंटित भार के लगने पर अधिकतम बंकन बलाघूर्ण का मान $\frac{wl^2}{8}$ है ।

अत: $$94931 = \frac{w \times 4^2}{8}$$

$w = 47.5$ KN/m

उदाहरण 5.19 : चित्र (5.40) में दिखाये गये परिच्छेद पर जब yy समतल में बंकन बल आघूर्ण लगाया जाय अर्थात् इसका बंकन **xx** समतल के सापेक्ष हो, तो इसके सबसे नीचे की सतह में प्रतिबल का मान $100 N/mm^2$ होता है, ऐसी दशा में लग रहे बंकन बल आघूर्ण तथा ऊपरी कोर में उत्पन्न प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.40)

हल : इस परिच्छेद को 10 सेमी × 2 सेमी के पाँच समान आयतों में विभाजित किया जा सकता है जैसा कि चित्र में अंकित किया गया है ।

$$\bar{y} = \frac{20\times1+20\times1+20\times7+20\times11+20\times7}{5\times10\times2}$$

$$= 5.4\times10^{-2} m$$

आयत (1) तथा (2) का $I_{xx} = 2 \times \left[\frac{10\times(2)^3}{12} + 20(5.4-1)^2\right]$

$$= 788 \times 10^{-8} m^4$$

आयत (3) तथा (4) का $I_{xx} = 2 \times \left[\frac{2\times(10)^3}{12} + 20(7-5.4)^2\right]$

$$= 436 \times 10^{-8} m^4$$

आयत (5) का $I_{xx} = \frac{10\times(2)^3}{12} + 20(11-5.4)^2$

$$= 635 \times 10^{-8} m^4$$

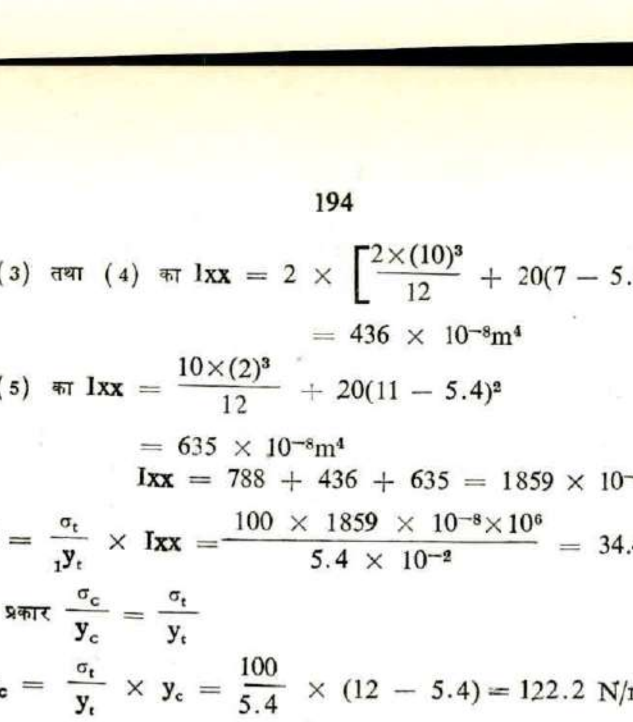
$$I_{xx} = 788 + 436 + 635 = 1859 \times 10^{-8} m^4$$

$$M = \frac{\sigma_t}{y_t} \times I_{xx} = \frac{100 \times 1859 \times 10^{-8}\times10^6}{5.4 \times 10^{-2}} = 34.43 \text{ kN.m}$$

इस प्रकार $\frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t}$

अथवा $\sigma_c = \frac{\sigma_t}{y_t} \times y_c = \frac{100}{5.4} \times (12 - 5.4) = 122.2 \ N/mm^2$

उदाहरण 5.20 : एक गोल धरन जिसका व्यास D है आयताकार परिच्छेद के धरन में परिवर्तित करना है अत: अधिकतम आघूर्ण प्रतिरोध की दृष्टि से धरन के मोटाई तथा चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए ।



चित्र 5.41

हल :

$$M = \sigma_c \times Z_c = \sigma_t \times Z_t$$

अधिकतम आघूर्ण प्रतिरोध के लिए Z का मान अधिकतम होना चाहिए ।

$$Z = \frac{bd^2}{6}$$

Z का मान अधिकतम होने के लिए bd^2 अधिकतम होना चाहिए ।

$$bd^2 = b(D^2 - b^2)$$

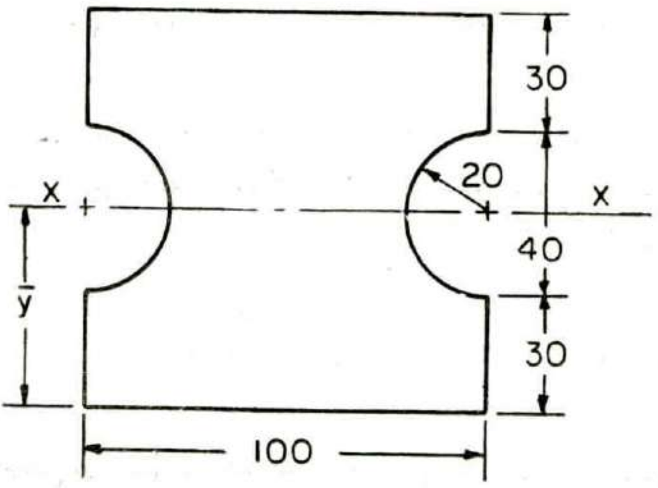
$$\therefore \frac{d}{db}(bd^2) = D^2 - 3b^2 = 0$$

$$\text{or} \quad D^2 = 3b^2$$

$$\text{or} \quad d^2 + b^2 = 3b^2$$

$$\text{or} \quad \frac{d}{b} = \sqrt{2}$$

उदाहरण 5.21 : चित्र में दिखाए परिच्छेद वाले काष्ठ के धरन के मध्य पर लग रहे अनुमेय भार का मान ज्ञात कीजिए । धरन की विस्तृति 4m है तथा इस प्रकार रखा गया है कि **xx** क्षैतिज दिशा में है तथा दोनों सिरे सरल आधार वाले हैं । काष्ठ में अनुमेय प्रतिबल $10 N/mm^2$ है । धरन के स्वयं के भार को नगण्य मत मानिए जिसका मान $8000 N/मी^3$ है ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.42)

हल :—

परिच्छेद के **xx** सापेक्ष सममिति के कारण स्पष्ट है कि आधार से उदासीन अक्ष की दूरी $\bar{y}$ = 5 cm है ।

$$Ixx = \frac{bd^3}{12} - \frac{\pi d_1^4}{64}$$

$$= \frac{10 \times 10^3}{12} - \frac{\pi}{64} \times (4)^4$$ (दो अर्धवृत्तों को एक पूरा वृत्त माना गया है)

$$= 820.77 cm^4$$

$$\text{निरापद बंकन बल आघूर्ण} = \frac{\sigma_c}{y_c} \times Ixx = \frac{10}{5} \times 820.77$$

$$= 1641.5 N\text{-}m$$

$$\text{परिच्छेद का क्षेत्रफल} = 10 \times 10 - \pi/_4 (4)^2 = 87.44 cm^2$$

$$\text{धरन का प्रति मी० भार} = \frac{8000 \times 87.44}{(100)^2} = 70 N/m$$

इसके अपने भार के कारण विस्तृति के मध्य में अधिकतम बंकन बल आघूर्ण का मान

$$= \frac{wl^1}{8} = \frac{70 \times (4)^2}{8} = 140 \ N\text{-}m$$

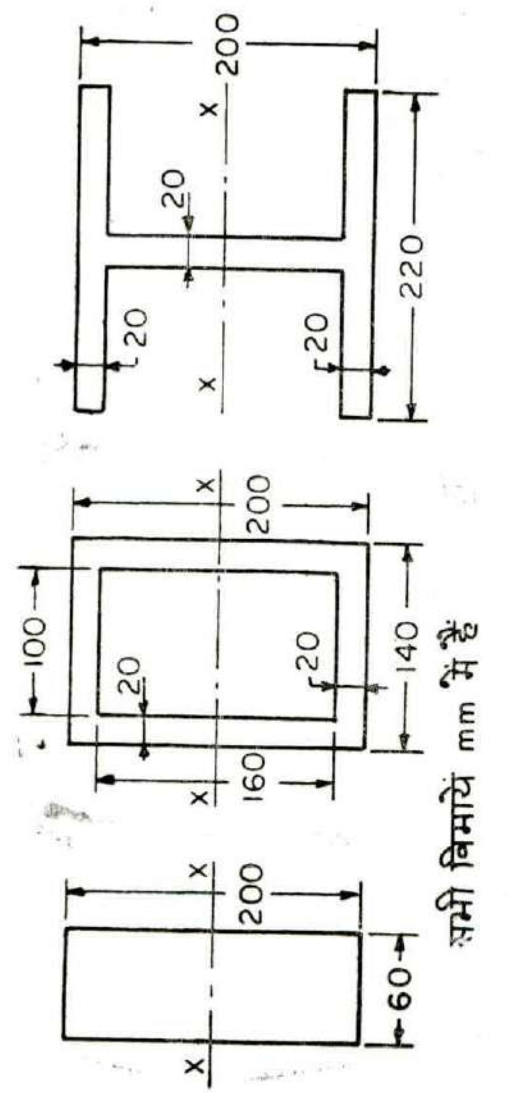
धरन के मध्य विस्तृति पर लग रहे संकेन्द्रित भार के कारण इसके मध्य में अधिकतम बंकन बल आघूर्ण का मान

$$= \frac{Pl}{4} N\text{-}m$$

कुल बंकन बल आघूर्ण = 140 + P = 1641.5

अथवा P = 1501.5 N

उदाहरण 5.22 : चित्र 5.43 में दिखाये गये तीन धरनों के परिच्छेद की बंकन सामर्थ्य की तुलना कीजिए जिनकी मोटाई, लंबाई तथा भार एक समान है ।



(चित्र 5.43)

हल : तीन समान लंबाई, मोटाई एवं भारवाले धरन परिच्छेद चित्र (5.43) में दिखाये गये हैं । इससे स्पष्ट है कि इनका परिच्छेदीय क्षेत्रफल भी समान होगा :

आयताकार परिच्छेद का $Ixx = 6 \times \frac{(20)^3}{12}$

$= 4000 \text{ cm}^4$

खोखले आयताकार परिच्छेद का $Ixx = \frac{14 \times (20)^3}{12} - \frac{10 \times (16)^3}{12}$

$= 5920 \text{ cm}^4$

I परिच्छेद का $Ixx = 2\left[\frac{22 \times (2)^3}{12} + 22 \times 2 \times (10-1)^2\right] + \frac{2 \times (16)^3}{12}$

$= 7157 + 683 = 7840 \text{ cm}^4$

$$M = \frac{\sigma_c}{y_c} \times Ixx$$

चूंकि $\frac{\sigma_c}{y_c}$ तीनों ही परिच्छेद के लिए समान है अतः बंकन सामर्थ्य उनके I_{xx} के समानुपाती होगी ।

अतः बंकन सामर्थ्य का अनुपात $= 4000 : 5920 : 7840$

$= 1 : 1.48 : 1.96$

अतएव ठोस आयताकार परिच्छेद वाले धरन की अपेक्षा I-की बंकन सामर्थ्य 1.96 गुणा तथा खोखले आयताकार परिच्छेद की बंकन सामर्थ्य 1.48 गुना है। तीनों ही परिच्छेदों में I-परिच्छेद की बंकन सामर्थ्य अधिकतम है । इसका कारण यह है कि उदासीन अक्ष के समीपवर्ती क्षेत्र में I-परिच्छेद में पदार्थ की मोटाई कम है तथा वहाँ प्रतिबल का मान भी न्यूनतम होता है एवं उस क्षेत्र में जहाँ प्रतिबल अधिक होता है वहाँ स्फारों में पदार्थों की मात्रा अधिक है । खोखले आयताकार परिच्छेद में I-परिच्छेद की अपेक्षा उदासीन अक्ष के समीपवर्ती क्षेत्र में पदार्थ की मात्रा अधिक है इसी कारण इसकी सामर्थ्य I-परिच्छेद से कम परन्तु ठोस आयताकार परिच्छेद से अधिक है। इसी कारण धरन के रूप में I-परिच्छेद का प्रयोग मितव्ययी होता है । I-परिच्छेद की सामर्थ्य इसकी मोटाई बढ़ाकर तथा स्फारों की चौड़ाई घटाकर, और बढ़ाई जा सकती है ।

y_c तथा y_t क्रमशः संपीड़न एवं तनन में उन सतहों की उदासीन सतह से दूरी व्यक्त करते हैं जिनमें संपीड़न एवं तनन प्रतिबल σ_c तथा σ_t है

चूंकि R उदासीन सतह की वक्रता-त्रिज्या व्यक्त करता है जिसका मान एक बंकन परिस्थिति के लिए अचर होता है तथा E भी धरन पदार्थ के लिए अचर होता है अतः समीकरण (5.2) से स्पष्ट है कि प्रतिबल का मान y के सापेक्ष रेखीय रूप में विचरण करता है, अर्थात् "किसी भी सतह में प्रतिबल का मान उसके उदासीन सतह से दूरी का समानुपाती होता है" ।

5.10 उदासीन अक्ष

किसी परिच्छेद का उदासीन अक्ष उस रेखा को व्यक्त करता है जोकि उदासीन सतह के समतल अथवा शून्य प्रतिबल एवं विकृति के समतल तथा परिच्छेद के अंतर्छेदन से प्राप्त होती है । चित्र 5.32 में दिखाये गये धरन परिच्छेद का उदासीन अक्ष NA है तथा वह शून्य प्रतिबल रेखा है । यह दंड परिच्छेद को संपीडन एवं तनन के दो क्षेत्रों में विभाजित कर देता है ।

ऊपरी संपीडन क्षेत्र में उदासीन अक्ष से y_c की दूरी पर अवयव क्षेत्रफल δ_{a1} पर ध्यान दीजिए,

इस अवयव पर कुल संपीड़न बल

$$= \sigma_c \times \delta_{a1}$$

$$= \frac{E}{R} \times y_c \times \delta_{a1}$$

संपीडन क्षेत्र में कुल संपीडन बल

$$= \frac{E}{R} \Sigma\, y_c \times \delta_{a1}$$

इसी प्रकार उदासीन अक्ष के नीचे की ओर तनन क्षेत्र में कुल तनन बल

$$\frac{E}{R} \Sigma\; y_t\; \delta_{a2}$$

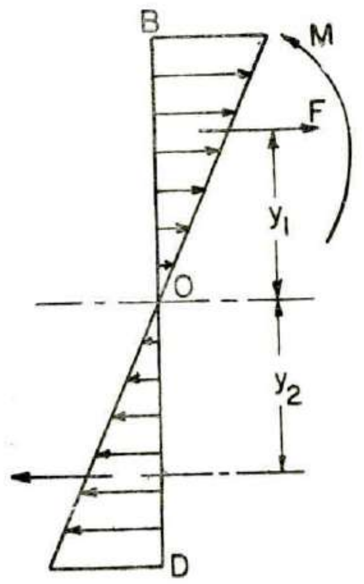
परिच्छेद साम्यावस्था में है अतः कुल संपीड़न बल का मान कुल तनन बल के मान के बराबर होना चाहिए ।

अतः $\Sigma\; y_c \times \delta_{a1} = \Sigma\; \mu_t \times \delta_{a2}$ . . . . . (5.4)

समीकरण (5.4) से यह स्पष्ट है कि उदासीन अक्ष के ऊपर के क्षेत्रफल का आघूर्ण उसके नीचे के क्षेत्रफल के आघूर्ण के बराबर होता है अतएव उदासीन अक्ष परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से होकर जाने वाली रेखा होती है ।

5.11 बंकन प्रतिरोध

चित्र 5.32 अ में दिखाये गए धरन के खंड ABCD के फलक BD पर ध्यान दीजिए जिस पर कि वामावर्त बलयुग्म M लग रहा है । यदि उदासीन तल पर कोई बिन्दु O है तो भाग BO संपीड़न में तथा DO तनन में होगा । दोनों खंडों में आंतरिक प्रतिबल चित्र (5.33) में दिखाई गई दिशा में क्रियाशील होंगे । तनन तथा संपीड़न बल का मान समान तथा दिशायें विपरीत होने के कारण ये एक दक्षिणावर्ती बलयुग्म बनायेंगे जो कि परिच्छेद पर लग रहे वामावर्ती बाह्य बलयुग्म से संतुलन में होगा, अतः



चित्र 5.33

$$M = F(y_1 + y_2)$$

$= Fy_1 + Fy_2$ संपूर्ण संपीड़न बल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण + संपूर्ण तनन बल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण ।

चित्र 5.34 (अ) में दिखाये गये एक अवयव क्षेत्रफल δ_{a1} पर ध्यान दीजिए, जिसकी उदासीन अक्ष से दूरी y_c है ।

इस क्षेत्रफल पर लग रहे संपूर्ण बल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण

$$= \sigma_c \times \delta_{a1} \times y_c$$

$$= \frac{E}{R} \delta_{a1} \times y_c^2$$

or $$Fy_1 = \frac{E}{R} \Sigma\, \delta_{a1} \times y_c^2$$

इसी प्रकार $$Fy_2 = \frac{E}{R} \Sigma\, \delta_{a2} \times y_t^2$$

तथा $$M = \frac{E}{R} \left[\Sigma\, \delta_{a1} \times y_c^2 + \Sigma\, \delta_{a2} \times y_t^2 \right]$$

यहाँ पद $[\Sigma\, \delta_{a1} \times y_c^2 + \Sigma\, \delta_{a2} \times y_t^2]$ संपूर्ण क्षेत्रफल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष द्विघाती आघूर्ण को व्यक्त करता है। तथा इसको परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण कहा जाता है तथा सामान्यतः I द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

अतः $$M = \frac{E}{R} \times I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5.5)$$

समीकरणों (5.2) तथा (5.5) के संयोग से एक व्यापक समीकरण प्राप्त किया जा सकता है जैसे,

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5.6)$$

उपर्युक्त सूत्र को प्रायः "नमन सूत्र" कहा जाता है । y_c तथा y_t को उदासीन अक्ष से बाहर की दिशा में नापने पर धनात्मक मानना चाहिए । समीकरण (5.6) द्वारा,

यदि y_c तथा y_t परिच्छेद के सीमांत सतहों की उदासीन अक्ष से दूरी व्यक्त करें जिनमें कि अधिकतम संपीड़न तथा तनन प्रतिबल लग रहा हो तब,

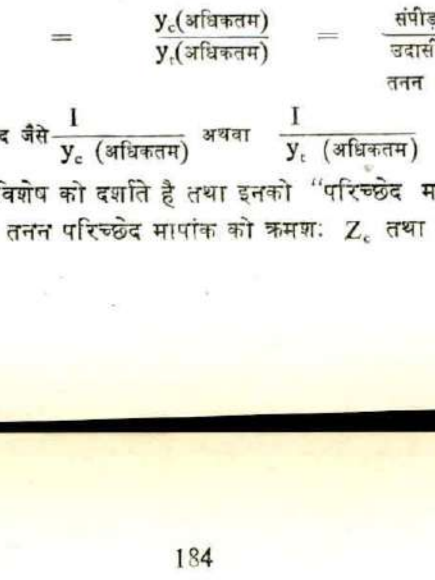
$$\frac{\sigma_c(\text{अधिकतम})}{\sigma_t(\text{अधिकतम})} = \frac{y_c(\text{अधिकतम})}{y_t(\text{अधिकतम})} = \frac{\text{उदासीन अक्ष से सीमांत संपीड़न सतह की दूरी}}{\text{उदासीन अक्ष से सीमांत तनन सतह की दूरी}}\text{ ।}$$

इस प्रकार के पद जैसे $\dfrac{I}{y_c\ (\text{अधिकतम})}$ अथवा $\dfrac{I}{y_t\ (\text{अधिकतम})}$ परिच्छेद के गुण विशेष को दर्शाते है तथा इनको "परिच्छेद मापांक" कहा जाता है । संपीडन तथा तनन परिच्छेद मापांक को क्रमशः Z_c तथा Z_t से व्यक्त किया जाता है ।

अतः $$M = \sigma_c\ (\text{अधिकतम}) \times Z_c = \sigma_t\ (\text{अधिकतम}) \times Z_t \quad . \quad . \quad . \qquad (5.7)$$

5.12 उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

(अ) आयताकार परिच्छेद :— आयताकार परिच्छेद का गुरुत्व केन्द्र आधार से $d/2$ की दूरी पर होगा तथा उदासीन अक्ष चित्र में दिखाया गया है । उदासीन अक्ष से y की दूरी पर एक dy मोटी पट्टी लीजिए, इसका क्षेत्रफल $b \times dy$ होगा तथा उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $b\, dy\, y^2$ होगा ।

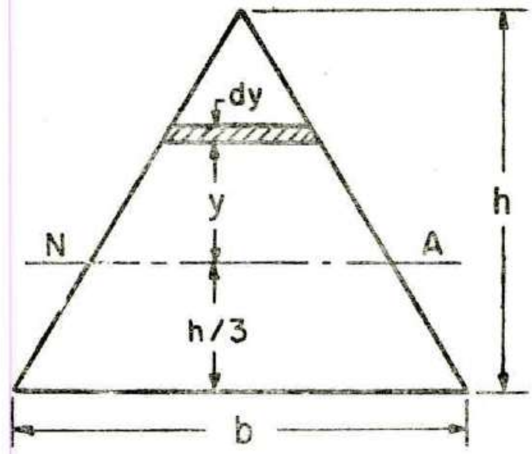


चित्र 5.34

अतः संपूर्ण क्षेत्र का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I_{NA})

$$= \int_{-d/2}^{d/2} b\ dy.\ y^2 = \left[\frac{by^3}{3} \right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{bd^3}{12}$$

(ब) त्रिभुजाकार परिच्छेद :—त्रिभुजाकार परिच्छेद का गुरुत्व केन्द्र आधार से $h/3$ की दूरी पर होगा । उदासीन अक्ष के समांतर y की दूरी पर dy मोटाई की एक पट्टी लीजिए ।



(चित्र 5.35)

इस पट्टी की चौड़ाई $= \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)$

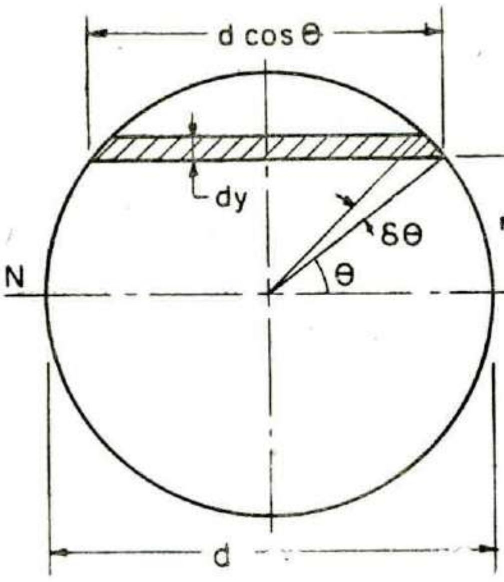
इसका क्षेत्रफल $= \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) dy$

इसका उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) dy\ y^2$

त्रिभुजाकार क्षेत्र का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) y^2 \times dy$

$$= \left[\frac{2hy^3}{9} - \frac{y^4}{4}\right]_{-h/_3}^{+2h/_3}$$

$$= \frac{bh^3}{36}$$



(चित्र 5.36)

(स) वृत्ताकार परिच्छेद :---- वृत्ताकार परिच्छेद का उदासीन अक्ष उसके केन्द्र से होती हुई रेखा होगी अर्थात् वह परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से भी होती हुई जाएगी । इस अक्ष से θ कोण पर एक पट्टी की कल्पना कीजिए जो उदासीन अक्ष के समानांतर हो तथा यह वृत्त के केन्द्र पर कोण $\delta\theta$ बनाती हो । इस पट्टी की चौड़ाई $= d\cos\theta$ होगी । यदि वृत्त का अर्धव्यास r हो तो इस पट्टी की मोटाई $rd\theta \times \cos\theta$ होगी ।

इस पट्टी का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$(I_{NA}) = d\text{Cos}\theta \times rd\theta \times \text{Cos}\theta \times (r\ \text{Sin}\theta)^2$$

$$= \frac{d^4}{8}\int_0^{\pi/2} \text{Cos}^2\theta.\ \text{Sin}^2\theta.\ d\theta$$

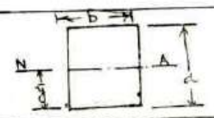
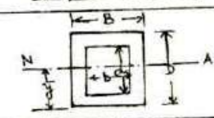
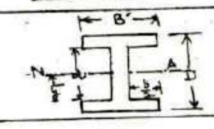
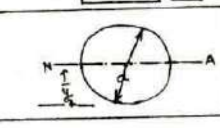
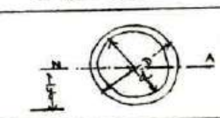
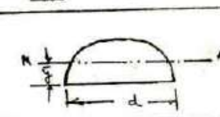
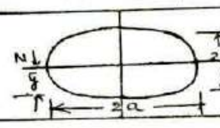
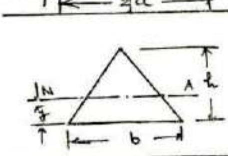
अतः संपूर्ण परिच्छेद का $I_{NA} = \frac{2d^4}{8}\int_0^{\pi/2} \text{Cos}^2\theta.\ \text{Sin}^2\theta \times d\theta.$

$$= \frac{d^4}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 - \text{Cos}_4\theta}{4}\right) d\theta$$

$$= \frac{d^2}{32}\left[\theta - \frac{\text{Sin}_4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi d^4}{64}$$

तालिका 5.1

परिच्छेद विवरण	क्षेत्रफल	निचली सतह से गुरुत्व केंद्र की दूरी $\bar{y}$	उदासीन अक्ष NA के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I_{NA}	धनात्मक बंकन बला-घूर्ण के लिए y_c का अधिकतम मान	धनात्मक बंकन बला-घूर्ण के लिए y_t का अधिकतम मान
	bd	$\frac{d}{2}$	$\frac{bd^3}{12}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$
	$BD-bd$	$D/2$	$\frac{BD^3-bd^3}{12}$	$D/2$	$D/2$
	$BD-bd$	$\frac{D}{2}$	$\frac{BD^3-bd^3}{12}$	$D/2$	$D/2$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$d/2$	$d/2$
	$\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$	$D/2$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$D/2$	$D/2$
	$\frac{\pi d^2}{8}$	$\frac{2d}{3\pi}$	$0.11\left(\frac{d}{2}\right)^4$	$\left(\frac{d}{2}-\frac{2d}{3\pi}\right)$	$\left(\frac{2d}{3\pi}\right)$
	πab	b	$\frac{\pi ab^3}{4}$	$b/2$	$b/2$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{h}{3}$

15—23 M. of HRD/ND/95

विभिन्न परिच्छेदों के गुरुत्व केन्द्र तथा उदासीन अक्ष तालिका 5.1 में दिए गये हैं।

प्रायः सामान्य रूप में प्रयोग किये जाने वाले धरन परिच्छेदों को आयताकार, त्रिभुजाकार तथा वृत्ताकार रूपों में विभाजित किया जा सकता है तथा उनके उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण के मान को "समान्तर अक्ष" प्रमेय के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रमेय के अनुसार यदि किसी परिच्छेद का उसके गुरुत्वीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात हो तो किसी अन्य समान्तर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है, गणितीय राशियों में व्यक्त करने पर,

$$Ix_1 = Ix + Ah^2$$

यहाँ पर h दोनों अक्षों के मध्य की दूरी व्यक्त करता है। I_x तथा I_{x1} क्रमशः गुरुत्वीय तथा अन्य समान्तर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण हैं।

उदाहरण 5.15 : एक 5 cm व्यास के इस्पात के छड़ को वृत्तीय वक्र रूप में मोड़ना है, यदि पदार्थ की अनुमेय बंकन प्रतिबल सामर्थ्य 1000 N/mm² हो तो वह न्यूनतम त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिससे कि छड़ को मोड़ा जा सकता है। छड़ के परिच्छेद का प्रतिरोध आघूर्ण भी ज्ञात कीजिए E = 200 G Pa

हल :

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t}$$

$\sigma \quad \sigma_t = 1000\ N/mm^2$

तथा $y_c = y_t = 2.5$ cm

$$R = \frac{E.\,y_c}{\sigma_c} = \frac{200 \times 10^9 \times 2.5 \times 10}{1000 \times 10^6 \times 10^3} = 500 \text{ cm.}$$

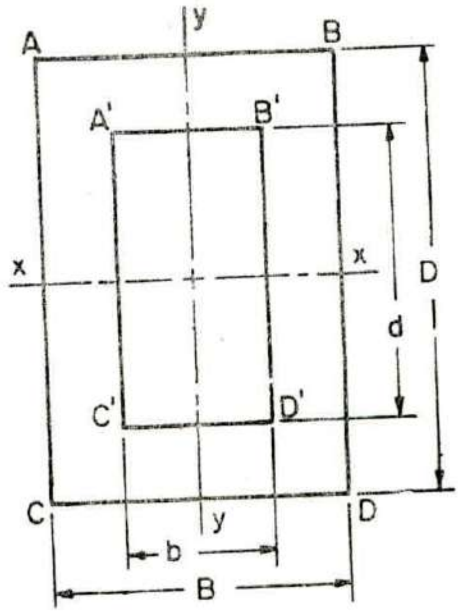
$$= \underline{\underline{5m}}$$

एवं $\frac{M}{I} = \frac{\sigma_c}{y_c} \quad \therefore \quad M = \frac{\sigma_c.\,I.}{y_c} = \frac{\pi}{64}\ \frac{d^4 \times 1000 \times 2}{d}$

or $M = \frac{\pi}{64} \times 2000 \times (5)^3$

$M = 12{,}266$ N/m.

उदाहरण 5.16 : चित्र (5.37) में दिखाये गये आयताकार परिच्छेद का क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर गुरुत्वीय अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।



चित्र 5.37

हल :

$$I_{xx},\ ABCD \text{ के लिए } = \frac{BD^3}{12}$$

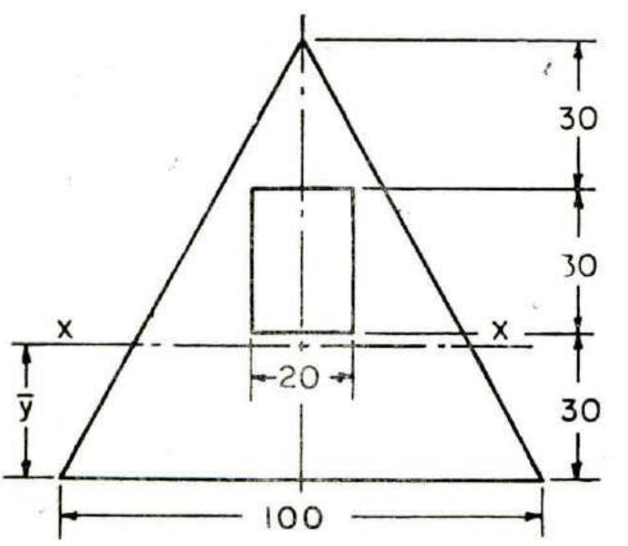
$$A'\,B'\,C'\,D' \text{ का } I_{xx} = \frac{bd^3}{12}$$

$$\text{खोखले परिच्छेद का } I_{xx} = \frac{BD^3 - bd^3}{12}$$

yy–अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण की गणना करते समय परिच्छेद की चौड़ाई D तथा मोटाई B होगी ।

$$\text{अतः परिच्छेद का } I_{yy} = \frac{DB^3 - db^3}{12}$$

उदाहरण 5.17 : चित्र (5.38) में दिखाये गए परिच्छेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष, जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.38)

हल :

त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{10 \times 9}{2} = 45\ cm^2$

इसके गुरुत्व केन्द्र की आधार से दूरी $= 3$ cm

आयत का क्षेत्रफल $= 6\ cm^2$

इसके गुरुत्व केन्द्र की त्रिभुज आधार से दूरी $= 4.5$ cm

$$\text{अतः परिच्छेद के गुरुत्व केंद्र की आधार से दूरी } \bar{y} = \frac{45 \times 3 - 6 \times 4.5}{45 - 6}$$

$$= 2.77 \text{ cm}$$

$$\text{त्रिभुज का } I_{xx} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3} - 2.77\right)^2$$

$$= \frac{10 \times 9^3}{36} + \frac{10 \times 9}{2}(3 - 2.77)^2$$

$$= 202.5 + 2.4 = 204.9 \text{ cm}^2$$

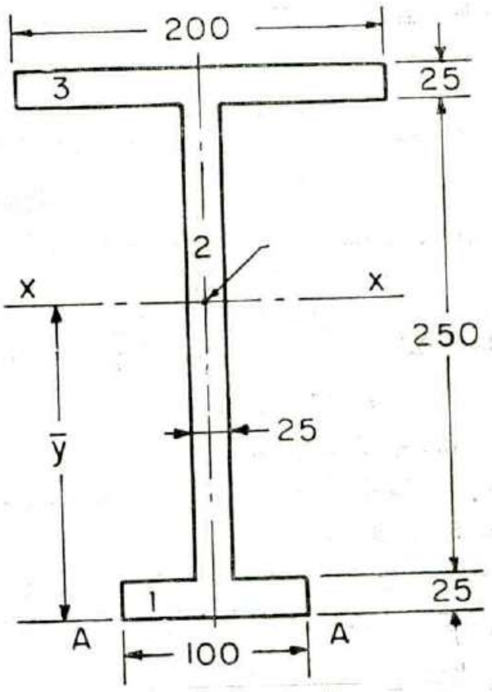
आयताकार छिद्र का $Ixx = \dfrac{bd^3}{12} + bd\,(4.5 - 2.77)^2$

$$= \frac{2 \times 3^3}{12} + 2 \times 3 \times 1.73^2$$

$$= 4.5 + 18 = 22.5 \text{ cm}^4$$

संपूर्ण क्षेत्र का $Ixx = 204.9 - 22.5 = 182.4 \text{ cm}^4$

उदाहरण 5.18 : चित्र (5.39) में दिखाये गये परिच्छेद का I_{xx}, I_{yy} तथा I_{AA} ज्ञात कीजिए। यदि धरन परिच्छेद पदार्थ के लिए अधिकतम अनुमेय प्रतिबल $100 N/mm^2$ हो तो धरन पर प्रति मीटर लग रहे एक समान बंटित भार का मान ज्ञात कीजिए यदि 4m लंबा धरन दोनों सिरों पर सामान्य रूप से आधारित है।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.39)

हल : यह परिच्छेद तीन आयत खंडों में विभाजित किया जा सकता है जो चित्र में (1), (2) तथा (3) द्वारा दिखाये गये हैं। इनके भुजायें, क्रमशः 10×2.5, 20×2.5 तथा 20×2.5 cm हैं।

$$\bar{y} = \frac{10 \times 2.5 \times 1.25 + 25 \times 2.5 \times 15 + 20 \times 2.5 \times 28.75}{10 \times 2.5 + 25 \times 2.5 + 20 \times 2.5}$$

$$= \frac{2406.25}{137.5} = 17.5 \text{ cm.}$$

समांतर अक्ष प्रमेय द्वारा

आयत (1) का $I_{xx} = \dfrac{10 \times (2.5)^3}{12} + 10 \times 2.5\,(17.5 - 1.25)^2$

$$= 6{,}613 \text{cm}^4$$

आयत (2) का $I_{xx} = \dfrac{2.5 \times (25)^3}{12} + 2.5 \times 25\,(17.5 - 15)^2$

$$= 3{,}646 \text{cm}^4$$

आयत (3) का $I_{xx} = \dfrac{20 \times (2.5)^3}{12} + 20 \times 2.5\,(28.75 - 17.5)$

$$= 6{,}354 \text{cm}^4$$

अतः संपूर्ण परिच्छेद का $Ixx = 6{,}613 + 3{,}646 + 6{,}354$

$$= 16{,}613 \text{cm}^4$$

इसी प्रकार $Iyy = \dfrac{25 \times 10^3}{12} + \dfrac{25 \times 2.5^3}{12} + \dfrac{2.5 \times 20^3}{12}$

$$= 1{,}908 \text{cm}^4$$

$I_{AA} = Ixx + A \times (17.5)^2$

$= 16{,}613 + (10 + 20 + 25) \times 2.5 \times (17.5)^2$

$= 58{,}722 \text{cm}^4$

सबसे नीचे वाला रेशा सबसे ऊपर वाले रेशे की अपेक्षा उदासीन अक्ष से अधिक दूरी पर है अतः सबसे निचले वाले रेशे में अधिकतम प्रतिबल होगा।

$$M = \frac{\sigma_t . I.}{y_t} = \frac{100 \times 16613 \times 10^6 \times 10^2}{17.5 \qquad 10^8} = \text{N-m}$$

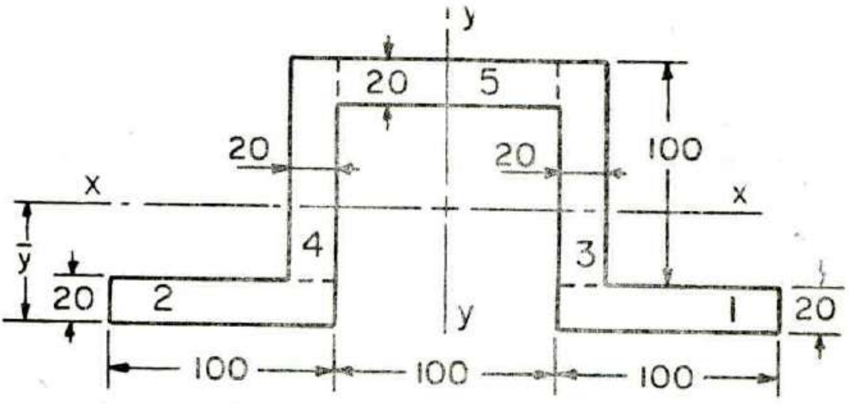
$$= 94931 \text{ N-m}$$

एक समान बंटित भार के लगने पर अधिकतम बंकन बलाघूर्ण का मान $\frac{wl^2}{8}$ है ।

अतः $$94931 = \frac{w \times 4^2}{8}$$

$w = 47.5$ KN/m

उदाहरण 5.19 : चित्र (5.40) में दिखाये गये परिच्छेद पर जब yy समतल में बंकन बल आघूर्ण लगाया जाय अर्थात् इसका बंकन **xx** समतल के सापेक्ष हो, तो इसके सबसे नीचे की सतह में प्रतिबल का मान $100 N/mm^2$ होता है, ऐसी दशा में लग रहे बंकन बल आघूर्ण तथा ऊपरी कोर में उत्पन्न प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.40)

हल : इस परिच्छेद को 10 सेमी × 2 सेमी के पाँच समान आयतों में विभाजित किया जा सकता है जैसा कि चित्र में अंकित किया गया है ।

$$\bar{y} = \frac{20\times1+20\times1+20\times7+20\times11+20\times7}{5\times10\times2}$$
$$= 5.4\times10^{-2}m$$

आयत (1) तथा (2) का $$Ixx = 2 \times \left[\frac{10\times(2)^3}{12} + 20(5.4-1)^2\right]$$
$$= 788 \times 10^{-8}m^4$$

आयत (3) तथा (4) का $$Ixx = 2 \times \left[\frac{2\times(10)^3}{12} + 20(7-5.4)^2\right]$$
$$= 436 \times 10^{-8}m^4$$

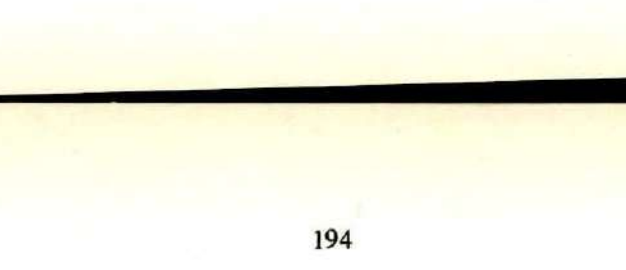
आयत (5) का $$Ixx = \frac{10\times(2)^3}{12} + 20(11-5.4)^2$$
$$= 635 \times 10^{-8}m^4$$
$$Ixx = 788 + 436 + 635 = 1859 \times 10^{-8}m^4$$

$$M = \frac{\sigma_t}{{}_1y_t} \times Ixx = \frac{100 \times 1859 \times 10^{-8}\times10^6}{5.4 \times 10^{-2}} = 34.43 \text{ kN.m}$$

इस प्रकार $$\frac{\sigma_c}{y_c} = \frac{\sigma_t}{y_t}$$

अथवा $$\sigma_c = \frac{\sigma_t}{y_t} \times y_c = \frac{100}{5.4} \times (12-5.4) = 122.2 \text{ N/mm}^2$$

उदाहरण 5.20 : एक गोल धरन जिसका व्यास D है आयताकार परिच्छेद के धरन में परिवर्तित करना है अतः अधिकतम आघूर्ण प्रतिरोध की दृष्टि से धरन के मोटाई तथा चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए ।



चित्र 5.41

हल :

$M = \sigma_c \times Z_c = \sigma_t \times Z_t$

अधिकतम आघूर्ण प्रतिरोध के लिए Z का मान अधिकतम होना चाहिए ।

$$Z = \frac{bd^2}{6}$$

Z का मान अधिकतम होने के लिए bd^2 अधिकतम होना चाहिए ।

$bd^2 = b(D^2 - b^2)$

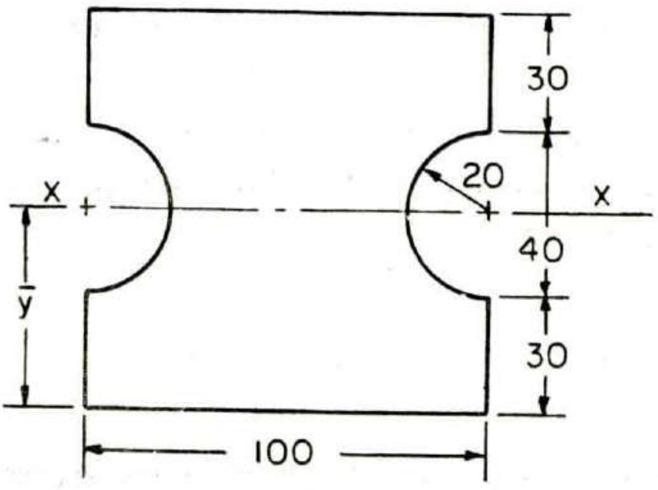
$\therefore \frac{d}{db}(bd^2) = D^2 - 3b^2 = 0$

or $D^2 = 3b^2$

or $d^2 + b^2 = 3b^2$

or $\frac{d}{b} = \sqrt{2}$

उदाहरण 5.21 : चित्र में दिखाए परिच्छेद वाले काष्ठ के धरन के मध्य पर लग रहे अनुमेय भार का मान ज्ञात कीजिए । धरन की विस्तृति 4m है तथा इस प्रकार रखा गया है कि **xx** क्षैतिज दिशा में है तथा दोनों सिरे सरल आधार वाले हैं । काष्ठ में अनुमेय प्रतिबल $10N/mm^2$ है । धरन के स्वयं के भार को नगण्य मत मानिए जिसका मान $8000N/मी^3$ है ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.42)

हल :—

परिच्छेद के **xx** सापेक्ष सममिति के कारण स्पष्ट है कि आधार से उदासीन अक्ष की दूरी $\bar{y} = 5$ cm है ।

$$Ixx = \frac{bd^3}{12} - \frac{\pi d_1^4}{64}$$

$$= \frac{10 \times 10^3}{12} - \frac{\pi}{64} \times (4)^4$$ (दो अर्धवृत्तों को एक पूरा वृत्त माना गया है)

$$= 820.77cm^4$$

निरापद बंकन बल आघूर्ण $= \frac{\sigma_c}{y_c} \times Ixx = \frac{10}{5} \times 820.77$

$= 1641.5N\text{-}m$

परिच्छेद का क्षेत्रफल $= 10 \times 10 - \pi/_4(4)^2 = 87.44cm^2$

धरन का प्रति मी० भार $= \frac{8000 \times 87.44}{(100)^2} = 70N/m$

इसके अपने भार के कारण विस्तृति के मध्य में अधिकतम बंकन बल आघूर्ण का मान

$$= \frac{wl^1}{8} = \frac{70 \times (4)^2}{8} = 140\ N\text{-}m$$

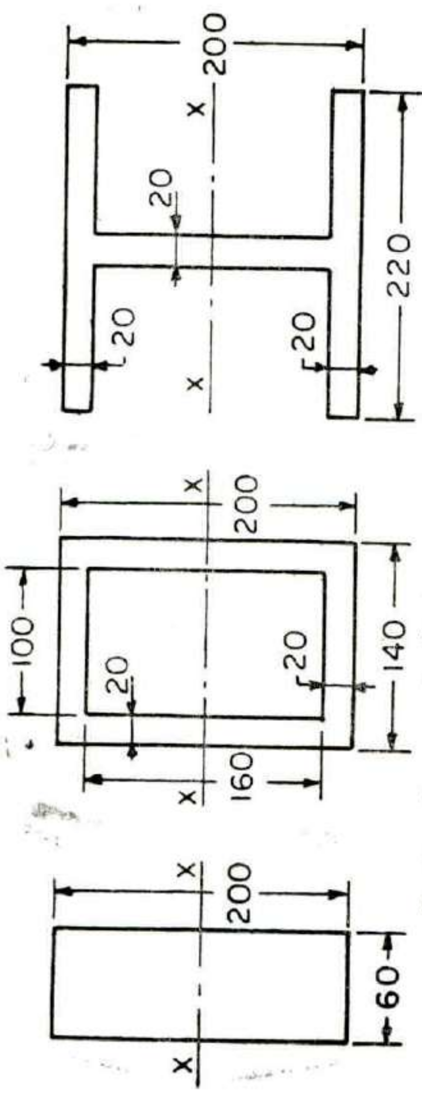
धरन के मध्य विस्तृति पर लग रहे संकेन्द्रित भार के कारण इसके मध्य में अधिकतम बंकन बल आघूर्ण का मान

$$= \frac{Pl}{4} N\text{-}m$$

कुल बंकन बल आघूर्ण $= 140 + P = 1641.5$

अथवा $P = 1501.5N$

उदाहरण 5.22 : चित्र 5.43 में दिखाये गये तीन धरनों के परिच्छेद की बंकन सामर्थ्य की तुलना कीजिए जिनकी मोटाई, लंबाई तथा भार एक समान है ।



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.43)

हल : तीन समान लंबाई, मोटाई एवं भारवाले धरन परिच्छेद चित्र (5.43) में दिखाये गये हैं। इससे स्पष्ट है कि इनका परिच्छेदीय क्षेत्रफल भी समान होगा :

$$\text{आयताकार परिच्छेद का } Ixx = 6 \times \frac{(20)^3}{12}$$

$$= 4000 \text{ cm}^4$$

$$\text{खोखले आयताकार परिच्छेद का } Ixx = \frac{14 \times (20)^3}{12} - \frac{10 \times (16)^5}{12}$$

$$= 5920 \text{ cm}^4$$

$$\text{I परिच्छेद का } Ixx = 2\left[\frac{22 \times (2)^3}{12} + 22 \times 2 \times (10 - 1)^2\right] + \frac{2 \times (16)^3}{12}$$

$$= 7157 + 683 = 7840 \text{ cm}^4$$

$$M = \frac{\sigma_c}{y_c} \times Ixx$$

चूंकि $\frac{\sigma_c}{y_c}$ तीनों ही परिच्छेद के लिए समान है अतः बंकन सामर्थ्य उनके I_{xx} के समानुपाती होगी ।

अतः बंकन सामर्थ्य का अनुपात $= 4000 : 5920 : 7840$

$= 1 : 1.48 : 1.96$

अतएव ठोस आयताकार परिच्छेद वाले धरन की अपेक्षा I-की बंकन सामर्थ्य 1.96 गुणा तथा खोखले आयताकार परिच्छेद की बंकन सामर्थ्य 1.48 गुना है। तीनों ही परिच्छेदों में I-परिच्छेद की बंकन सामर्थ्य अधिकतम है। इसका कारण यह है कि उदासीन अक्ष के समीपवर्ती क्षेत्र में I-परिच्छेद में पदार्थ की मोटाई कम है तथा वहाँ प्रतिबल का मान भी न्यूनतम होता है एवं उस क्षेत्र में जहाँ प्रतिबल अधिक होता है वहाँ स्फारों में पदार्थों की मात्रा अधिक है। खोखले आयताकार परिच्छेद में I-परिच्छेद की अपेक्षा उदासीन अक्ष के समीपवर्ती क्षेत्र में पदार्थ की मात्रा अधिक है इसी कारण इसकी सामर्थ्य I-परिच्छेद से कम परन्तु ठोस आयताकार परिच्छेद से अधिक है। इसी कारण धरन के रूप में I-परिच्छेद का प्रयोग मितव्ययी होता है। I-परिच्छेद की सामर्थ्य इसकी मोटाई बढ़ाकर तथा स्फारों की चौड़ाई घटाकर, और बढ़ाई जा सकती है।

उदाहरण 5.23 : एक ऊर्ध्वाधर पताका दंड, जो कि भूमि से 10m की ऊंचाई तक है, गोल परिच्छेद का है। इसका भूमि वाले सिरे का व्यास 20cm तथा ऊपरी सिरे का व्यास 10cm है। इसके ऊपरी सिरे पर एक 500N का क्षैतिज बल लगाया गया है। इसमें अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पताका दंड का एक प्रास धरन के रूप में है जिसका भूमिवाला सिरा बद्ध है तथा ऊपरी सिरा मुक्त है। इसके लंबाई की दिशा में बंकन बल आघूर्ण तथा परिच्छेद मापांक भिन्न-भिन्न होगा। अतएव अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम अधिकतम प्रतिबल वाले परिच्छेद को ज्ञात करना होगा।

मान लीजिए अधिकतम प्रतिबल वाले परिच्छेद की मुक्त सिरे से दूरी xcm है।

इस परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण $= 500\ x$ N.cm

इस परिच्छेद का व्यास $= \left(10 + \dfrac{x}{100}\right)$cm

परिच्छेद मापांक $= \dfrac{\pi}{32}\left(10 + \dfrac{x}{100}\right)^3$

इस परिच्छेद पर प्रतिबल $(\sigma x) = \dfrac{M_r}{Z_x} = \dfrac{500 \times x \times 32}{\pi\left(10 + \dfrac{x}{100}\right)^3}$

σ_x के अधिकतम मान के लिए $\dfrac{d\sigma_x}{dx}$ का मान शून्य होना चाहिए

$$\frac{d\sigma x}{dx} = \frac{500x \times 32}{\pi}\left[\frac{\left(10 + \frac{x}{100}\right)^3 - 3x\left(10 + \frac{x}{100}\right)^2 \times \frac{1}{100}}{\left(10 + \frac{x}{100}\right)^3}\right] = 0$$

अथवा $\left(10 + \dfrac{x}{100}\right)^3 = 3x\left(10 + \dfrac{x}{100}\right)^2 \times \dfrac{1}{100}$

$$10 + \frac{x}{100} - \frac{3x}{100} = 0$$

$x = 500$cm अथवा $x = 5$m

अतः इस परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण $= 500 \times 500$

$= 2500$ N–m

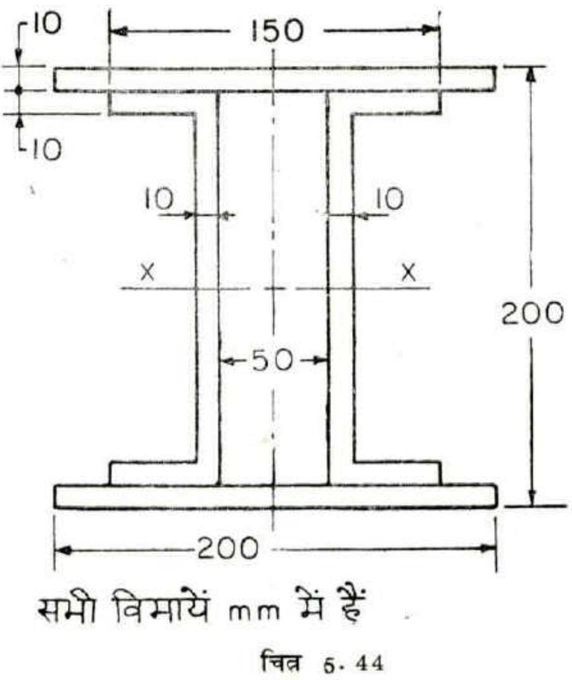
इस परिच्छेद का व्यास $= \left(10 + \dfrac{500}{100}\right) = 15$cm

परिच्छेद मापांक $= \dfrac{\pi}{32}(15)^3$

बंकन प्रतिबल $= \dfrac{250000 \times 32}{\pi \times 15 \times 11 \times 15}$

$= 7.55$ N/mm²

उदाहरण 5.24 : एक संधित धरन (Built—up Beam) परिच्छेद चित्र (5.44) में दिखाया गया है। दो नाली परिच्छेद अक्ष **xx** के सापेक्ष सममिति रूप से रखे गये हैं। धरन के सिरे 5 m की दूरी पर सरल आधार पर टिके हुए हैं। धरन के एक आधार से 2 m की दूरी पर लगने वाले संकेंद्री भार का मान ज्ञात कीजिए यदि धरन में अनुमेय बंकन प्रतिबल 80 N/mm² है। धरन इस प्रकार आधारित है कि इसका बंकन xx अक्ष के सापेक्ष होता है। इस परिच्छेद का **yy** के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण भी ज्ञात कीजिए।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.44

हल : चूंकि परिच्छेद सममिति है अतः उदासीन अक्ष तली से 10 cm की दूरी पर होगा।

ऊपर की तथा नीचे की प्लेटों का $I_{XX} = 2\left[\dfrac{20\times1^3}{12}+20\times(10-0.5)^2\right]$

$$= 2\left[\frac{20}{12}+20\times(9.5)^2\right]$$

$$= 3{,}613 \text{ cm}^4$$

दोनों नाली परिच्छेदों का $I_{XX} = 2\left[1\times\dfrac{(18)^3}{12}+2\left[\dfrac{4\times1}{12}+4\times(10-1.5)^2\right]\right]$

$$= 2{,}130 \text{ cm}^4$$

कुल $I_{XX} = 3613+2130$

$$= 5743 \text{ cm}^4$$

$$M = \frac{\sigma}{y}\times I = \frac{8000\times5743}{10}$$

$$= 45944 \text{ N. m}$$

यदि संकेंद्री भार का मान P हो, तब

$$M = \frac{P.a.b.}{l} = \frac{P\ 2\times3}{5}$$

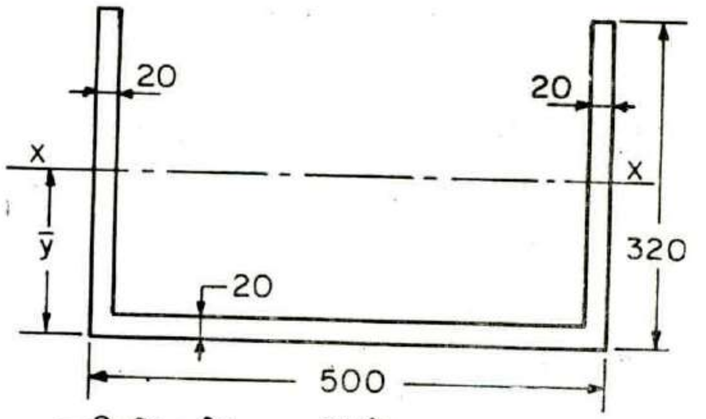
$$P = 3{,}8287 \text{ N}$$

$$I_{YY} = 2\times\left[\frac{18\times1^3}{12}+18\times(3)^2\right]+4\times\left[\frac{1\times4^3}{12}+4\times(5.5)^2\right]+\frac{2\times1\times20}{12}$$

$$= 327+505+1333 = 2165 \text{ cm}^4$$

उदाहरण 5.25 : एक ढलवाँ लोहे के नाली में जिसका परिच्छेद चित्र (5.45) में दिखाया गया है, पानी भरा है। यह 10 मी की दूरी पर दो बिन्दुओं पर आधारित

है। पानी का भार 10000 N/m³ तथा ढलवाँ लोहे का भार 70000 N/m³ है। अतः नाली में पानी की गहराई ज्ञात कीजिए। ढलवाँ लोहे में तनन एवं संपीड़न अनुमेय प्रतिबल का मान क्रमशः 1500 तथा 4500 N/cm² है



सभी विमायें mm में हैं

(चित्र 5.45)

हल :

$$\bar{y} = \frac{50\times2\times1+2\times30\times2\times17}{100+120} = 9.73\text{cm}$$

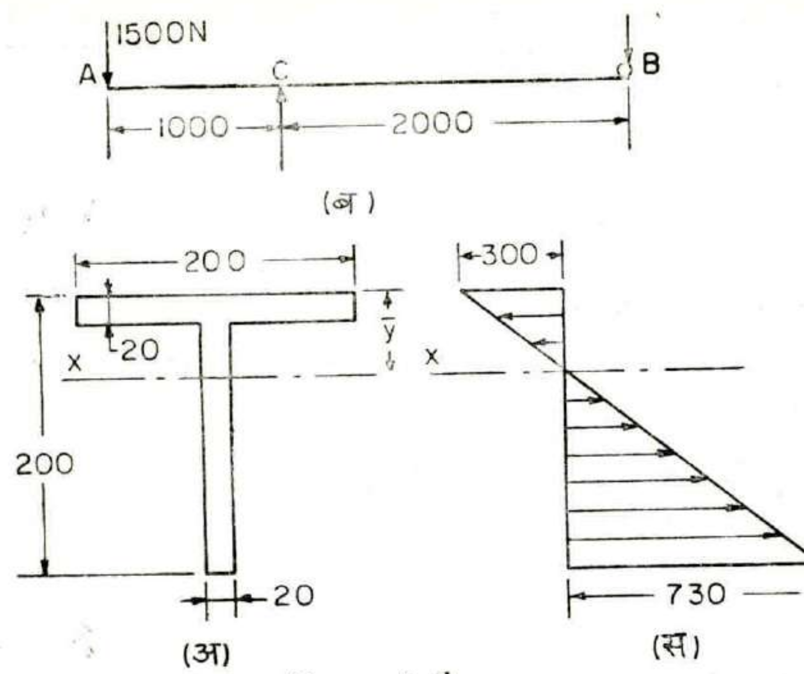
उदासीन अक्ष के सापेक्ष

$$I_{YY} = \frac{50\times2^3}{12}+100\ (9\cdot73-1)^2$$

$$+\ 2\left[\frac{2\times(30)^3+2\times30\times(17-9.73)^2}{12}\right]$$

$$= 7650+15350$$

$$= 23000 \text{ cm}^4$$



सभी विमायें mm मे हैं

चित्र 5.46

संपीड़न में आघूर्ण प्रतिरोध

$$= \frac{4500 \times 23{,}000}{(32-9.73)} = 4.65 \times 10^6 \text{ N.cm}$$

तनन में आघूर्ण प्रतिरोध $= \dfrac{1500 \times 23{,}000}{9.73}$

$= 3.54 \times 10^6$ N.cm

दोनों मानों में से कम मान वाला निरापद आघूर्ण प्रतिरोध होगा । इस प्रकार पदार्थ में 1500N/cm² का तनन प्रतिबल उत्पन्न होगा परन्तु सबसे ऊपरी सतह में संपीड़न प्रतिबल का मान केवल

$$\frac{150 \times (32-9.73)}{9.73} = 3420 \text{ N/cm}^2$$

होगा जो कि इसके अनुमेय संपीड़न प्रतिबल से कम है ।

नाली तथा पानी का भार संपूर्ण 10 मी की विस्तृति पर एक समान रूप से बंटा हुआ है । यदि दोनों का प्रति मी॰ भार w हो तो इसके मध्य पर अधिकतम बंकन बल आघूर्ण का मान $\frac{wl^2}{8}$ होगा ।

$$\frac{w \times (10)^2}{8} = \frac{3.54 \times 10^6}{100}$$

w = 2832 N/m

अतः नाली तथा पानी का प्रति मी लंबाई पर भार 2832 **N** से अधिक नहीं होना चाहिए ।

अतः पानी की सतह (30–28.1) ऊपरी सतह से 1.7 सेमी की दूरी तक है ।

नाली का प्रति मीटर भार = परिच्छेद का क्षेत्रफल × 1 × 70000

= 1540 N

केवल पानी का प्रति मी॰ लंबाई पर भार = (283.2–154)10

= 1292 N

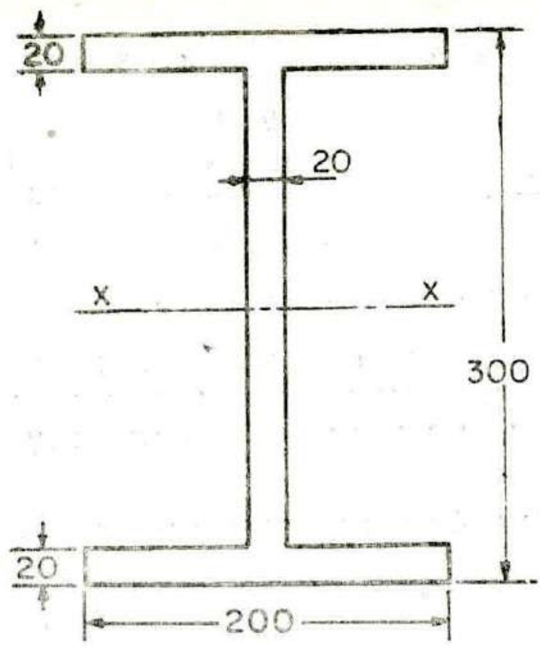
अतः यदि नाली में पानी की गहराई xcm हो, तब,

$$\frac{x \times 46 \times 100 \times 1000}{(100)^2} = 129.2$$

$$\therefore \ x = \frac{1992}{46} = 28.1 \text{ cm}$$

अतः पानी की तरह (30—28.1) = ऊपरी तरह से 1.9 cm की दूरी तक है ।

उदाहरण 5.26 : एक ढलवाँ लोहे के धरन को जिसका परिच्छेद चित्र 5.46 (अ) में दिखाया गया है, चित्र (ब) की भाँति भारित किया गया है । धरन के परिच्छेद में अधिकतम तनन तथा संपीडन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए । अधिकतम बंकन बल आघूर्ण वाले परिच्छेद में प्रतिबल का बंटन दर्शाइये ।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.47

हल :

$$\bar{y} = \frac{40\times 1+36\times 11}{40+36} = 5.736 \text{ cm}$$

$$I_{XX} = \frac{20\times(2)^3}{12} + 40\times(5.736-1)^2 + \frac{2\times(18)^3}{12}$$
$$+ 36 \times (11-5.736)^2$$
$$= 13.3+900+972+1000$$
$$= 2885.3 \text{ cm}^4$$

चित्र में दिखाए गए भार के लिए अधिकतम बंकन बल आघूर्ण C पर होगा तथा इसका मान 1500 N.m है । यह बंकन बल आघूर्ण ऋणात्मक है तथा ऊपरी सतह तनन में एवं सबसे नीचे की सतह संपीडन में होगी ।

$$\sigma_t = \frac{M}{I} \times y_t = \frac{1500\times 100}{2885.3} \times 5.736$$
$$= 300 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{M}{I} \times y_C = \frac{15000\times 100}{2885.3} \times (20-5.736)$$
$$= 730 \text{ N/cm}^2$$

प्रतिबल का बंटन चित्र 5.46 (स) में दिखाया गया है ।

उदाहरण 5.27 : चित्र (5.47) में दिखाए गये ढलवाँ लोहे के I—परिच्छेद के धरन के लिए निरापद बंकन बल आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिए जिससे तनन एवं संपीडन में उत्पन्न प्रतिबल का मान क्रमशः 30 तथा 100 N/mm² से अधिक न हो ।

हल : चूंकि परिच्छेद सममिति है, अतः उदासीन अक्ष तली से 15 cm की दूरी पर होगा ।

$$I_{XX} = 2 \times \left[\frac{20\times(2)^3}{12} + 40\times(15-1)^2\right] + 2\times\frac{(26)^3}{12}$$
$$= 2\,[13.3 + 7840] + 2929$$
$$18,635.6 \text{ cm}^4$$

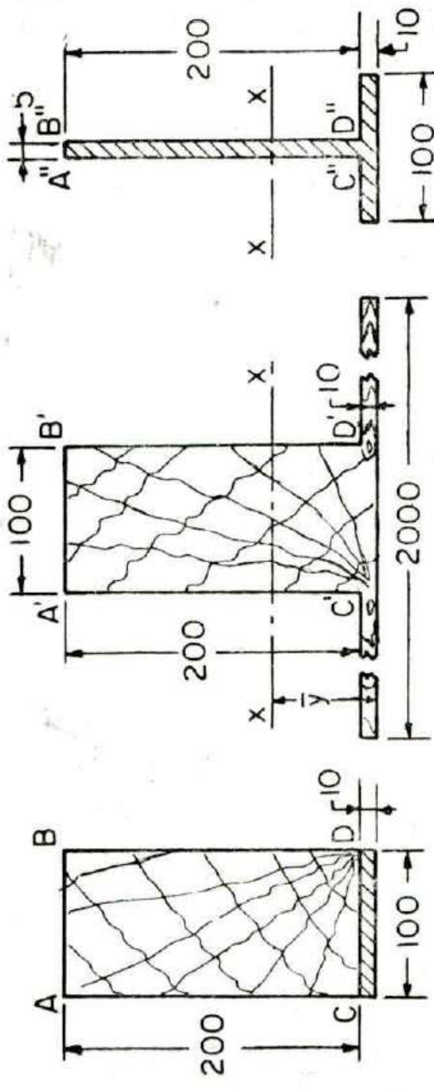
संपीडन में आघूर्ण प्रतिरोध

$$= \frac{\sigma_c}{y_c} \times I_{xx} = \frac{10,000}{15} \times 18,635.6$$
$$= 1.2423 \times 10^7 \text{ N/cm}$$

तनन में आघूर्ण प्रतिरोध $= \frac{\sigma_t}{y_t} \times I_{xx}$

$$= \frac{3000}{15} \times 18,635.6 = 3.7269 \times 10^6 \text{ N/cm}$$

दोनों में कम मानवाला बंकन बल आघूर्ण ही निरापद होगा अतः तनन में आघूर्ण प्रतिरोध $= 3.7269 \times 10^6$ N/cm ;



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.48

अधिकतम उपयोगिता की दृष्टि से परिच्छेद पर निरापद भारण की परिस्थिति में संपीडन एवं तनन दोनों में ही पदार्थ की क्षमता के अनुसार अनुमेय प्रतिबल उत्पन्न होने चाहिए परन्तु कुछ परिच्छेदों में ऐसा स्वाभाविक रूप से संभव नहीं हो पाता। उपर्युक्त अभ्यास में यदि तनन पार्श्व में अधिकतम प्रतिबल का मान 30 N/mm² है तो संपीडन में भी 30 N/mm² का प्रतिबल उत्पन्न होगा क्योंकि $y_c = y_t$ है। इस प्रकार संपीडन पार्श्व में, जिसमें कि अनुमेय प्रतिबल 100 N/mm² है पदार्थ का संपूर्ण उपयोग नहीं हो पाता है। इस प्रकार के परिच्छेद असंतुलित परिच्छेद कहलाते हैं। मितव्ययिता की दृष्टि से उपयुक्त अथवा संतुलित परिच्छेद वह परिच्छेद है जिसमें अधिकतम संपीडन एवं तनन प्रतिबल एक साथ ही उत्पन्न होते हैं। अतः संतुलित परिच्छेद का उदासीन अक्ष इस प्रकार स्थित होगा कि वह परिच्छेद की मोटाई को अधिकतम प्रतिबल के अनुपात में विभाजित करे।

संतुलित परिच्छेद के लिए $\quad \dfrac{y_c}{y_t} = \dfrac{\sigma_c}{\sigma_t}$

5.13 संयुक्त धरन (Composit Beam) :

धरन के किसी परिच्छेद पर यदि एक से अधिक पदार्थ का प्रयोग किया गया हो तो इसको संयुक्त धरन कहा जाता है। इसमें प्रयुक्त सभी घटक पदार्थ परस्पर इस प्रकार संयुक्त किए जाने चाहिए जिससे कि उनमें सापेक्ष सर्पण संभव न हो तथा प्रत्येक पदार्थ का समान वक्रता त्रिज्या तक बंकन होना चाहिए। इस प्रकार के धरन वहाँ प्रयोग किए जाते हैं जहाँ पर एक ही पदार्थ के धरन का उपयोग करने पर आकार बहुत बड़ा हो जाता है तथा प्राप्य स्थान के लिए उपयुक्त नहीं होता है। ऐसी स्थिति में एक पदार्थ को किसी दूसरे पदार्थ से जिसकी सामर्थ्य अधिक हो प्रतिबलित कर दिया जाता है जिससे कि उसके आकार को सीमित किया जा सके तथा परिच्छेद का क्षेत्रफल न्यून किया जा सके। इस विधि का प्रयोग वहाँ भी किया जाता है जब दंड के किसी क्षेत्र पर बहुत अधिक बंकन बल आघूर्ण लग रहा हो। जब पदार्थ की सामर्थ्य संपीडन तथा तनन में एक समान नहीं होती तब भी निर्बल पार्श्व में प्रतिबलन के लिए दूसरे पदार्थ का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण 5.28 : एक काष्ठ धरन का, जिसकी चौड़ाई 10 cm तथा मोटाई 20 cm है एक इस्पात की पट्टी, जिसकी चौड़ाई 10 cm तथा मोटाई 1 cm है द्वारा प्रतिबलन (reinforcement) किया गया है। यहाँ पट्टी धरन के नीचे की सतह पर काबलों द्वारा जोड़ी गई है। धरन का आघूर्ण प्रतिरोध ज्ञात कीजिए यदि काष्ठ एवं इस्पात में निरापद प्रतिबल का मान क्रमशः 10 तथा 150 N/mm² हो तथा $E_s = 20E_t$। इस आघूर्ण प्रतिरोध की तुलना काष्ठ के उस धरन से कीजिए जिसका इस्पात द्वारा प्रतिबलन नहीं किया गया है।

हल : चूंकि काष्ठ तथा इस्पात की वक्रता त्रिज्या समान ही होना चाहिए अतः बंकन समीकरण,

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \text{ द्वारा}$$

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_t} = \frac{E_s}{E_t} \frac{y_s}{y_t} \text{ प्राप्त होता है ।}$$

यहाँ s तथा t क्रमशः इस्पात तथा काष्ठ से संबंधित राशियों को व्यक्त करते हैं ।

अतः उदासीन अक्ष से समान दूरी पर स्थित संयुक्त दंड के पदार्थों में प्रतिबल का मान उनके यंग्स मापांक के समानुपाती होता है। चूंकि समान दूरी पर स्थित इस्पात में प्रतिबल की मात्रा काष्ठ की अपेक्षा बहुत अधिक होगी अतः उतना ही अनुदैर्ध्य बल वहन करने के लिए काष्ठ के पट्टी की चौड़ाई उस स्थान पर बहुत अधिक होनी चाहिए अथवा काष्ठ के समान ही अनुदैर्ध्य बल वहन करने के लिए उस स्थान पर इस्पात की पट्टी की चौड़ाई बहुत कम होनी चाहिए। चूंकि प्रतिबल यंग्स मापांक के समानुपाती होता है अतः संचारित अनुदैर्ध्य बल भी इसी के समानुपाती होगा। दूसरे शब्दों में इस्पात के क्षेत्रफल को काष्ठ के क्षेत्रफल द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सकता है जिसका मान होगा,

$$\frac{E_s}{E_t} \times \text{ इस्पात का क्षेत्रफल}$$

परन्तु ऐसी दशा में इस क्षेत्रफल की उदासीन अक्ष से दूरी अपरिवर्तनीय होनी चाहिए जिससे कि आघूर्ण प्रतिरोध का मान न बदल जाय। चूंकि क्षेत्रफल की उदासीन अक्ष से दूरी नहीं बदलनी चाहिए अतः यह आवश्यक है कि उदासीन अक्ष के समांतर वाली विमा ही बढ़ानी चाहिए न कि उसके अनुप्रस्थ विमा को।

अतः तुल्यमान काष्ठ क्षेत्रफल चित्र (4. 48) में दिखाया गया है। इसकी तली में चौड़ाई $10 \times 20 = 200$cm है ।

$$\bar{y} = \frac{200 \times 1 \times 0.5 + 20 \times 10 \times 11}{200 \times 1 + 20 \times 10} = 5.75 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = \frac{200 \times 1^3}{22} + 200 \times (5.75 - 0.5)^2 + \frac{10 \times (20)^3}{12}$$
$$+ 10 \times 20 \times (11 - 5.75)^2$$
$$= 16.67 + 5520 + 6667 + 5520$$
$$= 17723.67 \text{ cm}^4$$

अधिकतम प्रतिबल काष्ठ रेशा A'B' में उत्पन्न होगा क्योंकि यह उदासीन अक्ष से अधिकतम दूरी पर है। यदि काष्ठ रेशे A'B' में प्रतिबल का मान 10/mm² (जो कि अनुमेय प्रतिबल है) हो तो काष्ठ रेशे E'F' में प्रतिबल का मान,

$$= \frac{10 \times 5.75}{(21 - 5.75)} = 3.76 \text{ N/mm}^2$$

वास्तविक धरन में E'F' इस्पात के रेशे को व्यक्त करता है अतः इसमें प्रतिबल का मान $= 37.6 \times 20 = 752$ N/cm² (यह निरापद मान से कम है)

धरन का आघूर्ण प्रतिरोध :

$$= \frac{1000 \times 17{,}723.67}{(21 - 5.75)}$$
$$= 11.6 \text{ kN/m}$$

दूसरी विधि : संपूर्ण क्षेत्रफल को तुल्यमान इस्पात के क्षेत्रफल में भी व्यक्त किया जा सकता है जैसा कि चित्र 5.48 (स) में दिखाया गया है ।

$$\bar{y} = \frac{10 \times 1 \times 0.5 + 20 \times 0.5 \times 11}{10 \times 1 + 20 \times 0.5} = 5.75 \text{ cm}$$

(यहाँ भी $\bar{y}$ का मान तुल्यमान काष्ठ परिच्छेद के बराबर ही है)

$$I_{xx} = \frac{10 \times 1^3}{12} + 10(5.75 - 0.5)^2 + \frac{0.5 \times 20^3}{12} + 20 \times 0.5(11 - 5.75)^2$$
$$= 883 \text{ cm}^4$$

इस्पात में A"B" में प्रतिबल का मान $100 \times 20 = 2000$N/cm² वास्तविक धरन में A"B" काष्ठ रेशा है । वास्तविक इस्पात का रेशा जिसमें अधिकतम प्रतिबल होगा वह E"F" है। इसमें प्रतिबल का मान अनुमेय से अधिक नहीं होगा। यदि A"B" में प्रतिबल 20,000 N/cm है तो E"F" में प्रतिबल,

$$= \frac{10000 \times 5.75}{(15.25)} = 75.20 \text{ N/mm}^2$$ जो कि इस्पात के लिए निरापद मान से कम है ।

अतः आघूर्ण प्रतिरोध $= \dfrac{20000 \times 883}{(21-5.75)}$

$= 11.6\,\text{kN.m}$

काष्ठ दंड का बिना प्रतिबलन के आघूर्ण प्रतिरोध

$$= \frac{\sigma_t}{\sigma_t} \times I = \frac{1000 \times bd^3}{12d/2}$$

$$= \frac{1000 \times 10 \times (20)^3 \times 2}{20 \times 12}$$

$= 6667$ N.m

आघूर्ण प्रतिरोध अनुपात $= \dfrac{11600}{6667} = 1.74$

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि जब काष्ठ में अपने अधिकतम अनुमेय सीमा का प्रतिबल उत्पन्न होता है उस दशा में इस्पात में केवल 7520 N/cm^2 का प्रतिबल उत्पन्न होता है जो कि अनुमेय मान से काफी कम है। अतः यह एक असंतुलित परिच्छेद है तथा इस्पात का प्रयुक्त क्षेत्रफल पूर्णतया उपयोग में नहीं लाया गया है।

संतुलित परिच्छेद के लिए y_t तथा y_s इस प्रकार हो कि—

$$\frac{y_t}{y_s} = \frac{\sigma_t}{\sigma_o} \times \frac{E_s}{E_t}$$

अतः परिच्छेद को संतुलित बनाने के लिए आवश्यक इस्पात प्लेट की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए

$$\frac{y_t}{y_s} = \frac{1000}{15000} \times 20 = \frac{4}{3}$$

अथवा $3y_t = 4y_s$ . . . . . . (अ)

$y_t + y_s = 21$ . . . . . . (ब)

उपर्युक्त दोनों समीकरणों के द्वारा

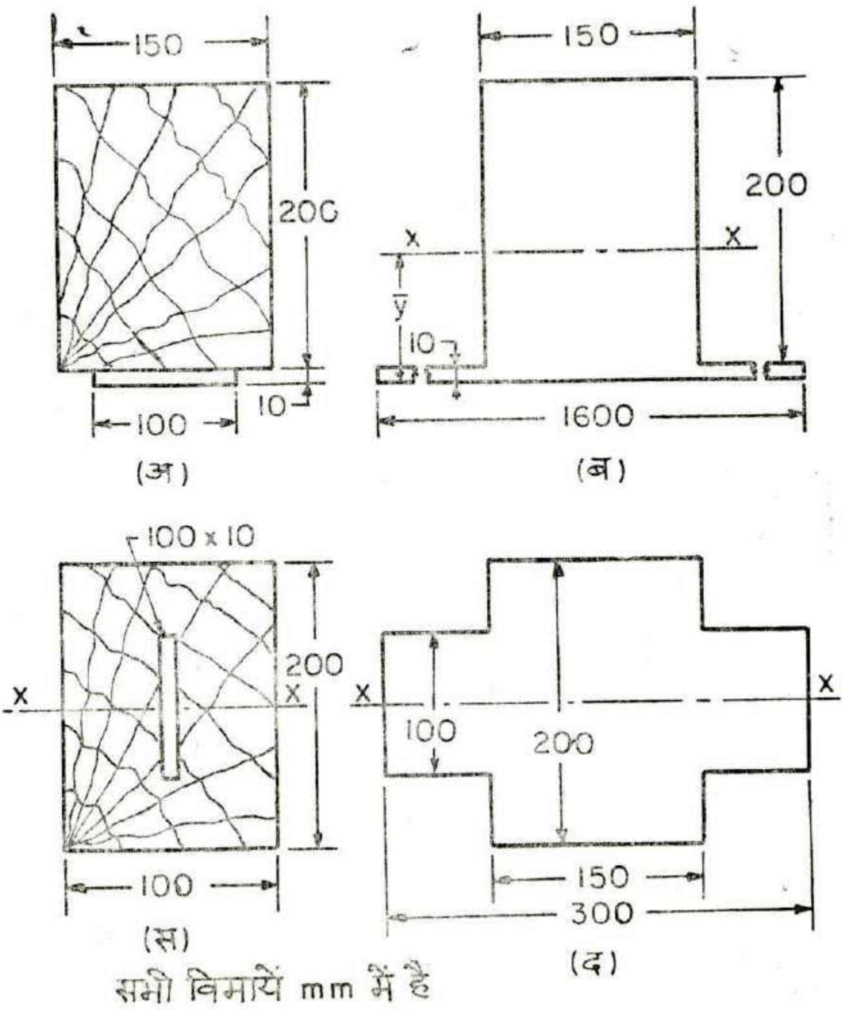
$y_s = 9$ cm $y_t = 12$ cm

इस प्रकार संतुलित परिच्छेद के लिए EF सतह से y की दूरी 9cm होनी चाहिए। यदि इस्पात प्लेट की चौड़ाई xcm हो तो तुल्यमान काष्ठ की चौड़ाई $20 \times x$ होगी

अतः $\bar{y} = 9 = \dfrac{20\times1\times0.5+20\times10\times11}{20x+200}$

अथवा $x = 2.35$ cm

उदाहरण 5.29 : एक 10 cm चौड़ी तथा 1 cm मोटी इस्पात की प्लेट का प्रयोग एक काष्ठ के 15 cm चौड़े तथा 20 cm मोटे धरन के प्रबलन के लिए किया



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.49

गया है । धरन का प्रबलन निम्न विधियों द्वारा किया गया है (अ) इस्पात की प्लेट को काष्ठ धरन के भीतर इस प्रकार जड़ दिया गया है कि उसकी चौड़ाई धरन की मोटाई की दिशा में हैं तथा यह दंड के क्षैतिज एवं ऊध्र्वाधर अक्षों के सापेक्ष सममित है। दोनों दशाओं में धरन की बंकन सामर्थ्य की तुलना कीजिए ।

काष्ठ एवं इस्पात में अनुमेय प्रतिबल का मान क्रमशः 600 तथा 6000N/cm² है । $E_s = 16 \times E_t$

हल :(अ) चित्र 5.49 (ब) में तुल्यमान काष्ठ परिच्छेद दिखाया गया है जिसकी तली की चौड़ाई $10 \times 16 = 160$ cm है ।

$$\overline{y} = \frac{160 \times 1 \times 0.5 + 20 \times 15 \times 11}{160 \times 1 + 20 \times 15} = 7.35 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = \frac{160 \times (1)^3}{12} + 160\,(7.35 - 0.5)^2 + \frac{15 \times (20)^3}{12} + 15 \times 20\,(11 - 7.35)^2$$

$$= 13.33 + 7520 + 10000 + 4000$$

$$= 21,533 \text{ cm}^4$$

काष्ठ के लिए आघूर्ण प्रतिरोध $= \frac{\sigma_t}{y_t} \times I$

$= 94,5000$

काष्ठ में अधिकतम प्रतिबल के आधार पर आघूर्ण प्रतिरोध के लिए इस्पात में प्रतिबल

$$= \frac{\sigma_c}{y_c} \times y_t \, \frac{E_s}{E_t}$$

$$= \frac{600 \times 7.35}{18.65} \times 16 = 5150 \text{ N/cm}^2 \text{ (निरापद)}$$

अतः 94,500 का आघूर्ण प्रतिरोध निरापद है

(ब) काष्ठ धरन को दो बराबर भागों में काटा गया है जिससे कि बीच में इस्पात की प्लेट को बैठाया जा सके । इस प्रकार पट्टी को दोनों भागों में भीतर की ओर कटे हुए खाँचे में बैठाया जाता है । इस प्रकार के धरन को, जिसमें इस्पात की पट्टी को दो काष्ठ खंडों के मध्य दृढ़तापूर्वक बैठाया जाय, विच्छेदी धरन कहा जाता है । तुल्यमान काष्ठ क्षेत्रफल चित्र 5.49 (द) में दिखाया गया है । परिच्छेद के मध्य भाग में चौड़ाई $1 \times 16 + (15 - 1) = 30$ cm क्योंकि जहाँ पर इस्पात

की पट्टी है उस स्थान पर काष्ठ भाग की चौडाई (15—1)cm है । चूंकि परिच्छेद सममिति है अतः $\overline{y} = 10$cm होगा ।

$y_c = y_t = 10$ cm

$$I_{xx} = \frac{15 \times (20)^3}{12} + \frac{15 \times (10)^3}{12} = 11,250 \text{ cm}^4$$

काष्ठ के लिए आघूर्ण प्रतिरोध $= \frac{\sigma_t}{y_t} \times I$

$$= \frac{600 \times 11,250}{10} = 675000 \text{ N-cm}$$

इस्पात का अंतिम रेशा उदासीन अक्ष से केवल 5cm की दूरी पर है अतः इस आघूर्ण प्रतिरोध के लिए इस्पात में अधिकतम प्रतिबल

$$= \frac{60 \times 5 \times 16}{10} \quad 4800 \text{ N/cm}^2 \text{ (निरापद)}$$

अतः 67,5000 N-cm का आघूर्ण प्रतिरोध निरापद है ।

ऐसी स्थितियों में जहाँ प्रतिबलन उदासीन अक्ष के सापेक्ष सममिति रूप से किया जाता है तथा उदासीन अक्ष की स्थिति प्रभावित नहीं होती वहाँ आघूर्ण प्रतिरोध दोनों पदार्थों के लिए अलग-अलग ज्ञात करना चाहिए ।

काष्ठ के लिए

$$I_{xx} = \frac{15 \times (20)^3}{12} - \frac{1 \times (10)^3}{12}$$

$$= 9916.7 \text{ cm}^4$$

काष्ठ का आघूर्ण प्रतिरोध

$$= \frac{600}{10} \times 9916.7$$

$$= 59,5000 \text{ N-cm}$$

इस्पात के लिए $I_{xx} = \frac{1 \times (10)^3}{12} = 83.3 \text{ cm}^4$

इस्पात में प्रतिबल $= 600 \times \frac{5}{10} \times 16 = 4800 \text{ N/cm}^2$

अतः काष्ठ में प्रतिबल का मान 600 किलो N/cm² से अधिक नहीं है

इस्पात के लिए आघूर्ण प्रतिरोध $= \frac{4800 \times 83.3}{5} = 80000$ N-cm

अतः कुल आघूर्ण प्रतिरोध

$$= 59{,}5000 + 80000$$
$$= 67.5000 \text{ N-cm}$$

उदाहरण 5.30 : एक इस्पात की 4 cm वाह्य व्यास की स्लीव 2 cm व्यास के कांस्य छड़ पर चढ़ाई गई है। इस एक मीटर विस्तृति वाले धरन पर एक समान बंटित निरापद भार का मान ज्ञात कीजिए। यदि इसके सिरे सरल रूप में आधारित हों। इस्पात तथा कांस्य में निरापद प्रतिबल का मान क्रमशः 10000 तथा 6000 N/cm^2 है।

$$E_s = 1.5\ E_b$$

हल :

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_b} = \frac{y_s}{y_b} \times \frac{E_s}{E_b} = \frac{2}{1} \times 1.5 = 3$$

अतः $\sigma_s = 3\,\sigma_b$

यदि $\sigma_s = 10000\ N/cm^2$ तो $\sigma_b = \dfrac{10000}{3} = 3333\ N/cm^2$ (निरापद)

इस्पात के लिए $I_{xx} = \dfrac{\pi}{64}\left\{(4)^4 - (2)^4\right\} = \dfrac{15\pi}{4}\ cm^4$

कांस्य के लिए $= I_{xx} = \dfrac{\pi}{64} \times (2)^4 = \dfrac{\pi}{4}\ cm^4$

इस्पात का आघूर्ण प्रतिरोध $= \dfrac{1000}{2} \times \dfrac{15\pi}{4}$

$= 59000$ N-cm

कांस्य का आघूर्ण प्रतिरोध $= \dfrac{100}{3} \times \dfrac{\pi}{4^4}$

$= 2600$ N.cm

कुल आघूर्ण प्रतिरोध $= 5{,}900 + 2600$

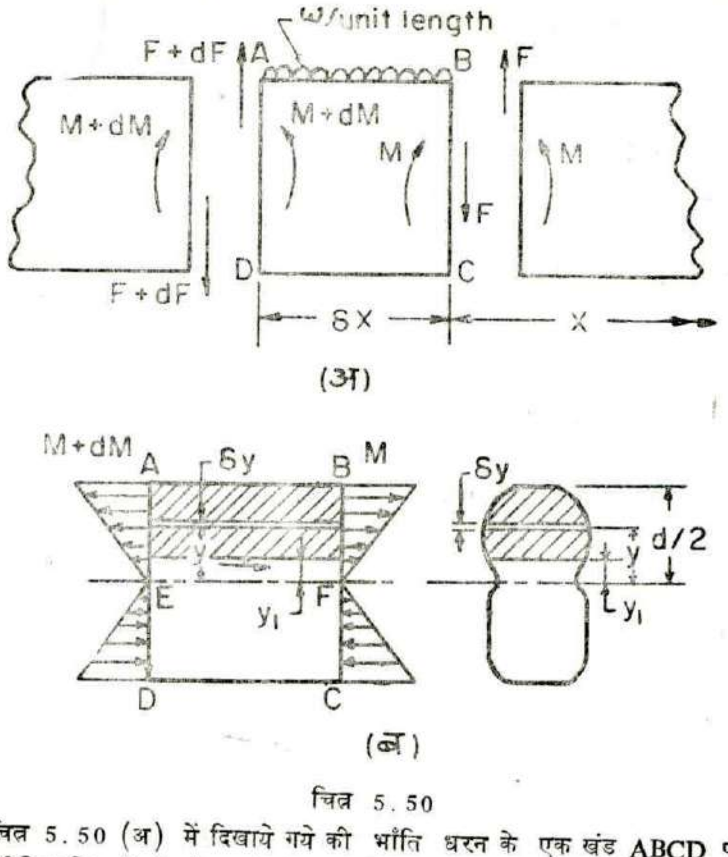
$= 61600$ N.cm

परन्तु $\dfrac{\omega l^2}{8} = \dfrac{61600}{100}$

अथवा $\omega = \dfrac{61600 \times 8}{100} = 4928$ N/m

5.14 धरन में अपरूपण प्रतिबल

बंकन सिद्धांत का वर्णन करते समय यह माना गया था कि परिच्छेद पर कोई अपरूपण बल नहीं लग रहा है तथा धरन पर केवल बंकन आघूर्ण ही लग रहा है, परन्तु जब धरन के अनुप्रस्थ दिशा में भार लगाया जाता है तो बंकन बल आघूर्ण के साथ-साथ परिच्छेद पर अपरूपण बल भी सक्रिय होता है।



चित्र 5.50

चित्र 5.50 (अ) में दिखाये गये की भाँति धरन के एक खंड **ABCD** पर ध्यान दीजिए जिसकी लंबाई δx है तथा इसकी दाहिने सिरे से दूरी **x** है। यह खंड चित्र में दिखाये गये बलों तथा आघूर्णों के अंतर्गत साम्यावस्था में है। चूंकि अपरूपण बल तथा बंकन बल आघूर्ण एक परिच्छेद से दूसरे परिच्छेद पर बदलते रहते हैं। मान लीजिए कि इनका मान पार्श्व BC तथा CD पर जिनकी दूरी सिरे से क्रमशः **x** तथा $x+\delta x$ हैं, M, M+dM एवं F तथा F+dF है। इस खंड पर, भार w प्रति एकांक लंबाई का माना जाएगा चाहे वह संकेंद्री भार हो अथवा एक समान बंटित क्योंकि लंबाई δx बहुत ही छोटी है। इस δx लंबाई के सामावस्था के लिए

$$F + dF = F + w.\,\delta x$$

अथवा $$\text{यव}\ \frac{dF}{d_x} = w \qquad \ldots \qquad (5.7)$$

B_c के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$(M+dM) - M - (F+dF)\,\delta_x + w.\,\delta_x.\ \frac{\delta_x}{2} = O$$

$dM = F.\,\delta_x$ यदि दो छोटी राशियों के गुणनफल को नगण्य माना जाय अर्थात $dF.\,\delta_x$ तथा $w.\,\frac{\delta_x^2}{2}$

$$\text{तब} \quad \frac{dM}{d_x} = F \quad \ldots\ldots \quad (5.8)$$

क्षेत्रफल ABFE पर ध्यान दीजिए जैसा कि चित्र 5.50 (ब) में दिखाया गया है। इस क्षेत्रफल की एक पट्टी जिसकी मोटाई δy है तथा उदासीन अक्ष से दूरी y है, पर ध्यान दीजिए। इस पट्टी की चौड़ाई b है।

इस पट्टी के बायें पार्श्व अर्थात् AD पर प्रतिबल

$$= \frac{M+dM}{I} \times y$$

अतः इस पर लग रहा बल $= \frac{M+dM}{I} \times y \times b \times \delta y$

अतः क्षेत्र ABFE पर लग रहा संपूर्ण बल जो इसको बायें ओर खींचने का प्रयत्न करता है।

$$= \int_{y_1}^{d/_2} \frac{M+M}{I} \times y \times b \times dy$$

इसी प्रकार क्षेत्र ABFE को दाहिनी ओर खींचने वाला संपूर्ण बल

$$= \int_{y_1}^{d/_2} \frac{M}{I}\ y \times b \times dy$$

चूंकि ये दोनों बल समान परिमाण के नहीं है अतः इस अवयव को साम्यावस्था में बनायें रखने के लिए इस क्षेत्रफल पर अतिरिक्त क्षैतिज बल लगाना चाहिए। चूंकि ऊपरी सतह AB किसी बाह्य बल से मुक्त है। अतः निचले सतह EF पर ही आंतरिक क्षैतिज बल लग सकता है जो सर्पण का प्रतिरोध करती है। यह धरन के निचले भाग की क्रिया को क्षेत्र ABFE को व्यक्त करता है। मान लीजिए कि धरन के पार्श्व EF पर अपरूपण प्रतिबल τ है; अतः इस प्रकार प्राप्त क्षैतिज बल $=\tau \times b \times \delta_x$ होगा यहाँ EF पर चौड़ाई को b द्वारा व्यक्त किया गया है।

$$\text{अतः} \quad \int_{y_1}^{d/_2} \frac{M+dM}{I}\ y \times b \times \delta y - \int_{y_1}^{d/_2} \frac{M}{I}\ y \times b \times \delta y$$
$$= \tau \times b\ \delta_x$$

$$\text{अथवा} \quad \tau = \frac{1}{I\text{-}b}\ \frac{dM}{d_x} \int_{y_1}^{d/_2} y \times b \times \delta y$$

यहाँ पर $\int_{y_1}^{a/_2} y \times b \times \delta y$ क्षेत्र ABFE का दंड के उदासीन अक्ष के सापेक्ष प्रथम आघूर्ण को व्यक्त करता है तथा इसको $A\bar{y}$ लिखा जा सकता है जहाँ पर A संपूर्ण ABFE क्षेत्रफल को तथा $\bar{y}$ इसके गुरुत्व केंद्र की उदासीन अक्ष से दूरी व्यक्त करे।

$$\tau = \frac{1}{I \times b} \times \frac{dM}{d_x} \times A\bar{y}\ ; \quad \frac{dM}{d_x} = F \ \text{रखने पर}$$

$$\tau = \frac{F \times A\bar{y}}{I \times b} \quad \ldots\ldots \quad (5.9)$$

यह प्रतिबल τ, EF पर लगता है तथा इसकी दिशा धरन के अक्ष के समान्तर होती है। इसके साथ-साथ समान परिमाण का एक अभिपूरक अपरूपण प्रतिबल भी सक्रिय होगा तथा यह EF के अभिलंबवत अर्थात् धरन परिच्छेद पर लगेगा। अतः धरन के परिच्छेद पर ऊर्ध्वाधर अपरूपण प्रतिबल लगता है जिसका मान समीकरण (5.9) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

समीकरण (5.9) में परिच्छेद पर F अपरूपण बल को व्यक्त करता है, I परिच्छेद के उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण को व्यक्त करता है, b उस स्थान पर परिच्छेद की चौड़ाई होती है जहां प्रतिबल τ ज्ञात करना होता है। A क्षेत्रफल तथा $\bar{y}$ इस क्षेत्रफल के गुरुत्व केंद्र की उदासीन अक्ष से दूरी व्यक्त करता है जो विचाराधीन बिन्दुसे ऊपर की ओर होता है।

किसी बिन्दु पर τ का मान $A\bar{y}$ का सीधा समानुपाती होता है तथा b के व्युत्क्रमानुपाती होता है। F तथा I धरन के मोटाई में सब स्थान पर एक समान होते हैं। यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि जैसे जैसे बिन्दु जिस पर कि प्रतिबल ज्ञात करता है उदासीन अक्ष के समीप होगा वैसे वैसे $A\bar{y}$ का मान बढ़ता जायगा।

अपरूपण प्रतिबल के समीकरण तथा कुछ परिच्छेदों में इसका बंटन नीचे दिये गये अनुच्छेदों में प्राप्त किया गया है।

(अ) आयताकार परिच्छेदः—आयताकार परिच्छेद में उदासीन अक्ष xx से y की दूरी पर अपरूपण प्रतिबल

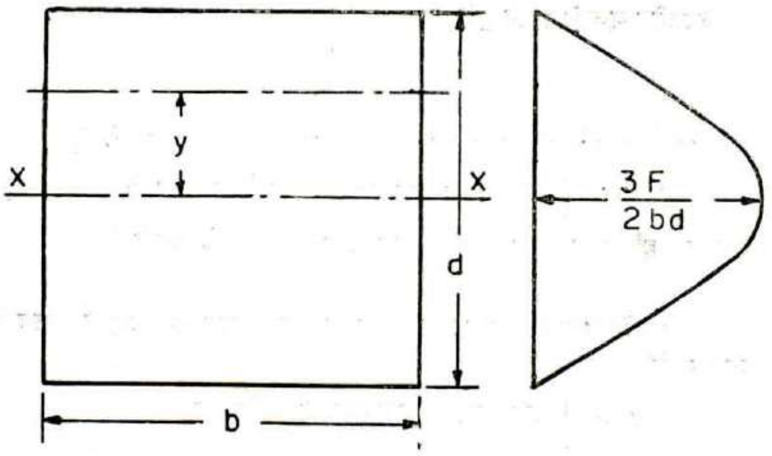
$$\tau = \frac{F.A\bar{y}}{I.b} \quad ; \quad A = b\left(\frac{d}{2} - y\right)$$

$$I = \frac{b.d^3}{12}$$

$$\bar{y} = \left(y + \frac{\frac{d}{2} - y}{2}\right)$$

$$\text{अतः } \tau = \frac{12F}{b^2d^3}\left\{b\left(\frac{d}{2} - y\right)\left(y + \frac{\frac{d}{2} - y}{2}\right)\right\}$$

$$\tau = \frac{6F}{bd^3}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.10)$$



चित्र 5.51

उपर्युक्त समीकरण परिच्छेद पर अपरूपण प्रतिबल के परिवलयिक बंटन को दर्शाता है जैसा कि चित्र (5. 51) में दिखाया गया है। $y = +\frac{d}{2}$ होने पर अपरूपण प्रतिबल शून्य होगा तथा $y = 0$ होने पर प्रतिबल अधिकतम होगा।

17—23 M. of HRD/ND/95

उदासीन अक्ष पर

$$\tau_{\text{अधिकतम}} = \frac{3}{2} \times \frac{F}{db} \quad ; \quad y = 0 \text{ रखने पर}$$

परिच्छेद पर औसत प्रतिबल

$$\tau_{\text{औसत}} = \frac{\text{संपूर्ण अपरूपण बल}}{\text{संपूर्ण क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{F}{bd}$$

अतः आयताकार परिच्छेद के लिए

$$= \frac{\tau\,(\text{अधिकतम})}{\tau\,(\text{औसतन})} = \frac{\frac{3}{2}\;\frac{F}{bd}}{\frac{F}{bd}} = \frac{3}{2}$$

(ब) I — परिच्छेद

उदासीन अक्ष से y की दूरी पर अपरूपण प्रतिबल

$$\tau = \frac{F.A\bar{y}}{I.b}$$

यहाँ उदासीन अक्ष से y की दूरी पर परिच्छेद की चौड़ाई b है।

y का मान $\frac{d}{2}$ से अधिक होने पर फ्लैंज में b का मान B हो जाता है तथा पेटा में जहाँ y का मान $\frac{d}{2}$ से कम है यह चौड़ाई b रहती है।

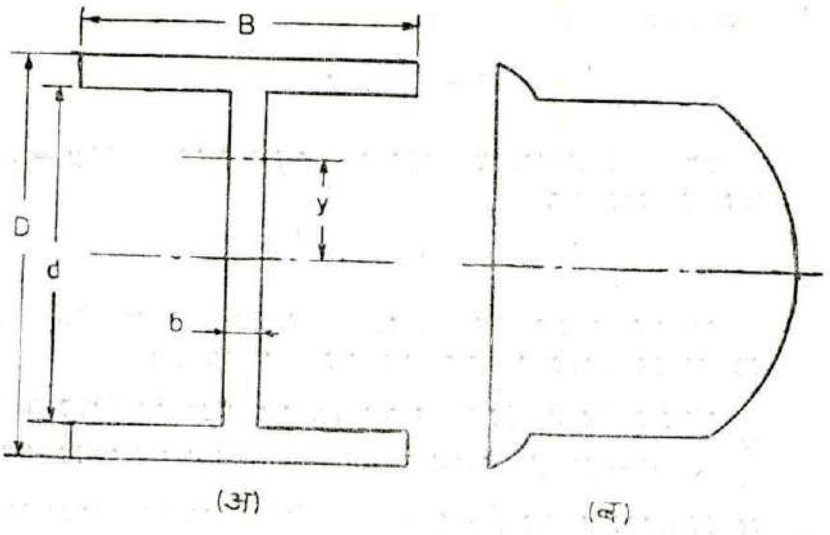
अतः फ्लैंज तथा पेटा में अपरूपण प्रतिबल ज्ञात करने के लिए दो अलग अलग व्यंजक होंगे :

(i) $y > \frac{d}{2}$ होने पर, I परिच्छेद के फ्लैंज में,

$$A = B\left(\frac{D}{2} - y\right); \quad \bar{y} = \left[y + \frac{D/2 - y}{2}\right]$$

$$\tau = \frac{F}{I.b.} \times B\left(\frac{D}{2} - y\right) \times \left[y + \frac{D/2 - y}{2}\right]$$

$$\tau = \frac{F}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.11)$$



चित्र 5.52

इससे यह स्पष्ट है कि I परिच्छेद के फ्लैंज में अपरूपण प्रतिबल का परिवलयिक बंटन होता है $y = D/2$ पर इसका मान शून्य तथा फ्लैंज के निचले सतह पर जहाँ $y = d/2$ होता है अपरूपण प्रतिबल का मान $\frac{F}{8I}(D^2 - d^2)$ है ।

(ii) $y < d/2$ परिच्छेद के पेटा में,

फ्लैंज के लिए $A\bar{y} = \frac{B}{8}(D^2 - d^2)$

पेटा के लिए $A\bar{y} = b\left(\frac{d}{2} - y\right) \times \left\{y + \frac{d/2 - y}{2}\right\}$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

y की दूरी पर संपूर्ण $A\bar{y}$ का मान $= \frac{B}{8}\left(D^2 - d^2\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$

अतः $\tau = \frac{F}{I.b.}\left[\frac{B}{8}(D^2 - d^2) + \frac{b}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right]$

पेटे के ऊपरी सिरे पर अपरूपण प्रतिबल

$$= \frac{F}{I.b.}\left[\frac{B}{8}(D^2 - d^2)\right]; \quad y = \frac{d}{2} \text{ रखने पर}$$

अतः पेटा में भी अपरूपण प्रतिबल का बंटन परिवलयिक है जिससे $y = 0$ पर इसका अधिकतम मान,

$$\tau = \frac{F}{I.b.}\left[\frac{B}{8}(D^2 - d^2) + \frac{bd^2}{8}\right]$$

यह ध्यान देने योग्य है कि फ्लैंज तथा पेटा के संधि स्थल पर दोनों व्यंजकों द्वारा अपरूपण प्रतिबल का भिन्न भिन्न मान प्राप्त होता है ।

यदि संधि स्थल को फ्लैंज का एक भाग माना जाय तो अपरूपण प्रतिबल का मान $\frac{F}{8I} \times (D^2 - d^2)$ होगा तथा यदि इसको पेटा का एक भाग मान लिया जाय तब अपरूपण प्रतिबल का मान $\frac{FB}{8Ib}(D^2 - d^2)$ होगा । अतः इस स्थान पर उदासीन अक्ष से y दूरी पर स्थिर बिन्दु पर $\frac{b}{B}$ के अनुपात में अपरूपण प्रतिबल का मान घटता है । अपरूपण प्रतिबल का बंटन चित्र 5.52 में दिखाया गया है ।

चित्र देखने पर यह ज्ञात होगा कि अपरूपण बल का अधिक भाग पेटा पर लगता है तथा फ्लैंज पर उसका थोड़ा भाग लगता है । सभी परिच्छेदों में उन स्थानों पर जहाँ बंकन बल आघूर्ण का मान अधिकतम होता है वहाँ अपरूपण बल शून्य होता है । उसी प्रकार जहाँ अपरूपण बल अधिकतम होता है वहाँ बंकन बल आघूर्ण शून्य होता है । अतः I-परिच्छेद में बंकन बल आघूर्ण का अधिकांश प्लैंज में लगता है परन्तु अपरूपण बल का अधिकांश पेटा में सक्रिय होता है ।

दोनों फ्लैंजों पर लग रहा संपूर्ण अपरूपण बल

$= 2 \times \tau \times$ एक फ्लैंज का क्षेत्रफल

चूंकि τ का मान फ्लैंज की मोटाई की दिशा में बदलता रहता है अतः उदासीन अक्ष से y की दूरी पर dy मोटाई की एक पट्टी लीजिए

$$\tau = \frac{F}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)$$

क्षेत्रफल $= B \times dy$

∴ इस पट्टी पर लगने वाला संपूर्ण अपरूपण बल

$$= \frac{F}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \times B.dy$$

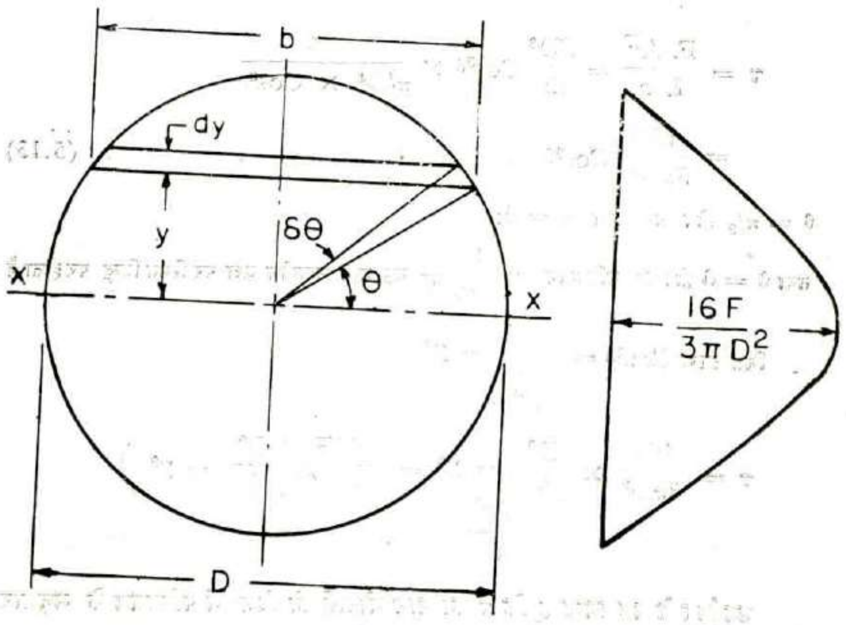
दोनों फ्लैंज में संपूर्ण अपरूपण प्रतिबल

$$= 2 \times \int_{d/_2}^{D/_2} \frac{F}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \times B \times dy$$

$$= \frac{F.B}{I}\left[\frac{D^2}{4} - \frac{y^3}{3}\right]_{d/_2}^{D/_2}$$

$$= \frac{F.B}{I}\left[\frac{D^3}{12} - \frac{D^2d}{8} + \frac{d^3}{24}\right] \quad . \quad . \quad (5.12)$$

(स) ठोस वृत्ताकार परिच्छेद :—चित्र 5.53 में व्यास D का एक वृत्ताकार परिच्छेद दिखाया गया है ।



चित्र 5.53

चित्र में दिखाए गए की भाँति उदासीन अक्ष से **y** की दूरी पर dy मोटी पट्टी पर ध्यान दीजिए ।

$$y = D/_2 \operatorname{Sin}\theta$$

$$dy = D/_2 \operatorname{Cos}\theta.\ d\theta$$

$$b = D\operatorname{Cos}\theta$$

$$A\bar{y} = \int b \times dy \times y$$

$$= \int_0^{\pi/_2} D \operatorname{Cos}\theta \times \frac{D}{2}\operatorname{Sin}\theta \times \frac{D}{2}\operatorname{Cos}\theta.\ d\theta$$

$$= \frac{D^3}{4}\left[-\frac{\operatorname{Cos}^3\theta}{3}\right]_{\rho}^{\pi/_2}$$

$$= \frac{D^3}{12}\operatorname{Cos}^3\theta$$

$$\tau = \frac{F.\ A\bar{y}}{I.\ b.} = \frac{FD^3}{12}\operatorname{Cos}^3\theta \times \frac{64}{\pi/D^4 \times \operatorname{Cos}^3\theta}$$

$$= \frac{16F}{3\pi D^2}\operatorname{Cos}^2\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.13)$$

$\theta = \pi/_2$ होने पर तथा $\tau = 0$;

तथा $\theta = 0$ होने पर अधिकतम $= \frac{16F}{3\pi D^2}$ यह मान उदासीन अक्ष पर स्थित बिन्दु पर होता है ।

चित्र द्वारा $\operatorname{Cos}^2\theta = \dfrac{\frac{D^2}{4} - y^2}{D^2/4}$

$$\tau = \frac{16F}{3\pi D^2} \times \frac{\frac{D^2}{4} - y^2}{\frac{D^2}{4}} = \frac{64F}{3\pi D^4}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)$$

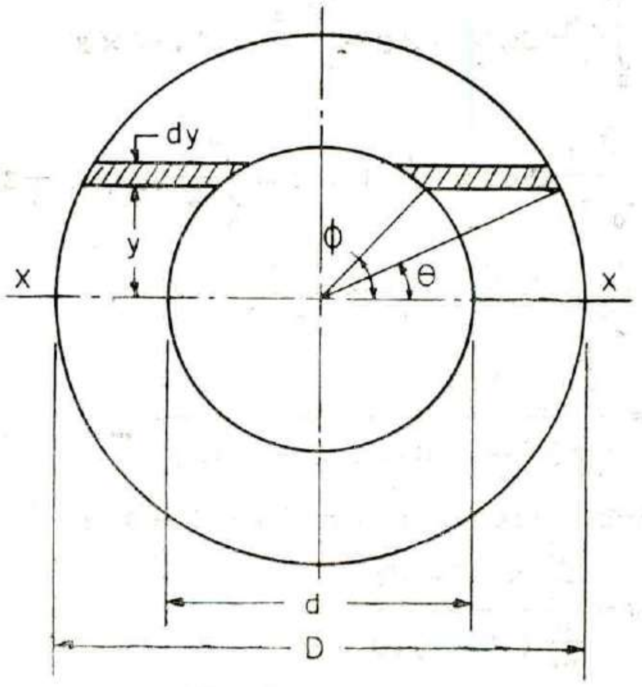
उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि τ का मान मोटाई की दिशा में परिवलय के अनुसार बदलता है ।

$$\text{औसत अपरूपण प्रतिबल} = \frac{F}{\pi/_4 D^2} = \frac{4F}{\pi D^2}$$

$$\frac{\tau \text{ अधिकतम}}{\tau \text{ औसत}} = \frac{16F}{3\pi D^2} \times \frac{\pi D^2}{4F} = \frac{4}{3}$$

$$\text{अथवा } \tau \text{ अधिकतम} = \frac{4}{3} \tau \text{ औसत}$$

(द) खोखला वृत्ताकार परिच्छेद :—उदासीन अक्ष से y की दूरी पर dy मोटाई की एक पट्टी पर ध्यान दीजिए जैसा कि चित्र (5.54) में दिखाया गया है।



चित्र 5.54

$$y = \frac{D}{2} \text{ Sin}\theta = \frac{D}{2} \text{ Sin}\phi$$

$$dy = \frac{D}{2} \text{ Cos}\theta \, d\theta = \frac{d}{2} \text{ Cos}\phi . \, d\phi$$

$$\text{पट्टी की चौड़ाई} = 2\left(\frac{D}{2}\text{ Cos}\theta - \frac{d}{2}\text{ Cos}\phi\right)$$

$$\text{पट्टी का क्षेत्रफल} = 2\left(\frac{D}{2}\text{ Cos}\theta - \frac{d}{2}\text{ Cos}\phi\right) \times dy$$

$$= D.\text{Cos}\theta. \frac{D}{2}\text{ Cos}\theta.\, d\theta - d\text{Cos}\phi. \frac{d}{2}\text{ Cos}\phi.\, d\phi$$

यह जैसा कि चित्र में दिखाया गया है दोनों पार्श्वों में दोनों पट्टियों के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है।

$$Ay = \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{D_2}{2} \text{Cos}^2\theta.\, d\theta \times y - \int_{\phi}^{\pi/2} \frac{d^2}{2} \text{Cos}^2\phi.\, d\phi \times y$$

$$= \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{D^2}{2} \text{Cos}^2\theta \times \frac{D}{2} \text{ Sin}\theta \, d\theta - \int_{\phi}^{\pi/2} \frac{d^2}{2} \text{Cos}^2\phi \times \frac{d\phi}{2} \text{Sin}\phi . d\phi$$

$$= \frac{D^3}{4} \frac{\text{Cos}^3\theta}{3} - \frac{d^3}{4} \times \frac{\text{Cos}^3\phi}{3}$$

$$\text{अतः } \tau = \frac{\frac{F}{12}\left[D^3\text{Cos}^3\theta - d^3\text{Cos}^3\phi\right]}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \times (D\text{ Cos}\theta - d\text{ Cos}\phi)} \quad \cdots\cdots\cdots (5.14)$$

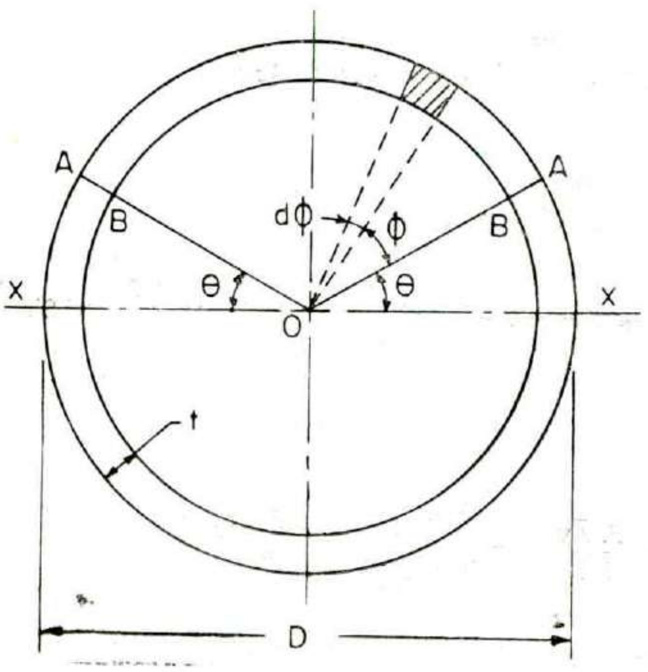
τ का अधिकतम मान उदासीन अक्ष पर होगा जहाँ $\theta = \phi = 0$ है।

$$\tau \text{ अधिकतम} = \frac{\frac{F}{12} \times (D^3 - d^3)}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)(D - d)}$$

$$= \frac{F}{\pi/_4(D^2 - d^2)} \; \frac{\frac{D^3 - d^3}{12}}{\frac{1}{16} \times (D^2 + d^2)(D - d)}$$

$$\tau = \text{ औसत} \times \frac{4}{3} \; \frac{(D^3 - d^3)}{3(D^2 + d^2)(D - d)}$$

(क) पतली नलिका : एक पतली नलिका, जिसका व्यास D तथा मोटाई t है, पर जैसा कि चित्र 5.55 में दिखाया गया है ध्यान दीजिए ।



चित्र 5.55

यहाँ इस बात पर ध्यान देना आवश्यक है कि अपरुपण प्रतिबल नलिका की मोटाई उसके व्यास की अपेक्षा न्यून होने के कारण उसकी सतह की दिशा की ओर लगेगा अर्थात वह प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्शरेखीय दिशा में होगा । अभिपूरक अपरुपण प्रतिबल तब त्रिज्या की दिशा में होगा अतएव त्रिज्य क्षेत्रफल पर ही ध्यान दिया जाना चाहिए । परिच्छेद की चौड़ाई उसके त्रिज्य मोटाई की दुगनी होनी चाहिए ।

उदासीन अक्ष से θ कोण पर स्थित त्रिज्य परिच्छेद AB में प्रतिबल ज्ञात करने के लिए त्रिज्य रेखाओं 0A के अंतर्गत संपूर्ण क्षेत्रफल पर ध्यान देना चाहिए । एवं $A\bar{y}$ इस क्षेत्र के सापेक्ष ज्ञात किया जाना चाहिए ।

ϕ तथा $(\phi + d\phi)$ कोणों के मध्य के छायांकित क्षेत्रफल को लीजिए ।

इस छायांकित क्षेत्रफल का उदासीन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण

$$= \frac{D}{2}\ d\phi \times t \times \frac{D}{2} \times \mathrm{Sin}\phi$$

$$A\bar{y} = 2 \times \int_0^{\pi/2} \frac{D}{2}\ d\phi \times t \times \frac{D}{2}\ \mathrm{Sin}\phi$$

$$= \frac{D^2}{2} \times t \times \mathrm{Cos}\theta$$

उदासीन अक्ष के सापेक्ष $I = 4 \times \int_0^{\pi/2} \frac{D}{2} \times d\phi\ .t \times \left(\frac{D}{2} \times \mathrm{Sin}\phi\right)^2$

$$= \frac{\pi D^3 t}{8}$$

$$\tau_{AB} = \frac{F.\ \overline{Ay}}{I.\ b.} = \frac{F \times \frac{D^2}{2}}{\frac{\pi D3t}{8} \times 2t} = \frac{2F.\ \mathrm{Cos}\theta}{\pi Dt} \quad . \quad . \quad . \quad (5.15)$$

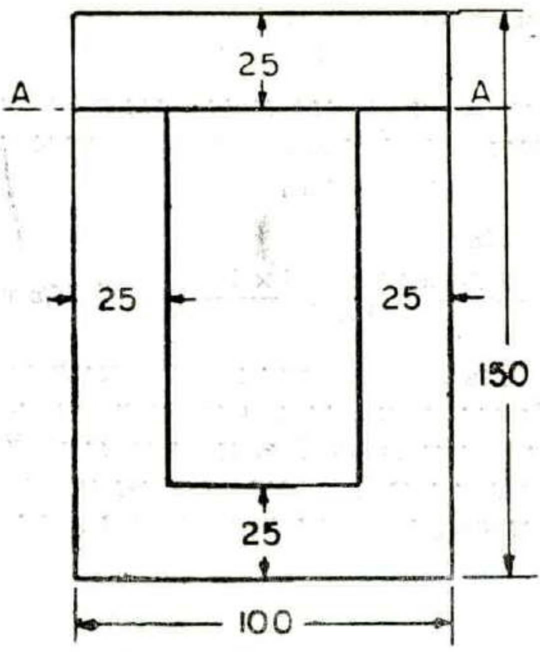
अधिकतम अपरुपण प्रतिबल $\theta = 0$ पर अर्थात उदासीन अक्ष पर होगा ।

τ अधिकतम $= \frac{2F}{\pi Dt}$

τ औसत $= \frac{F}{\pi Dt}$ क्योंकि πDt नलिका के परिच्छेदीय क्षेत्रफल को व्यक्त करता है ।

अथवा τ अधिकतम $= \tau$ औसत

उदाहरण 5.31 : एक आयताकार-परिच्छेद का खोखला धरन जैसा कि चित्र 5.56 में दिखाया गया है दोनों सिरों पर सरल आधारित है । यह ज्ञात कीजिए कि उसके मध्य पर कितना भार लगाया जा सकता है जिससे कि उसमें उत्पन्न अपरुपण प्रतिबल का मान 1000 N/cm^2 से अधिक न हो । AA पर अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान बताइये ।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.56

हल : आयताकार परिच्छेद में अधिकतम प्रतिबल उदासीन अक्ष पर लगता है।
उदासीन अक्ष से ऊपर के भाग का क्षेत्रफल $= 50\ \text{cm}^2$

$$I = \frac{28750}{12}\ \text{cm}^4$$

उदासीन अक्ष से $\overline{y} = \dfrac{10 \times 25 \times 6.25 + 2 \times 5 \times 2.5 \times 2.5}{10 \times 2.5 + 2 \times 5 \times 2.5} = 4.375$ cm

चौड़ाई $= 2.5 + 2.5 = 5$ cm

यदि अधिकतम अनुमेय अपरुपण बल का मान F हो।

$$1000 = \frac{F \times 50 \times 4.375}{\frac{28750}{12} \times 5}$$

$$F = \frac{100 \times 5 \times 28.750}{12 \times 50 \times 4.275} = 54760\ \text{N}$$

अधिकतम अपरूपण बल $= \frac{1}{2} \times$ मध्य पर लग रहा भार

मध्य पर लगने वाला भार $= 2 \times 54760$
$= 109520$ N

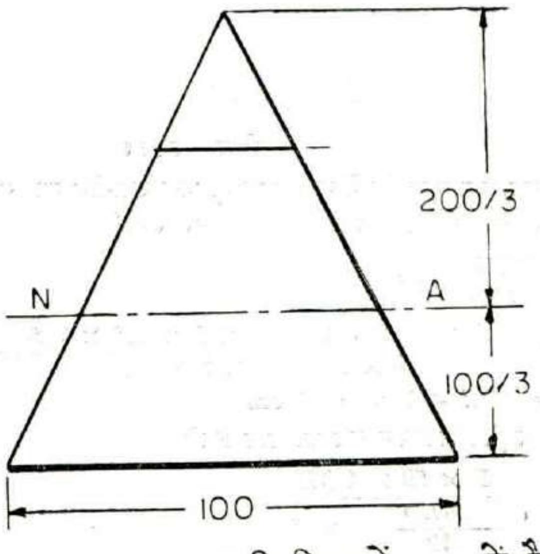
परिच्छेद के सतह A–A पर अधिकतम अपरुपण प्रतिबल उस अवस्था में होगा जब इसका मान न्यूनतम चौड़ाई अर्थात $2.5 + 2.5 = 5$ मानकर निकाला जाय ।

$A = 10 \times 2.5 = 25\ \text{cm}^2$

$\overline{y} = 6.25$ cm

$$\tau = \frac{54760 \times 25 \times 6.25 \times 12}{28750 \times 5} = 714\ \text{N/cm}^2$$

उदाहरण 5.32 : एक त्रिभुजाकार परिच्छेद वाले धरन को उस प्रकार स्थापित किया गया है कि उसका आधार क्षैतिज रहे । परिच्छेद की चौड़ाई तथा मोटाई दोनों 10 cm है । यदि उस पर 20000 N का अपरुपण बल लग रहा हो तो अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान बताइये अधिकतम प्रतिबल वाले परिच्छेद की दूरी उदासीन अक्ष से ज्ञात कीजिए तथा उदासीन अक्ष पर भी प्रतिबल का मान बताइये ।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.57

हल : चित्र 5.57 में धरन के परिच्छेद को दिखाया गया है ।
शीर्ष से X की दूरी पर अपरूपण प्रतिबल τ_x का मान

$$= \frac{F.\ A\bar{y}}{I.\ b} \quad \text{जब कि } F = 20000\ \text{N}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\left(10 \times \frac{X}{10}\right) X \ ; \quad \bar{y} = \frac{20}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$I = \frac{10 \times 10^3}{36} \ ; \quad b = \frac{10 \times x}{10} = x$$

$$\tau_x = \frac{20000 \times \tfrac{1}{2}x^2 \times \left(\frac{20}{3} - \frac{2x}{3}\right)}{\frac{10^4}{36} \times x}$$

τ_x का मान अधिकतम होगा यदि

$$\frac{d\tau_x}{d_x} = \frac{2{,}0000 \times 36}{2 \times 10^4}\left(\frac{20}{3} - \frac{4x}{3}\right) =$$

अथवा $x = 5$ cm

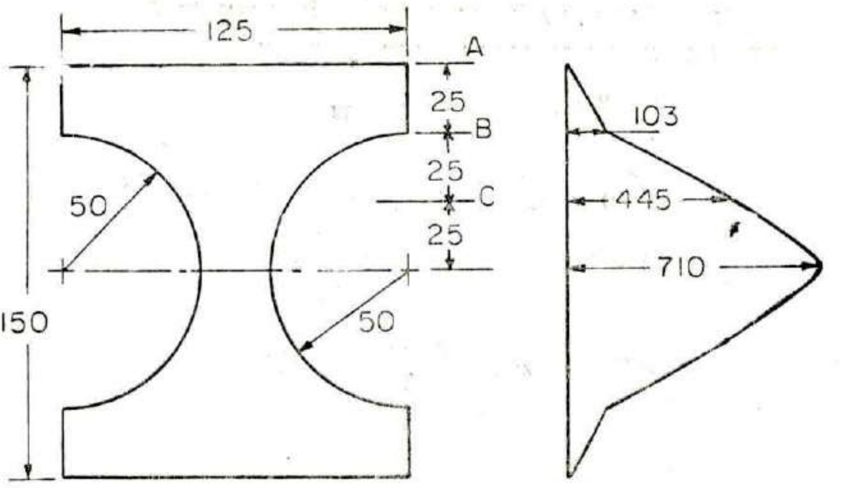
$$\tau \text{ अधिकतम} = \frac{2000 \times \frac{25}{2} \times \frac{10}{3}}{\frac{10^4}{36} \times 5} = 600\ \text{N/cm}^2$$

$$\left(x = \frac{20}{3} \text{ होने पर}\right)$$

$$\tau \text{ (उदासीन अक्ष)} = 533\ \text{N/cm}^2$$

इससे यह ज्ञात होता है कि अपरूपण प्रतिबल का मान उदासीन पर अधिकतम नहीं है ।

उदाहरण 5.33 : चित्र 5.58 में दिखाये गये परिच्छेद पर यदि 20 kN का अपरूपण बल लग रहा हो तो A, B, C, तथा उदासीन अक्ष पर अपरूपण प्रतिबल का मान बताइये । अधिकतम एवं औसत प्रतिबल का अनुपात भी ज्ञात कीजिए । परिच्छेद की मोटाई की दिशा में उचित पैमाना मानकर अपरूपण प्रतिबल के बंटन को दिखाइये (लं० वि० बि०) ।



(अ) (ब)

सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.58

हल $I = = \frac{12.5 \times (15)^3}{12} - \frac{\pi}{64}(10^4) = 3020\ \text{cm}^4$

A पर $A\bar{y}$ का मान $= 0; \quad \tau_A = 0$

B पर $A\bar{y}$ का मान $= 12.5 \times 2.5 \times 6.25 = 195\ \text{cm}^3$

$$\zeta_B = \frac{20{,}0000 \times 195}{3020 \times 12.5} = 1030\ \text{N/cm}^2$$

C पर $A\bar{y}$ का मान $= 12.5 \times 5 \times 5 - \int_{2.5}^{5} 2x \times dy \times y$

$$= 312.5 - \int_{2.5}^{5} (25 - y^2)^{\frac{1}{2}} \times 2y \times dy$$

$$= 312.5 + \frac{2}{3}\left[(25 - y^2)^{3/2}\right]_{2.5}^{5}$$

$$= 312.5 - 54.3 = 285.2\ \text{cm}^3$$

$$b = 12.5 - 2\sqrt{25 - y} = 12.5 - 2\sqrt{25 - (2.5)^2}$$

$$= 3.85\text{cm}$$

$$\zeta_c = \frac{200000}{3020} \times \frac{258.2}{3.85} = 4450 \text{ N/cm}^2$$

D पर $A\bar{y}$ का मान $= 12.5 \times 7.5 \times 3.75 - \int_0^5 (25 - y^2)^{\frac{1}{2}}\, 2y\, dy = 269 \text{cm}^3$

उदासीन अक्ष से ऊपर के भाग का Ay भी ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि अर्द्धवृत्त का गुरुत्व केंद्र आधार व्यास से $\frac{4\gamma}{3\pi}$ की दूरी पर होता है ।

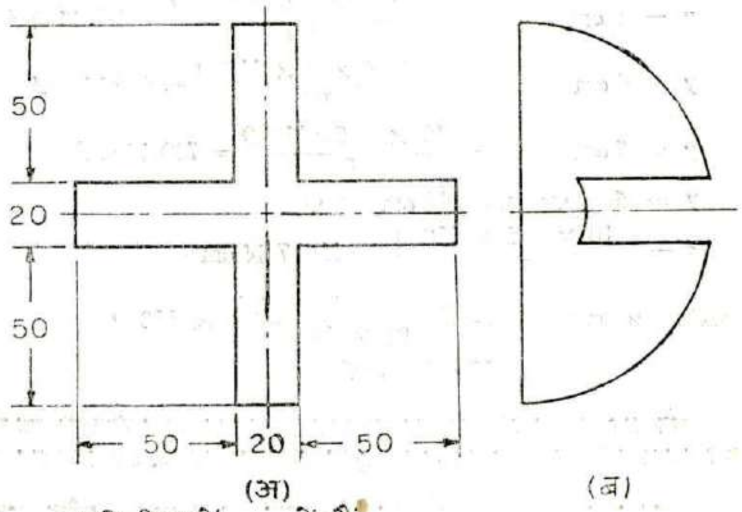
$$A\bar{y} = (12.5 \times 7\ddot{y}5) \times 3.75 - \frac{\pi}{8}\, 1_0{}^2 \times \frac{4 \times 5}{3\pi} = 269 \text{ cm}^3$$

$$b = 2.5 \text{ cm}$$

$$\tau = \frac{20{,}0000 \times 269}{3020 \times 2.5} = 7100 \text{ N/cm}^2$$

अपरूपण प्रतिबल का बंटन चित्र 5.58(ब) में दिखा या गया है ।

उदाहरण 5.34 : एक धरन जिसका परिच्छेद चित्र 5.59 में दिखाया गया है, अपने सिरों पर सरल रूप से आधारित है । धरन की विस्तृति 6m है तथा एक



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.59

आधार से 2m की दूरी पर 17700N का संकेंद्री भार लगाया गया है । अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए तथा परिच्छेद की मोटाई की दिशा में ऊपर से प्रत्येक 1 cm के अंतराल पर अपरूपण प्रतिबल का मान निकाल कर अपरूपण प्रतिबल का परिच्छेद पर बंटन दिखाइये ।

हल : अधिकतम अपरूपण बल $= \frac{17700 \times 4}{6} = 11800\text{N}$

I. $= \frac{12 \times 2^3}{12} + 2 \times \left[\frac{2 \times (5)^3}{12} + 2 \times 5\, (3.5)^2\right]$

$= 8 + 2 \times [\,21 + 122.5] = 295 \text{ cm}^4$

ऊपर से y की दूरी पर

$A = 2y;\quad \bar{y} = (6 - y/_2);\quad b = 2\text{cm}$

शीर्ष से y cm की दूरी पर $\tau = \frac{2y \times (6 - y/_2) \times 11800}{295 \times 2}$

$y = 1$ cm पर $\tau = \frac{2 \times 5.5 \times 11800}{590} \times 220 \text{ N/cm}^2$

$y = 2$ cm पर $\tau = \frac{2 \times 2 \times 5 \times 11800}{590} = 400 \text{ N/cm}^2$

$y = 3$ cm पर $\tau = \frac{2 \times 2 \times 4.5 \times 11800}{590} = 540 \text{ N/cm}^2$

$y = 4$ cm पर $\tau = \frac{2 \times 4 \times 4 \times 11800}{590} = 640 \text{ N/cm}^2$

$y = 5$ cm पर $\tau = \frac{10 \times 3.5 \times 11800}{590} = 700 \text{ N/cm}^2$

$y = 5$cm परन्तु चौड़ाई 12 cm लेने पर

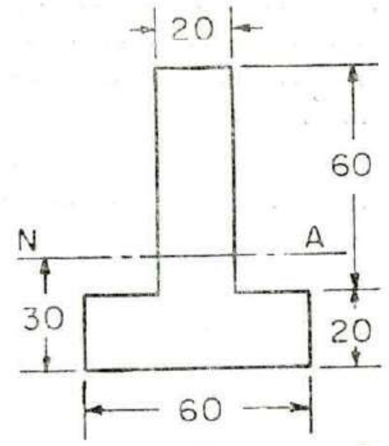
$\tau = \frac{10 \times 3.5 \times 11800}{295 \times 12} = 116.7 \text{ N/cm}^2$

उदासीन अक्ष पर $\tau = \frac{[10 \times 3.5 + 12 \times 0.5]}{295 \times 12} \times 11800$

$= 136.7 \text{ N/cm}^2$

उदासीन अक्ष के नीचे की ओर अपरूपण प्रतिबल का बंटन भी इसी प्रकार होगा । इस प्रकार संपूर्ण मोटाई में अपरूपण प्रतिबल का बंटन चित्र 5.59 में दिखाया गया है ।

उदाहरण 5.35 : एक T धरन के जिसका फ्लैंज तथा पेटा 6 cm × 2 cm है, किसी परिच्छेद पर 6800 N का अपरूपण बल लगता है । परिच्छेद पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान बताइये ।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.60

हल :

$$\text{नीचे से } \bar{y} = \frac{12 \times 1 + 12 \times 5}{12 + 12} = 3\text{cm}$$

$$I = \frac{6 \times (2)^3}{12} + 12 \times (3-1)^2 + \frac{2 \times 6^3}{12} + 12 \times (5-3)^2$$
$$= 136 \text{ cm}^4$$

$$\text{उ० अ० पर अधिकतम प्रतिबल} = \frac{10 \times 2.5 \times 6800}{136 \times 2} = 625 \text{ N/cm}^2$$

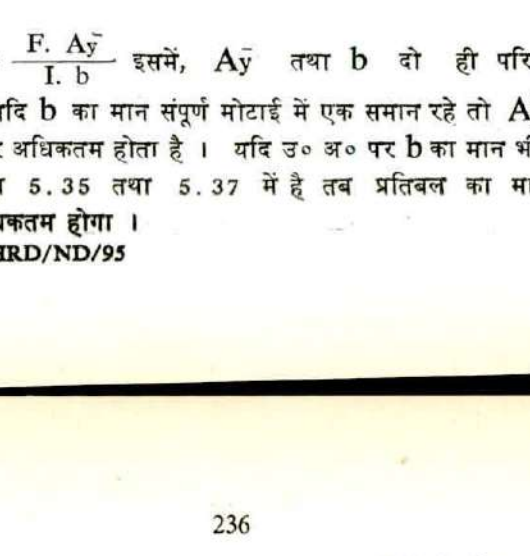
अधिकतम अपरूपण प्रतिबल ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं होता कि इसका मान कई बिन्दुओं पर ज्ञात किया जाय तथा फिर अपरूपण प्रतिबल का बंटन प्राप्त किया जाय। इसको ज्ञात करने के लिए समाकलन की भी आवश्यकता नहीं है। यदि नीचे दिये गये निर्देशों को ध्यान में रखा जाय तो इसको सरलता पूर्वक ज्ञात किया जा सकता है।

1. $\tau = \frac{F. A\bar{y}}{I. b}$ इसमें, $A\bar{y}$ तथा b दो ही परिवर्तन शील राशियाँ हैं। यदि b का मान संपूर्ण मोटाई में एक समान रहे तो $A\bar{y}$ का मान उदासीन अक्ष पर अधिकतम होता है। यदि उ० अ० पर b का मान भी न्यूनतम हो जैसा कि अभ्यास 5.35 तथा 5.37 में है तब प्रतिबल का मान उदासीन अक्ष पर ही अधिकतम होगा।

18—23 M. of HRD/ND/95

2. यदि उदासीन अक्ष पर b का मान न्यूनतम नहीं है तो अधिकतम प्रतिबल का मान उदासीन अक्ष के समीप उस स्थान पर होगा जहाँ पर, जहाँ b का मान न्यूनतम है अथवा यह उदासीन अक्ष पर ही होगा। ऐसी परिस्थिति में दोनों ही स्थानों पर अपरुपण प्रतिबल का मान निकालना चाहिए।

उदाहरण 5.36 : चित्र 5.61 में दिखाये गये परिच्छेद के किसी स्थान पर 30 kN का अपरूपण बल लग रहा है तो अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान बताइयें।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.61

हल :

$$\bar{y} = \frac{50 \times 2.5 + 16 \times 7 + 8 \times 11}{50 + 16 + 8} = 4.4 \text{ cm}$$

उदासीन अक्ष अधिकतम चौड़ाई वाले स्थान से होकर जाता है अतः अधिकतम प्रतिबल इन स्थानों पर हो सकता है–

1. AB पर जहाँ b=2 cm तथा 2 cm वाले भाग का $A\bar{y}$ लेना चाहिए
2. CD पर जहाँ b=4 cm तथा $A\bar{y}$, 4cm चौड़े भाग का लेना चाहिए

3. उदासीन अक्ष पर जहाँ Ay अधिकतम है ।

$$AB \text{ पर } \tau = \frac{30000 \times 8 \times (11 - 4.4)}{I \times 2} \times \frac{792000}{I}$$

$$CD \text{ पर } \tau = \frac{30000 \times [8 \times 6.6 + 16\ (7 - 4.4)]}{4 \times I} = \frac{708000}{I}$$

$$\text{उ० अ० पर } \tau = \frac{30000\ [8 \times 6.6 + 16 \times 2.6 + 10 \times 0.6 \times 0.34]}{10 \times I}$$

$$= \frac{288600}{I}$$

$$I = \frac{10 \times (5)^3}{12} + 50\ (4.4 - 2.5)^2 + \frac{4 \times 4^3}{12}$$

$$+ 16\ (7 - 4.4)^2 + \frac{2 \times 4^3}{12} + 8\ (11 - 4.4)^2$$

$$= 775 \text{ cm}^4$$

$$AB \text{ पर } \tau \text{ अधिकतम} = \frac{792000}{775}$$

$$= 1020 \text{ N/cm}^2$$

अधिकतर इन परिच्छेदों में जिनमें b का मान त्रिभुजाकार परिच्छेद के समान बराबर एक समान रूप से नहीं बदलता रहता है, अधिकतम प्रतिबल न्यूनतम चौड़ाई वाले उस परिच्छेद पर होता है जो उदासीन अक्ष के निकटतम होता है ।

उदाहरण 5.37 : एक T परिच्छेद के प्रास धरन की लंबाई 2m है तथा इसके मुक्त सिरे पर एक भार P लग रहा है । P का निरापद मान ज्ञात कीजिए यदि बंकन में संपीडन, तनन तथा अपरुपण प्रतिबल का मान क्रमशः 15000, 5000 तथा 1000 N/cm^2 से अधिक न हो। धरन का परिच्छेद अभ्यास 5.37 के समान ही है तथा इस प्रकार स्थापित है कि इसका फ्लैंज ऊपर की ओर है। फ्लैंज पर लग रहा कुल अपरूपण बल तथा फ्लैंज एवं पेटे में औसत अपरुपण प्रतिबल का मान बताइये ।

हल : नीचे से उदासीन अक्ष की दूरी 5 cm होगी तथा I-136 cm^4 $y_t = 3$ cm $y_c = 5$ cm चूंकि धरन एक प्रास है अतः ऊपरी सतह में बंकन तनन प्रतिबल तथा निचले सतह पर बंकन संपीडन प्रतिबल उत्पन्न होगा ।

$$\text{बं० व० आ०} = P \times 2000 = 2000\ P\ \text{N. mm}$$

$$5000 = \sigma_t = \frac{200P \times 3}{136}$$

$$P = \frac{5000 \times 136}{600} = 1133\ \text{N}$$

$$\sigma_c = 1{,}5000 = \frac{200 \times P\ 5}{136}$$

$$P = \frac{15000 \times 136}{200 \times 5} = 2040\ \text{N}$$

$$\zeta = 1000 = \frac{P \times 10 \times 2.5}{136 \times 2.0}$$

$$\therefore P = \frac{1000 \times 2 \times 136}{10 \times 2.5} = 10880\ \text{N}$$

चूंकि प्रास तनन में समर्थ नहीं है अतः निरापद भार 1133 N होगा ।

किसी भी परिच्छेद पर अधिकतम अपरूपण बल का मान 1133 N होगा । अतः दंड के फ्लैंज में उदासीन अक्ष से y की दूरी पर अपरूपण प्रतिबल,

$$\zeta = \frac{6 \times (3 - y) \times \left(y + \frac{3-y}{2}\right) \times 1113}{136 \times 6}$$

$$= \frac{1133}{136 \times 2} \times (9 - y2)$$

फ्लैंज में लग रहा कुल अपरूपण बल

$$= \frac{1133}{272} \int_1^3 (9 - y^2) \times 6 \times dy$$

$$= \frac{1133 \times 6}{272} \times \frac{28}{3}\ 233\ \text{N}$$

पेटा में अपरूपण बल = 1133 – 233 = 900 N

$$\text{फ्लैंज में औसत अपरूपण बल प्रतिबल} = \frac{233}{6 \times 2} = 19.4\text{N cm}^2$$

पेटा में औसत अपरूपण प्रतिबल,

$$= \frac{900}{12} = 75 \text{ N cm}^2$$

उदाहरण 5.38 दो 15 cm × 15 cm के लट्ठों को कावलों द्वारा जोड़कर 15 cm चौड़ा तथा 30 cm मोटा धरन बनाया गया है। प्रत्येक इस्पात काबले का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल 4 cm^2 है तथा धरन की 6 m विस्तृति पर 6000 N का एक समान बंटित भार लग रहा है। यदि कावलों में अपरूपण प्रतिबल का मान 600 N/cm^2 तक सीमित हो तो धरन में उनका अंतराल बताइये।

हल : धरन दंड के लंबाई में अपरूपण बल का मान बदलता रहता है, अतः काबलों का अंतराल भी लंबाई में भिन्न -भिन्न होगा। यहा पर हम दंड के सिरों पर लगने वाले अधिकतम अपरूपण बल के लिये न्यूनतम आवश्यक अंतराल ज्ञात करेंगे—

अपरूपण प्रतिबल

$$\frac{FA\bar{y}}{I.\ b.} = \frac{6000\times15\times15\times7.5\times12}{15\times30^3\times15}$$

$$= 20 \text{ N / cm}^2$$

यदि कावलों का अंतराल **x** हो तो,

$$x\times\zeta\times b = 600\times4$$

$$\therefore \quad x = \frac{600\times4}{6\times15} = 26.67 \text{ cm}$$

धरन के मध्य भाग की ओर अंतराल का मान बढ़ाया जा सकता है क्योंकि इस ओर अपरूपण बल का मान घटता जाता है तथा मध्य बिन्दु पर शून्य हो जाता है।

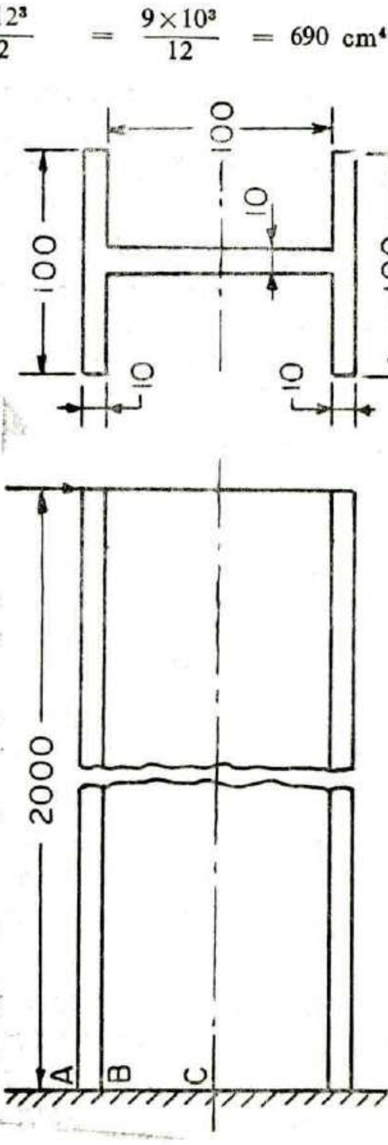
5.15 धरन में प्रधान प्रतिबल :

भार लग रहे धरन के प्रत्येक बिन्दु पर एक साथ ही बंकन अभिलंब प्रतिबल (तनन अथवा संपीडन) तथा अपरूपण प्रतिबल लगते हैं। अतः यदि किसी बिन्दु पर बंकन प्रतिबल तथा अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात हो तो प्रधान प्रतिबल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 5.39 : चित्र 5.62 में दिखाये गये धरन का भारण किया गया है। बिन्दुओं A,B तथा C पर मुख्य प्रतिबल का मान बताइये। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल, पेटा में न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल, पेटा में औसत अपरूपण प्रतिबल एवं फ्लैंज में अधिकतम, न्यूनतम तथा औसत अपरुपण प्रतिबल का मान भी बताइये। मुक्त सिरे पर 10 kN का भार लग रहा हैं।

हल :

$$I = \frac{10\times12^3}{12} = \frac{9\times10^3}{12} = 690 \text{ cm}^4$$



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 6.63

बद्ध सिरे पर बं० आ० $= 200 \times 10000$

$= 2 \times 10^6$ N—cm

बिन्दु A पर,

बंकन प्रतिबल $= \dfrac{2 \times 10^6}{690} \times 6 = 17400$ N/cm² (तनन)

बिन्दु A पर अपरूपण प्रतिबल शून्य है

अतः मुख्य प्रतिबल $= 17400$ N/cm² (तनन)

बिन्दु B पर; बंकन प्रतिबल $= \dfrac{2 \times 10^6}{960} \times 5 = 14500$ N/cm²

अपरूपण प्रतिबल $= \dfrac{10000 \times 10 \times 5.5}{690 \times 1} = 800$ N/cm²

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

चूंकि $\sigma_x = 14500, \ \sigma_y = 0, \ \tau = 800$

$$\sigma_{1,2} = \frac{14500}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14500}{2}\right)^2 + (800)^2}$$

$= 7250 \pm 7280$

$\sigma_1 = 14530$ N/cm² $\sigma_2 = -30$ N/cm²

बिन्दु C पर,

बंकन प्रतिबल शून्य है ।

अपरूपण प्रतिबल $= \dfrac{10000\,[10 \times 5.5 + 5 \times 2.5]}{690 \times 1} = 900$ N/cm²

मुख्य प्रतिबल $= \pm\ 900$ N/cm²

अधिकतम अपरूपण प्रतिबल उदासीन अक्ष पर $= 900$ N/cm² होगा ।

पेटा में न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल बिन्दु B 800 N/cm² पर होगा । दोनों फ्लैंजों में कुल अपरूपण बल

$$= \frac{F.B}{I}\left[\frac{D3}{12} - \frac{D^2\,d}{8} + \frac{d^3}{24}\right] =$$

$$= \frac{10000 \times 10}{690}\left[144 = \frac{144 \times 10}{8} - \frac{10^2}{12}\right]$$

$= 810$ N

पेटा में अपरूपण बल $= 10000 - 810 = 9190$ N

पेटा में औसत अपरूपण प्रतिबल $= \dfrac{9190}{10 \times 1} = 919$ N/cm²

फ्लैंज में न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल $= 0$

फ्लैंज में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल बिन्दु B पर लगेगा जहाँ चौड़ाई 10 cm है ।

अतः फ्लैंज में B पर प्रतिबल $= \dfrac{1000 \times 10 \times 5.5}{690 \times 10}$

$= 80$ N/cm²

फ्लैंज में औसत अपरूपण प्रतिबल $= \dfrac{810}{2 \times 10 \times 1} = 40.5$ N/cm²

उदाहरण 5.40 : एक सरल रूप से आधारित वृत्ताकार परिच्छेद के धरन जिसका व्यास 30 cm है 6 m लंबे विस्तृति पर 10000 N/m का एक समान बंटित भार लग रहा है । इस धरन के एक सिरे से 2m की दूरी पर तथा ऊपर से मोटाई की तरफ 10 cm की दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए । चूंकि इस बिन्दु पर बंकन प्रतिबल भी लग रहा है अतः प्रधान प्रतिबल का भी मान बताइये ।

हल :

2m की दूरी पर लग रहा अपरूपण बल

$= 30000 - 20000 = 10000$ N

$$\tau = \frac{16\ F}{3\ \pi\ D\ 2}\ \text{Cos}^2\ \theta$$

$15 - 10 = 15\ \text{Sin}\theta$ अथवा $\text{Sin}\theta = 0.333,\ \theta = 19.5°$

$\text{Cos}\theta = 0943$

$$\tau = \frac{16 \times 10000}{3\pi \times 900} \times (0.943)^3 = 16.8\text{N/cm}^2$$

$$\text{बंकन बल आघूर्ण} = 30000 \times 2 - 10000\ \frac{(2)^2}{2}$$

$$= 40000\ \text{N—m}$$

$$= 4 \times 10^6\ \text{N—cm}$$

$$\text{बंकन प्रतिबल} = \frac{4 \times 10^6}{\pi/64 \times (30)^4} \times 5 = 500\ \text{N/cm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{500}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{500}{2}\right)^2 + (16.8)2}$$

$$= 250 \pm 256$$

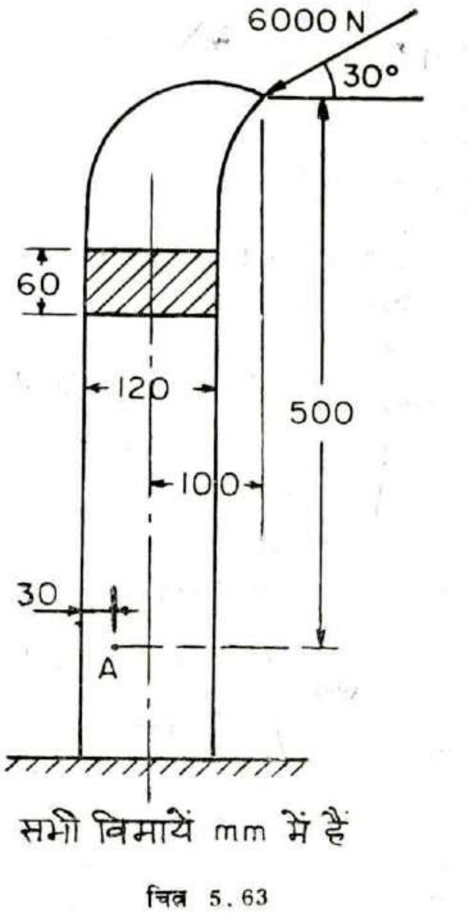
$\sigma_1 = 506\ \text{N/ cm}^2$, $\sigma_2 = 6.0\ \text{N/cm}^2$

उदाहरण 5.41 : चित्र 5.63 में दिखाए गए इस्पात ब्रेकेट में बिन्दु A पर प्रधान प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

हल : 6kN के बल को ऊर्ध्वाधर तथा क्षैतिज घटकों में वियोजित किया जा सकता है।

क्षैतिज बल $= 6000\ \text{Cos}\ 30 = 5{,}190$ N

ऊर्ध्वाधर बल $= 6000\ \text{Sin}\ 30 = 3000$ N



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.63

बिन्दु A से होकर जाने वाले परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण $= 5{,}190 \times 50 - 3000 \times 10 = 229{,}500$ N—cm इससे A पर संपीडन उत्पन्न होगा।

बिन्दु पर निम्नलिखित प्रतिबल लगेंगे —

$$\text{बंकन प्रतिबल} = \frac{M}{I} \times y = \frac{229{,}500}{\frac{6 \times 12^3}{12}} \times 3$$

$$= 796\ \text{N/cm}^2 \qquad \text{(संपीडन)}$$

$$\text{अभिंलब प्रतिबल} = \frac{3000}{12\times6} = 417\ \text{N/cm} \qquad (\text{संपीडन})$$

$$\text{अपरूपण प्रतिबल} = \frac{\quad}{6\times(12)^3\times6} = 41.7\ \text{N/cm}^2$$

$$\text{अतः कुल अभिलंब प्रतिबल} = 796 + 41.7 = 837.7\ \text{N/cm}^2 \quad (\text{संपीडन})$$

$\sigma \qquad \sigma$

$$\text{प्रधान प्रतिबल} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

चूंकि $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = -837.7$ तथा $\tau = 81.0$

अतः $\sigma_1 = 7.4\ \text{N/cm}^2$ तथा $6_2 = -845.1\ \text{N/cm}^2$

अभ्यास प्रश्नमाला

1. धरन किसे कहते हैं ? सामान्यतः प्रयोग किए जाने वाले धरनों के प्रकार बताइये ।

2. धरन पर लगने वाले भार कितने प्रकार के हो सकते हैं ? इन बलों के फलस्वरूप धरन में बंकन आघूर्ण तथा अपरूपण बल कैसे उत्पन्न होता है ?

3. अपरूपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख की उपयोगिता का वर्णन कीजिए इनको कैसे प्राप्त किया जाता है, स्पष्ट कीजिए ।

4. एक शुद्धालंबित (Simply Supported) धरन पर जिसकी विस्तृति (Span) 5 m है, उसके बाये सिरे से 1 m तथा 3 m की दूरी पर क्रमशः 50 kN तथा 30 kN के संकेन्द्री भार लगाए गए हैं। इस धरन के लिए अपरूपण बल आरेख तथा बंकन आघूर्ण आरेख खींचिए ।

5. एक धरन दो शुद्वालंब पर टिका है तथा आधार के दोनों ओर प्रलंबी भाग बराबर हैं । इसके मुक्त सिरों पर एक संकेन्द्री भार P लग रहा है तो इसका अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख बनाइये । तथा बीजीय चिहनों को आरेख पर स्पष्ट रूप से दिखाइये ।

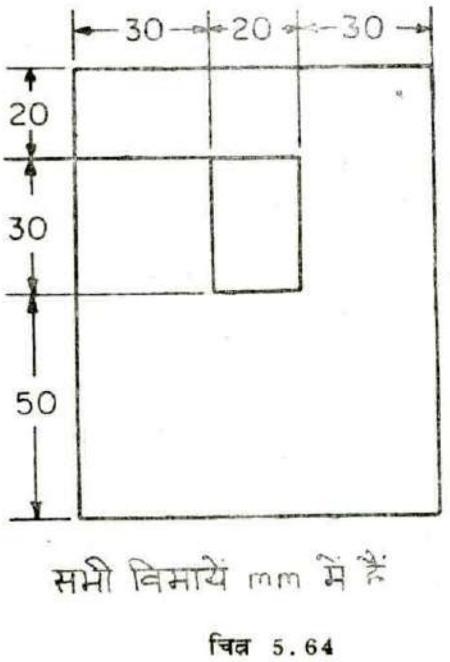
6. एक प्रास धरन पर जिसकी लंबाई 6 m है उसके मध्यवर्ती 2 m की लंबाई पर 20 kN m का एक समान वितरित भार लग रहा है, इसका बंकन आघूर्ण एवं अपरूपण बल आरेख बनाइये ।

7. एक इस्पात का आयताकार धरन जिसकी चौड़ाई 100 mm तथा मोटाई 250 mm है अपने सिरों पर आधारित है। शुद्धालंब आधारों के मध्य दूरी 5m है । धरन में उसके अपने भार के कारण अधिकतम अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिए । इस्पात का भार 80000 N/m^3 मान लीजिए ।

8. एक धरन AB जिसकी लंबाई 5 m है दो बिन्दुओं B तथा C पर टिकी है । इनके मध्य दूरी 3 m है । यदि इसके सिरा A पर 15 kN m का एक दक्षिणावर्त आघूर्ण लग रहा हो तो इसका अपरूपण बल एवं बंकन बल आघूर्ण आरेख बनाइये ।

9. एक 10 cm चौड़े तथा 10 cm मोटे T- परिच्छेद का उसके गुरुत्वकेंद्र से होकर जाने वाले क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए । फ्लैंज तथा पेटे की मोटाई 2 cm है । (314.22 cm^4)

10 चित्र 5.64 में दिखाये गये खोखले आयताकर परिच्छेद का उसके गुरुत्व केंद्र से होकर जाने वाले क्षैतिज अक्ष के सपेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।
(647.57 cm^4)



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.64

11. एक वर्गाकार परिच्छेद वाला धरन इस प्रकार बैठाया गया है कि उसका एक कर्ण ऊर्ध्वाधर है । इसके दोनों सिरों पर 1000 N-m का बलयुग्म उस प्रकार लगाया गया है कि इसका बंकन क्षतिज कर्ण के सापेक्ष जिनकी लंबाई 8 cm है, होता है । धरन में अधिकतम बंकन प्रतिबल ज्ञात कीजिए तथा उसके मोटाई में प्रतिबल की मात्रा कैसे परिवर्तित होती है दर्शाइये ।

(4687.5 N/cm^2)

12. एक आयताकार परिच्छेद का प्रास धरन मुक्त सिरे पर भारित किया गया है । प्रास परिच्छेद की चौडाई संपूर्ण लंबाई में एक समान है । इसकी मुक्त सिरे पर मोटाई 10 cm है तथा यह प्रत्येक 100 cm लंबाई में 1 cm की दर से बढती जाती है । मुक्त सिरे से उस परिच्छेद की दूरी बताइये जहाँ पर अधिकतम बंकन प्रतिबल उत्पन्न होगा ।

13. दो धरनों की बंकन सामर्थ्य की तुलना कीजिए जिनमें एक ठोस वृत्ताकार परिच्छेद की है जिसका व्यास 10 cm है तथा दूसरा खोखला वृत्ताकार परिच्छेद का है जिसकी दिवार की मोटाई 1 cm है । दोनों हो धरनों का पदार्थ, भार तथा लंबाई एक समान है ।

(1.4.81)

14. एक वर्गाकार परिच्छेद के धरन का निम्न परिस्थितियों में आघूर्ण प्रतिरोध ज्ञात कीजिए यदि (अ) इसका कर्ण क्षैतिज हो (ब) दो भुजाएं क्षैतिज हों ।

(1:1.414)

15. एक सम षटभुजाकार परिच्छेद में जिसकी भुजाएं b हैं xx तथा yy परिच्छेद के समतल में दो परस्पर लंब में अक्ष हैं तथा ये एक दूसरे को परिच्छेद के गुरुत्व केंद्र पर काटते हुए उसके दो सम्मुखी कोनो से होकर जाते हैं । परिच्छेद का गुरुत्व केंद्र से होकर जाने वाले अक्ष के सापेक्ष द्विघाती क्षेत्र आघूर्ण Kb^4 द्वारा व्यक्त किया जा सकता है । अतः अक्षों xx तथा yy के सापेक्ष k का मान ज्ञात कीजिए ।

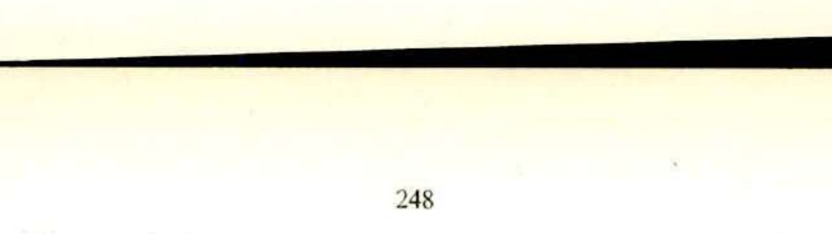
$$\left(K = \frac{5\sqrt{3}}{16}\right)$$

16. एक नलिका का, जिसकी मोटाई सब स्थानों पर 0.4 cm है परिच्छेद समषट भुजाकार है । बाह्य षटभुज की भुजा 4 cm है । भीतरी षटभुज के लिए Ixx का मान ज्ञात कीजिए ।

(54 cm^4)

17. उपर्युक्त नलिका 2 m की दूरी पर स्थिर क्षैतिज अवस्था में आधारों पर स्थित है । नलिका पर 2000 N के दो भार आधारों से बराबर दूरी पर लग रहे हैं । भारों के मध्य परस्पर दूरी का न्यूनतम मान बताइये यदि नलिका पदार्थ में अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान 10000 N/cm^2 से अधिक न हो । (लं० वि०) (4 cm)

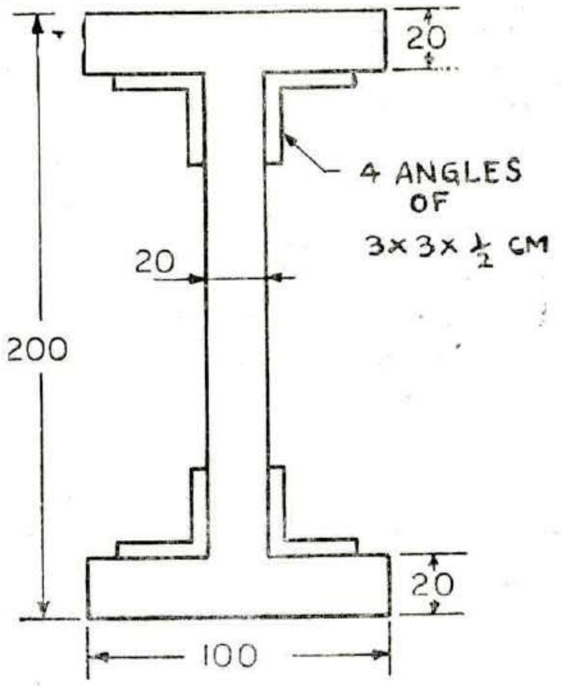
18. चित्र 5.65 में एक वेल्ड किये गये इस्पात के ब्रेकेट को दिखाया गया है जो प्रास के रूप में है । ब्रेकेट के बद्ध सिरे पर अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.65 (लं० वि०) (10400 N cm^2)

19. एक 10 cm लम्बे संधित धरन के I-परिच्छेद को चित्र 5.66 में दिखाया गया है । यह 6 m की दूरी पर दो स्थानों पर आधारित है तथा आधार के दोनों ओर समान रूप से प्रलंबित है । यदि धरन में अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान 4000 N/cm^2 से अधिक न हो तो उस एक समान बंटित भार का मान ज्ञात कीजिए, जो धरन पर निरापद रूप से लगाया जा सकता है ।



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.66 (7120 N/m)

20. एक सरल आधारित धरन के जिसकी लंबाई 6 m है मध्यवर्ती एक तिहाई विस्तृति पर 5000 N/m का एक समान बंटित भार लग रहा है । यदि धरन में अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान 10000 से N/cm^2 अधिक न हो तो धरन की चौड़ाई तथा मोटाई ज्ञात कीजिए । मोटाई चौडाई की 2.5 गुणा है । धरन के भार को नगण्य मानिये ।

(4.93 cm; 12.33 cm)

21. एक सरल आधारित धरन का भार W है तथा यह विस्तृति के मध्य में एक संकेंद्रिय भार P को वहन करता है । यदि W को नगण्य मानने पर बंकन प्रतिबल के मान में 5% की त्रुटि हो तो $\frac{P}{W}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(19/2)

22. एक सरल आधारित धरन 35 cm चौड़ा तथा 30 cm मोटा है । धरन के बंकन सामर्थ्य में होने वाली प्रतिशत कमी का मान बताइये यदि धरन के केंद्र से 5 cm व्यास का छेद इस प्रकार किया जाय कि (अ) यह धरन की चौड़ाई के समान्तर हो (ब) यह धरन की मोटाई के समान्तर हो ।

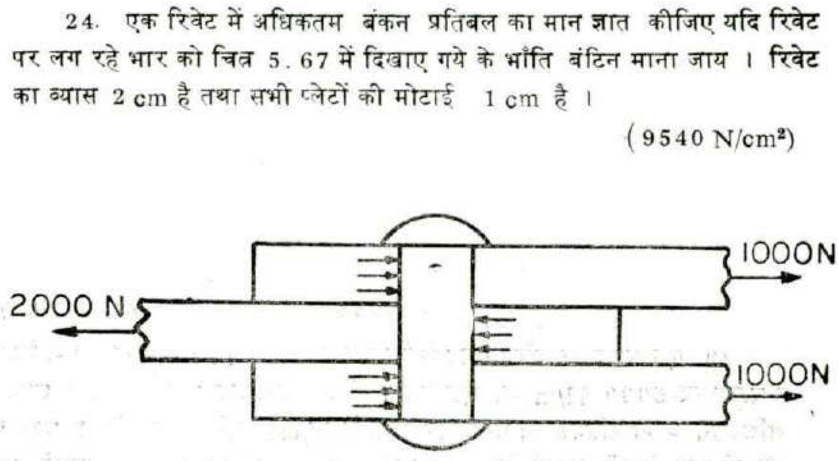
(0.463%; 33.3%)

23. दो कोण लोहों (Angle Irons) को, जिनकी विमायें 15 cm × 10 cm × 1.5 cm हैं इस प्रकार जोड़ा गया है कि वे एक T- परिच्छेद का रुप प्राप्त कर लें जिसकी ऊपरी सिरे पर चौड़ाई 20 cm तथा मोटाई 15 cm हो । इसको 3 m लंबे प्रास धरन के रूप में प्रयुक्त किया गया है । उस धरन का निरापद आघूर्ण प्रतिरोध ज्ञात कीजिए यदि तनन तथा संपीडन में निरापद प्रतिबल का मान क्रमश: 4000 तथा 10000 N/cm^2 है ।

(6.44×10^5 N-cm)

24. एक रिवेट में अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए यदि रिवेट पर लग रहे भार को चित्र 5.67 में दिखाए गये के भाँति बंटित माना जाय । रिवेट का व्यास 2 cm है तथा सभी प्लेटों की मोटाई 1 cm है ।

(9540 N/cm^2)



चित्र 5.67

25. 5 cm चौड़ी तथा 15 cm मोटी काष्ट कड़ियों के मध्य परस्पर दूरी ज्ञात कीजिए यदि वे 3 m के बिस्तृति पर बिछाई गई हैं। छत का भार 2500 N/m^2 है तथा निरापद प्रतिबल का मान 1000 N/cm^2 है ।

(66.7 cm)

26. एक 10 cm चौड़ी तथा 15 cm मोटे काष्ठ धरन के निचले पार्श्व में 2.5 cm चौड़ी एवं 1 cm मोटी इस्पात की प्लेट लगा दी गई है। यदि $E_s = 20\ E_t$ तथा बंकन बल आघूर्ण का मान 30,0000 N cm हो तो प्रत्येक पदार्थ में अधिकतम प्रतिबल का मान बताइये।

(54.75 N.cm;^{2} 750 N/cm^2)

27. एक काष्ठ धरन का, जिसकी चौड़ाई 10 cm तथा मोटाई 15 cm है प्रबलन दो इस्पात की 10 cm चौड़ी तथा 1 cm मोटी प्लेटों द्वारा किया गया है। धरन की बंकन सामर्थ्य ज्ञात कीजिए यदि (अ) इस्पात की प्लेटें ऊपर तथा नीचे के पार्श्व में सममिति रूप में लगाई गई हैं (ब) इस्पात की प्लेटें बगल के पार्श्वों पर सममिति रूप से लगायी गई हों। काष्ठ में अनुमेय प्रतिबल 700 N/cm^2 है तथा इस्पात में 10000 N/cm^2 $E_s = 16\ E_t$

(171 5000 N cm; 511800 N cm

28. काष्ठ के 10 cm × 5 cm के धरनों को खरीदने के पश्चात पता लगा कि इनमें से एक पर छत के मध्य में लगे हुए एक स्तंभ का अतिरिक्त भार वहन करना है। अतः 10 cm चौड़ाई के दो इस्पात की पाट्टियों का साइज ज्ञात कीजिए जो कि उस धरन में लगाई जा सकें जिसपर मध्य में 10000 N का अतिरिक्त भार लगना है। काष्ठ में अधिकतम प्रतिबल की मात्रा 1000 N/cm^2 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

$E_s = 20E_t$ (0.9375 cm)

29. एक 7.5 cm चौड़े तथा 15 cm मोटे धरन का 7.5 cm चौड़े एलुमिनियम मिश्रधातु की पट्टियाँ लगा कर प्रबलन करना है। यह पट्टियाँ धरन के ऊपर तथा नीचे संपूर्ण लंबाई में लगेंगी। यदि इस प्रकार धरन का आघूर्ण प्रतिरोध केवल काष्ठ धरन के आघूर्ण प्रतिरोध से 4 गुना हो तथा काष्ठ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान समान ही हो तो मिश्रधातु पट्टी की चौड़ाई तथा मिश्रधातु एवं काष्ठ में अधिकतम प्रतिबल के अनुपात का मान ज्ञात कीजिए। $E_a = 7.15\ E_t$

(लं० वि०) (0.92 cm ,8.0)

30. दो छड़ों को, जिनकी चौड़ाई 5cm है, दृढ़तापूर्वक जोड़कर एक संयुक्त धरन बनाया गया है। इनमें से एक छड़ इस्पात की तथा दूसरी पीतल की है। छड़ों की मोटाई क्रमशः t_1 तथा t_2 है तथा इस प्रकार संयुक्त धरन की मोटाई $t_1 + t_2$ हो जाती है। यदि $Es = 2Eb$ हो तो t_1/t_2 का अनुपात ज्ञात कीजिए जिससे कि संयुक्त धरन का उदासीन अक्ष दोनों छड़ों की विभाजन तल में स्थित हो।

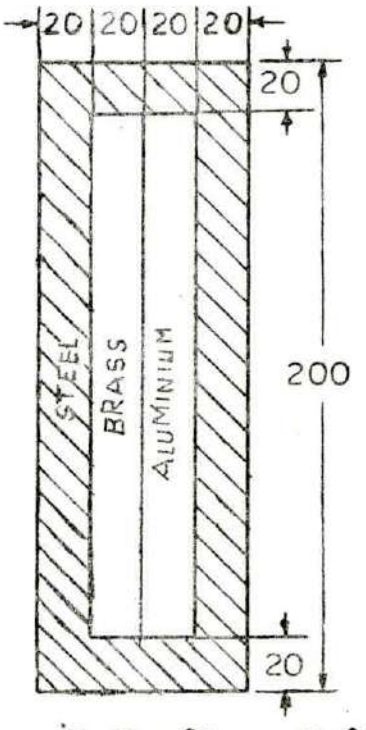
$(1 : \sqrt{2}\,)$

यदि परिच्छेद की कुल मोटाई 25cm हो एवं इस्पात तथा पीतल में अधिकतम प्रतिबल का मान क्रमशः 11000 N/cm^2 तथा 4500 N/cm^2 से अधिक न हो तो धरन का अधिकतम आघूर्ण प्रतिरोध ज्ञात कीजिए।

(लं० वि०) (2,7600N-cm)

31. चित्र 5.68 में एक साधारण धरन का परिच्छेद दिखाया गया है। धरन का आघूर्ण प्रतिरोध ज्ञात कीजिए यदि ऐलुमिनियम में अधिकतम प्रतिबल की मात्रा 5000N/सेमी^{2} से अधिक न हो। $Es = 2Eb = 3Ea$

(114900 N-m)



सभी विमायें mm में हैं

चित्र 5.68

32. सिद्ध कीजिए कि खोखले वृत्ताकार परिच्छेद में बाह्य व्यास (D) तथा आंतरिक व्यास (d) के सभी अनुपातों के लिए τmax तथा τmin का अनुपात $^4/_3$ तथा 2.0 के मध्य होता है ।

33. एक समषट भुजाकार परिच्छेद की छड़ को जिसकी भुजा की लंबाई 25mm हो, धरन के रूप में प्रयोग किया गया है तथा इसका एक कर्ण ऊर्ध्वाधर स्थित है । इसके किसी परिच्छेद पर 20 kN का अपरुपण बल लग रहा है । अतः इस परिच्छेद पर अपरुपण प्रतिबल बंटन को चित्र खींच कर दिखाइये तथा अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान एवं उदासीन अक्ष से उस रेखा की दूरी ज्ञात कीजिए ।

(लंदन वि० वि०)

($\tau max = 1550\ N/cm^2$; $y = 4.2mm$)

34. सिद्ध कीजिए कि एक I परिच्छेद वाले धरन के पेटे में अधिकतम तथा न्यूनतम अपरुपण प्रतिबल में अन्तर $\frac{Fd^2}{24I}$ है । यहाँ F परिच्छेद पर लग रहा अपरुपण बल, d पेटा की मोटाई तथा I परिच्छेद के जड़त्व आघूर्ण को व्यक्त करता है ।

35. एक I परिच्छेद के धरन के फ्लैंज की चौड़ाई 10 सेमी तथा मोटाई 2 cm है । इसकी संपूर्ण मोटाई 12cm तथा पेटे की मोटाई फ्लैंज के बराबर है । इसके किसी परिच्छेद पर दोनों फ्लैंजों पर लग रहे प्रतिशत अपरुपण बल को ज्ञात कीजिए ।

(19.5%)

36. एक वर्गाकार परिच्छेद वाले धरन को जिसकी भुजा a है, इस प्रकार स्थापित किया गया है कि उसका एक कर्ण क्षैतिज रहे तथा उसके एक परिच्छेद पर अपरुपण बल F लग रहा है । इसमें अधिकतम तथा औसत प्रतिबल मानों को ज्ञात कीजिए ।

$\left(\frac{9F}{8a^2}\right.$, उ० अ० से $\frac{a}{4\sqrt{2}}$ की दूरी पर; $\left.\frac{F}{a^2}\right)$

37. चित्र 5.39 में दिखाये गये I परिच्छेद के फ्लैंजो तथा पेटे द्वारा प्रतिरोधित (अ) बंकन बल आघूर्ण तथा (ब) अपरुपण बल का प्रतिशत मान ज्ञात कीजिए ।

38. एक पतली नलिका के, जिसका व्यास D तथा मोटाई t है किसी परिच्छेद पर लग रहा बंकन बल आघूर्ण M तथा अपरुपण बल F है । अतः इसके परिच्छेद

के उस बिन्दु पर मुख्य प्रतिबल ज्ञात कीजिए जिससे होकर जाने वाली त्रिज्या, उदासीन अक्ष से θ कोण बनाती है ।

$$\left[\frac{2}{\pi D^2 t}\left\{MSin\theta \pm \sqrt{M^2\ Sin^2\theta + F^2D^2Cos^2\theta}\right\}\right]$$

39. एक कोण लोहा धरन, जो 10cm × 15cm × 1.5cm का है, इस प्रकार रखा गया है कि उसकी छोटी भुजा ऊपर तथा क्षैतिज अवस्था में है । यदि इस पर 100kN का अपरुपण बल लग रहा हो तो इसमें अधिकतम अपरुपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए तथा इसकी मोटाई में अपरुपण प्रतिबल के बंटन को दर्शाने वाला चित्र बनाइये ।

($63N/mm^2$)

40. चित्र 5.45 में दिखाये गए नालीदार परिच्छेद में ऊपर तक पानी भरा हुआ है । इसके सिरे से दो मीटर की दूरी पर स्थित परिच्छेद पर अधिकतम अपरुपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए । धरन में अधिकतम प्रतिबल तथा इसकी स्थिति भी ज्ञात कीजिए । अधिकतम अपरुपण बल वाले परिच्छेद में अपरुपण प्रतिबल का बंटन भी दिखाइये ।

($164\ N/cm^2$; $272\ N/cm^2$)

41. एक 12cm चौड़े तथा 30cm मोटे आयताकार परिच्छेद वाले धरन के किसी परिच्छेद पर 20000 N–m का बं० व० आ० तथा 20kN का अपरुपण बल लग रहा है । इसके उदासीन अक्ष पर, तथा उदासीन अक्ष से 10cm की दूरी पर प्रधान प्रतिबल का मान बताइये । इन स्थानों पर प्रधान समतलों को भी बताइये ।

(+ 8.33; 74.3; − 3.0 N/cm^2)

42. एक 5cm चौड़े तथा 16cm मोटे काष्ठ धरन के नीचे की ओर 0.5cm मोटी तथा 5cm चौड़ी इस्पात प्लेट लगा कर प्रबलन किया गया है । पेंच का व्यास 0.5cm हो तथा वे 8cm के अंतराल पर लगाये गये हैं । पेंच छेदों में अच्छी प्रकार से ठोंके गये हैं । धरन को 2.5m की विस्तृति पर सरल आधारित किया गया है तथा इसके मध्य में 1000N का भार लग रहा है ।

काष्ठ तथा इस्पात की पट्टी में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए तथा पेच में अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान बताइये । धरन के स्वयं के भार को नगण्य मान लीजिए तथा यह मान लीजिए कि पेच के लिए किए गए छेदों से धरन के सामर्थ्य पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है । $Es = 15Et$ (पेंच की एक पंक्ति की कल्पना कीजिए)

($193\ N/cm^2$; $1590\ N/cm^2$; $1230\ N/cm^2$)

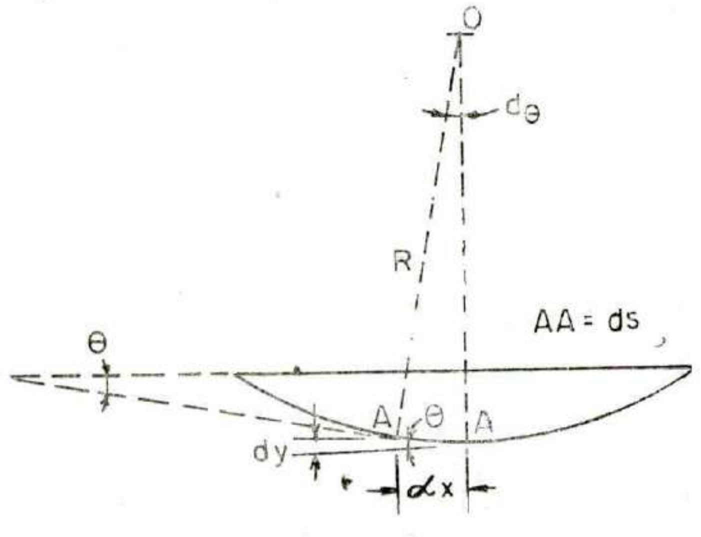
(लं० वि० वि०)

अध्याय 6

धरन-प्रवणता तथा विक्षेप

6.1 धरन विरूपण

जब धरन पर उसके लंबाई के अनुप्रस्थ दिशा में भार लगते हैं तो ये इसमें बंकन एवं अपरुपण प्रतिबल के अतिरिक्त उसके अनुदैर्ध्य अक्ष के अभिलंब विक्षेप भी उत्पन्न करते हैं । यह विक्षेप भार रहित अवस्था में उदासीन अक्ष की स्थिति से भार लगे होने की अवस्था में उदासीन अक्ष की स्थिति के मध्य दूरी होती है । धरन का केवल बंकन बल आघूर्ण अथवा अपरुपण बल के सापेक्ष ही समर्थ होना पर्याप्त नहीं होता अपितु वह इस दृष्टि से भी दृढ़ होना चाहिए कि भार लगने पर उसमें अत्यधिक विरुपण अथवा विक्षेप न उत्पन्न हो । सभी संरचनाओं में इस दृष्टि से अधिकतम अनुमेय विक्षेप की एक सीमा निश्चित होती है जिससे कि भार लगने पर उसका वास्तविक स्वरुप न बिगड़ जाय । धरन में अनुप्रस्थ भार के कारण उत्पन्न विक्षेप को ज्ञात करने की विभिन्न विधियाँ हैं परन्तु उनमें से मुख्य दो का जो सामान्य रूप से प्रयुक्त की जाती हैं, इस अध्याय में वर्णन किया जायगा ।



चित्र 6.1

6.2 समाकलन विधि (Method of Integration)

चित्र (6.1) में एक ऐसे धरन को दिखाया गया है जिसका भार लगने के कारण विक्षेप हो गया है ।

धरन के एक सिरे से x दूरी पर स्थित एक खंड AA जिसकी लंबाई dx है, ध्यान दीजिए । धरन का विक्षेप एक वक्र के रूप में होता है अतः बिन्दुओं AA के मध्य ऊर्ध्वाधर दूरी को dy द्वारा व्यक्त कीजिए । यदि वक्र के बिन्दु A पर खींची गई स्पर्श रेखा धरन के प्रारंभिक क्षैतिज अक्ष से अथवा x- अक्ष से θ कोण बनाती है, तो—

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

यदि चाप AA की लंबाई ds हो तो,

$$\frac{ds}{dx} = \text{Sec}\,\theta$$

चाप AA केन्द्र 0 पर जो कोण बनाता है उसे dθ द्वारा व्यक्त किया गया है ।

अतः $R\,d\theta = ds$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\tan\theta) = \text{Sec}^2\theta\,\frac{d\theta}{ds}$$

$$= \text{Sec}^2\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \text{Sec}^3\theta\,\frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \int^{2}(1+\tan^2\theta)^{3/2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

वास्तविक संदर्भ में $\frac{dy}{dx}$ का परिमाण अत्यंत न्यून होता है क्योंकि संपूर्ण विक्षेप का मान भी न्यून ही होता है अतः $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ को एकांक की अपेक्षा नगण्य माना जा सकता है, अतः

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Mx}{EI}$$

यह Mx खंड AA पर बंकन बल आघूर्ण को व्यक्त करता है ।

अथवा $EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = Mx$ . . . . (6.1)

उपर्युक्त व्यंजक में बंकन बल आघूर्ण का बीजीय चिह्न इस पर निर्भर करता है कि x तथा y की दिशायें किस प्रकार मानी गई हैं । EI सदैव धनात्मक होता है पर $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ का मान x के बढ़ने पर बढ़ता है अथवा घटता है इसके अनुसार ही बंकन बल आघूर्ण का मान क्रमशः धनात्मक एवं ऋणात्मक होगा । बंकन बल आघूर्ण की दिशा ज्ञात होने पर संभावित विक्षेप वक्र का अनुमान लगाया जा सकता है एवं इस प्रकार x तथा y की धनात्मक दिशाओं को ध्यान में रखते हुए बंकन बल आघूर्ण का चिह्न निश्चित किया जा सकता है ।

यदि मूल बिन्दु बायें सिरे पर हो तथा x दाहिने ओर धनात्मक एवं y नीचे की ओर धनात्मक हो तो उपर्युक्त नियम के अनुसार सभी उत्तलक बंकन बल आघूर्ण धनात्मक एवं अवतलक बंकन बल आघूर्ण ऋणात्मक होंगे ।

M_x का, उपयुक्त चिह्न सहित मान रखकर समीकरण (6.1) का समाकलन किया जा सकता है ।

$$EI\ \frac{dy}{dx} = \int Mx.\ dx + C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.2)$$

$$EI.\ y = \iint Mx\ (dx)^2 + C_1x + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad (6.3)$$

उपर्युक्त समीकरण में C_1 तथा C_2 समाकलन स्थिरांक हैं जो कि सिरा परि-स्थिति ज्ञात होने पर प्राप्त किए जा सकते हैं जैसे की प्रास दंड के लिए बद्ध सिरे पर y तथा $\frac{dy}{dx}$ अर्थात विक्षेप एवं प्रवणता दोनों ही शून्य होते हैं । इसी प्रकार सरल आधारित धरन में दोनों सिरों पर विक्षेप का मान शून्य होता है ।

धरन के किसी अन्य परिच्छेद पर विक्षेप एवं प्रवणता का मान समीकरणों (6.2) तथा (6.3) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।

इससे पहिले अध्याय में, राशियों में परस्पर संबंध जैसे $\frac{dM}{dx} = F$ तथा $\frac{dF}{dx} = w$ प्राप्त किए जा चुके हैं, अतः

$$\frac{d}{dx}\left(EI.\ \frac{d^2y}{dx2}\right) = F$$

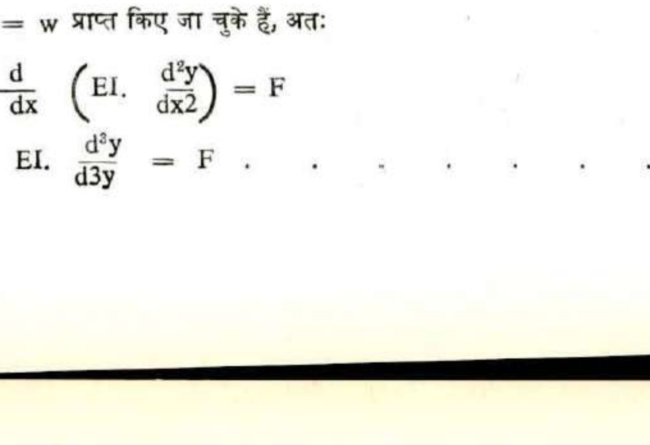
$$\text{अथवा}\quad EI.\ \frac{d^3y}{d3y} = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{d_x}\left(EI.\ \frac{d^3y}{dx^3}\right) = w$$

$$\text{अथवा}\quad EI.\ EI.\ \frac{d^4_y}{d_x^4} = w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.5)$$

6.3 क्षेत्र-आघूर्ण विधि (Area Moment Method)

चित्र 6.2 पर ध्यान दीजिए । किसी निश्चित ऊर्ध्वाधर रेखा EF से X दूरी पर स्थित धरन खंड की लंबाई dx को लीजिए । इस खंड पर बंकन बल आघूर्ण एक समान माना जा सकता है तथा इसका मान Mx मानिए । इस छोटे खंड dx में प्रवणता का अन्तर dθ है ।



चित्र 6.2

$$ds = R.\ d\theta$$

$d\theta = \frac{M}{EI} \times ds = \frac{M}{EI} \times dx$ क्योंकि विक्षेप का मान न्यून होता है तथा ds को dx के बराबर माना जा सकता है ।

यदि रेखा EF से धरन के दो परिच्छेद l_1 तथा l_1 की दूरी पर स्थित हों, तब,

$$\theta l_1 - \theta l_2 = \int_{l_2}^{l_1} \frac{M}{EI}\ dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.6)$$

उपर्युक्त समीकरण से यह स्पष्ट है कि दो परिच्छेदों के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख के क्षेत्रफल को EI से भाग देने पर इन परिच्छेदों के मध्य प्रवणता का अन्तर प्राप्त होता है ।

$$dy = x.\ d\theta$$
$$= \frac{M}{EI}\ x.\ dx$$

$$y_1 - y_2 = \int_{l_2}^{l_1} \frac{M}{EI}\ x.\ x \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6.7)$$

इस प्रकार किसी पूर्वनिश्चित रेखा पर धरन के दो परिच्छदों से खींची गई स्पर्श रेखाओं का अंतर्छेद उस राशि को व्यक्त करता हैं जो उस रेखा के सापेक्ष धरन के उन परिच्छदों के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख के आघूर्ण को EI से भाग देने पर प्राप्त होगा ।

यदि इस रेखा को ठीक ढंग से पूर्वनिश्चित कर लिया जाय तो यह अंतर्छेद धरन का वास्तविक विक्षप व्यक्त करेगा । इसको कुछ अभ्यासों को हल करके सिद्ध किया जायगा ।

प्रास धरन के प्रकरण में यह ऊर्ध्वाधर रेखा उस परिच्छद से होती हुई निश्चित की जाती है जहाँ पर कि विक्षेप ज्ञात करना होता है । सरल आधारित धरन के प्रकरण में यह धरन के सिरों से होकर निश्चित की जाती है ।

6.4 प्रास धरन की प्रवणता एवं विक्षेप

(अ) प्रास के मुक्त सिरे पर लग रहा संकेद्री भार–

प्रथम-विधि (व्यवकलन विधि) :–

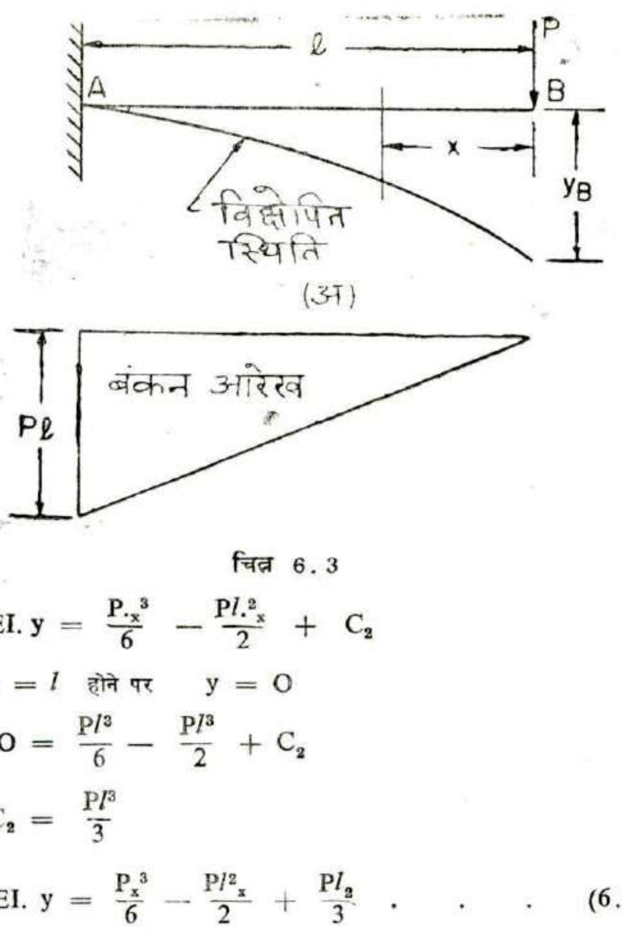
मुक्त सिरे से दूरी पर किसी परिच्छेद पर ध्यान दीजिए–

$$EI\ \frac{d^2y}{d^2x} = P.x$$

$$EI\ \frac{dy}{dx} = \frac{P.x^2}{2} + C_1\ ;\ \text{क्योंकि}\ x = l\ \text{होने पर}\ \frac{dy}{dx} = O$$

अतः $O = \frac{Pl^2}{2} + C_1$ अथवा $C_1 = -\frac{Pl^2}{2}$

$$\text{अतः}\ EI.\ \frac{dy}{dx} = \frac{P.x^2}{2} - \frac{Pl^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6.8)$$



चित्र 6.3

अथवा $EI.\ y = \frac{P.x^3}{6} - \frac{Pl.^2x}{2} + C_2$

$x = l$ होने पर $y = O$

अतः $O = \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} + C_2$

$$C_2 = \frac{Pl^3}{3}$$

$$\text{अतः}\quad EI.\ y = \frac{Px^3}{6} - \frac{Pl^2x}{2} + \frac{Pl_3}{3} \quad . \quad . \quad . \qquad (6.9)$$

अधिकतम विक्षेप मुक्त सिरे पर होगा जहाँ पर $x = o$

अतः $y_{max} = \frac{Pl^3}{3EI}\ ;\ \theta_B = \frac{-Pl^2}{2EI}$

θ_B का ऋणात्मक चिह्न यह व्यक्त करता है कि x के बढ़ने पर y घटेगा । यदि मूल बिन्दु बद्ध सिरे पर स्थित हो तथा x दूरी यहीं से नापी जाय तो इस अभ्यास को और सरलता पूर्वक हल किया जा सकता है । θ का मान सदैव रेडियन (radian) में प्राप्त होगा ।

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = o \; ; \; x = o \text{ अतः } C_1 = o$$

$$EI \frac{dy}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.10)$$

$$EI\, y = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_2$$

$x = o$ होने पर $y = o$ अत $C_2 = o$

$$EI\, y = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.11)$$

समीकरणों (6.10) तथा (6.11) में मुक्त सिरे के लिए $x = l$ रखने पर

$$\theta_B = \frac{I}{EI} \left[Pl^2 - \frac{Pl^2}{2} \right] = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$ymax = \frac{1}{EI} \left[\frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} \right] = \frac{Pl^3}{3EI}$$

प्रास धरन के सभी अभ्यासों में मूल बिन्दु बद्ध सिरे पर लेने पर सुविधा रहती है क्योंकि उस दशा में सामान्यतः व्यवकलन स्थिरांक का मान शून्य होता है ।

द्वितीय विधि (क्षेत्र आघूर्ण विधि) :-

$$\theta_B - \theta_A = \frac{Pl^2}{2FI} = \frac{\text{बंकन बल आघूर्ण आरेख व्यक्त करने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{EI}$$

$$\theta_A = o$$

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

बद्ध सिरे से x दूरी पर स्थित किसी परिच्छेद पर

$$\theta_x - \theta_A = \theta_x - \frac{\text{A तथा x के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल}}{EI}$$

$$= \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{P(l-x)^2}{2EI}$$

$= \frac{Pl_x}{EI} - \frac{Pl_x}{2EI}$: यह वही है जो समीकरण

(6.10) में समाकलन विधि द्वारा प्राप्त किया गया है ।

चूंकि $\theta_A = o$ है अतः विक्षेप वक्र के बिन्दु A पर खींची गई स्पर्श रेखा धरन के बिना बंकन की अवस्था के अक्ष से होकर जाती है । संदर्भ के लिए यदि ऊर्ध्वाधर रेखा बिन्दु B से होती हुई मानी जाय तो संदर्भ रेखापर A तथा B द्वारा प्राप्त अंतर्छेद बिन्दु B पर विक्षेप के बराबर होगा ।

$$y_B = \frac{\text{परिच्छेद B के सापेक्ष बंकन बल आघूर्ण आरेख का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{Pl^3}{2EI} \times \frac{2l}{3} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

इसी प्रकार X दूरी पर स्थित किसी अन्य परिच्छद पर विक्षेप का मान ज्ञात किया जा सकता है ।

$$y_x = \frac{\text{x के सापेक्ष परिच्छेदों A तथा X के मध्य बं० ब० आ० आरेख का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{Pl^2}{2EI}\left(x - \frac{l}{3}\right) + \frac{P(l-x)^2}{2EI} \times \left(\frac{l-x}{3}\right)$$

$$= \frac{Pl^2x}{2EI} - \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Px^2l}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI}$$

$= \frac{Px^3l}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI}$ यही मान समीकरण (6.11) में व्यवकलन विधि द्वारा प्राप्त किया गया है ।

उदाहरण 6.1 : एक प्रास धरन पर जो 4m लंबा है, बद्ध सिरे से 3 मी की दूरी पर 100 kN का भार लग रहा है । अतः भारण बिन्दु तथा मुक्त सिरे पर प्रवणता एवं विक्षेप का मान बताइये । $I = 40,000\ cm^4$ $E = 200$ GPa

हल :

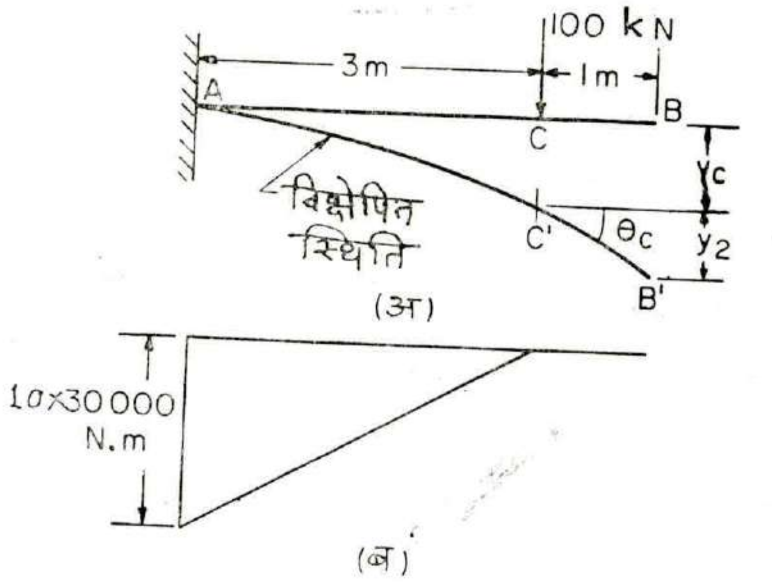
(i) व्यवकलन विधि

खंड AC के लिए, दूरी x बद्ध सिरे से नापने पर

$$EI \frac{d^2y}{dx2} = 100000\,(300 - x)$$

व्यवकलन करने तथा पहिले के समान ही सिरा परिस्थितियों को रखने पर

$$\theta_c = \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{100000 \times (300)^2}{2 \times 40,000 \times 200 \times 10^5} = \frac{9}{1,600} \text{ radian}$$



चित्र 6·4

तथा $y_c = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{10,0000 \times (300)^3}{3 \times 40,000 \times 200 \times 10^5} = 1.25$ cm

खंड CB के लिए

$$EI \frac{d^2y}{dx2} = o$$

$EI \frac{dy}{dx}$ = स्थिरांक, इससे यह ज्ञात होता है कि भाग AC में प्रवणता का मान समान है क्योंकि B'C' एक सीधी रेखा की दिशा में झुका हुआ है जब कि खंड AB वक्र के रूप में है।

$$\text{अतः}\ \theta_B = \theta_C = \frac{9}{1600}$$

$$y_B = y_c + y_2 = 1.125 + \theta_c \times B_c = 1.125 + \frac{9}{1600}$$

$$= 1.6875 \text{ cm}$$

(ii) क्षेत्र आघूर्ण विधि :—

$$\theta_c - \theta_A = \frac{\text{A तथा C के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल}}{EI}$$

$$\theta_A = o$$

$$\text{अतः}\ \theta_c = \frac{3 \times 100 \times 10,0000 \times 300}{2 \times 400,000 \times 200 \times 10^5} = \frac{9}{1600}$$

$$\theta_B - \theta_A = \frac{\text{A तथा B के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल}}{EI}$$

$$= \frac{\text{A तथा C के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख क्षेत्रफल, होगा}}{EI}$$

क्योंकि C तथा B के मध्य बंकन बल आघूर्ण का मान शून्य है।

$$\text{अतः}\ \theta_B = \theta_C = \frac{9}{1600}$$

$$y_b = \frac{\text{C के सापेक्ष बंकन बल आघूर्ण आरेख का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{3 \times 100 \times 10,0000 \times 3 \times 100}{2 \times 40,000 \times 200 \times 10^5} \times \frac{2 \times 300}{3}$$

$$= 1.125 \text{ cm}$$

$$y_B = \frac{\text{B के सापेक्ष बंकन बल आघूर्ण आरेख के क्षेत्रफल का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{3 \times 100 \times 10,0000 \times 3 \times 100}{2 \times 40,000 \times 200 \times 10^5} = \underline{1.6875 \text{ cm}}$$

(ब) प्रास धरन जिसकी संपूर्ण विस्तृत पर एक समान बंटित भार लग रहा हो।

$$EI \frac{d^2y}{d_-^2} = \frac{w(l-x)^2}{2}$$

$$EI \frac{d_y}{d_x} = \frac{wl^2{}_x}{2} - \frac{2wlx2}{4} + \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$\frac{d_y}{d_x} = o$; x=o होने पर अतः $C_1 = o$

$$EI \frac{d_y}{d_x} = \frac{wlx^2}{2} - \frac{wlx^2}{2} + \frac{wx^3}{6} \quad . \quad . \quad . \quad (6.12)$$

$$EI\,y = \frac{wl^2x^2}{4} - \frac{wlx^3}{6} + \frac{wx^4}{24} + c_2$$

$x = o$ होने पर $y = o$ अतः $c_2 = o$

$$EIy = \frac{wl^2x^2}{4} - \frac{wlz^4}{6} + \frac{wz^4}{24} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.13)$$

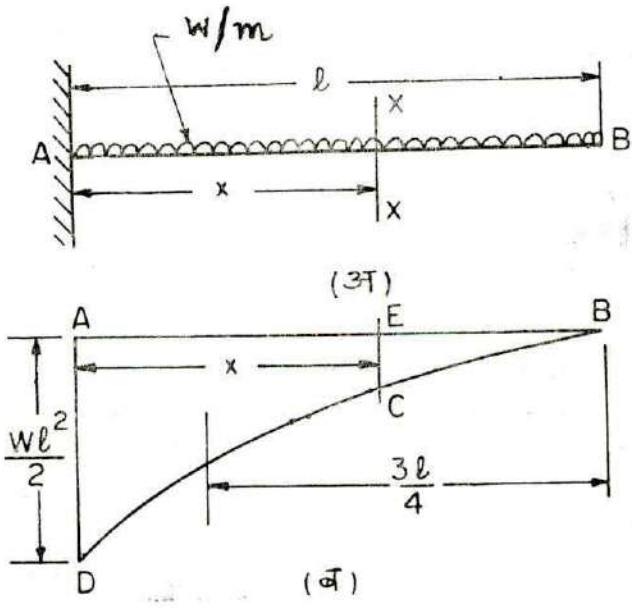
अधिकतम विक्षेप मुक्त सिरे पर होगा । समीकरण (6.12) में $x = l$ रखने पर

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^3}{2} - \frac{wl^3}{2} + \frac{wl^3}{6}\right] = \frac{wl^3}{6EI}$$

एवं $$y_{max} = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^4}{4} - \frac{wl^4}{6} + \frac{wl^4}{24}\right] = \frac{wl^4}{8EI}$$

क्षेत्र आघूर्ण विधि :—

चित्र (6.5) में दिखाये गये परिवलय का क्षेत्रफल $\frac{1}{3} \times \frac{wl^2}{2} \times l$ है तथा इसका गुरुत्व केंद्र साहिने किनारे से $\frac{3l}{4}$ की दूरी पर होगा ।



चित्र 6.5

x की दूरी पर परिच्छेद X पर ध्यान दीजिए

B से गुरुत्व केंद्र की दूरी

$$= \frac{\frac{wl^3}{6} \times \frac{3l}{4} - \frac{w\,(l-x)^3}{6} \times \frac{3}{4}\,(l-x)}{\frac{wl^3}{6} - \frac{w\,(l-x)^3}{6}}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{l^4 - (l-x)^4}{l^3 - (l-x)^3}\right]$$

CE के सापेक्ष क्षेत्रफल ADCE के आघर्ण को EI से भाग देने पर

$$= \left[\left[\frac{\frac{3}{4}\,[l^4 - (l-x)^4]}{l^3 - (l-x)^3}\right] - (l-x)\right] \times \frac{w}{6EI}\,[l^3 - (l-x)]$$

$yx = \frac{wl^2x^2}{4EI} - \frac{wlx^3}{6EI} + \frac{wx^4}{24EI}$ यही मान समीकरण (6.13) द्वारा भी प्राप्त होता है ।

$$\theta_C - \theta_A = \frac{\text{आरेख ADCE का क्षेत्रफल}}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^3}{6} - \frac{w\,(l-x)^3}{6}\right]$$

$\theta_A = 0$

चूंकि

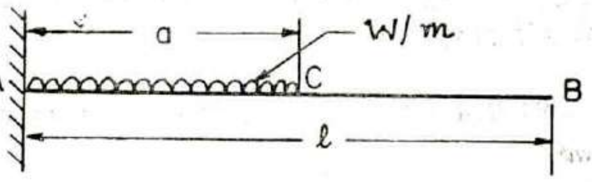
$$\theta_C = \frac{wlx^2}{2EI} - \frac{wlx^2}{2EI} + \frac{wx^3}{6EI}$$

समीकरण (8.12) से भी यही प्राप्त होता है ।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि ऐसे बंकन बल आघूर्ण आरेखों में जो परिवलय आदि के समान वक्र द्वारा निर्मित होते हैं यह क्षेत्र आघूर्ण विधि अधिक सुविधाजनक नहीं होती है विशेषकर उस अवस्था में जब संपूर्ण धरन की लंबाई के विभिन्न स्थानों पर प्रवणता तथा विक्षेप ज्ञात करना हो ।

यदि किसी एक विशेष स्थान पर प्रवणता एवं विक्षेप ज्ञात करना हो तब यह क्षेत्र आघूर्ण विधि समाकलन विधि की अपेक्षा अधिक सरल होती है । अगले पृष्ठों में यह स्पष्ट किया जायगा कि कौनसी विधि अधिक उपयुक्त है ।

(स) प्रास धरन जिसकी विस्तृति के कुछ भाग पर एक समान बंटित भार लग रहा हो :-



चित्र 6.6

व्यवकलन विधि का प्रयोग करते हुए यह प्राप्त किया जा सकता है कि—

$$\theta_c - \theta_B = \frac{wa^3}{6EI}$$

$$y_c = \frac{wa^4}{8EI}$$

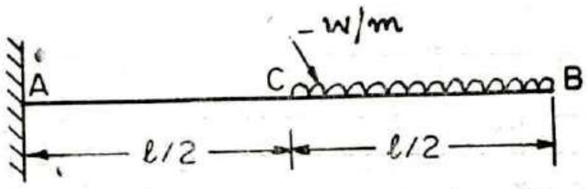
$$y_B = y_c + \theta_c(l - a)$$

$$= \frac{wa^4}{8EI} + \frac{wa^3}{6EI}(l - a)$$

उदाहरण 6.2 : एक प्रास धरन पर उसके मध्य बिन्दु से मुक्त सिरे तक एक समान बंटित भार लग रहा है। मुक्त सिरे पर प्रवणता एवं विक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल :—

इस अभ्यास को क्षेत्र आघूर्ण विधि से हल किया जा सकता है परन्तु नीचे दी गई विधि अधिक सरल तथा छोटी है ।



चित्र 6.7

दो समान परिमाण के परन्तु विपरीत दिशा में लग रहे भार धरन के भाग AC में कल्पित किए गये हैं । इस प्रकार धरन पर संपूर्ण विस्तृति में नीचे की दिशा में एक समान बंटित भार लग रहा है तथा खंड AC पर उसी परिमाण का एक समान बंटित भार ऊपर की दिशा में लग रहा है ।

बिन्दु B पर संपूर्ण विस्तृत पर एक समान बंटित भार के कारण विक्षेप

$$= \frac{wl^4}{8EI}$$

खंड AC पर ऊपर की दिशा में लग रहे भार के कारण बिन्दु B का विक्षेप

$$= -\frac{wl^4}{8\times 16EI} - \frac{wl^3}{48EI} \times \frac{l}{2}$$

$$B \text{ का कुल विक्षेप } = \frac{wl^4}{8EI} - \frac{wl^4}{128EI} - \frac{wl^4}{96EI}$$

$$= \frac{41wl^4}{384EI}$$

नीचे की दिशा में लगने वाले भार के कारण $\theta_B = \dfrac{wl^3}{6EI}$

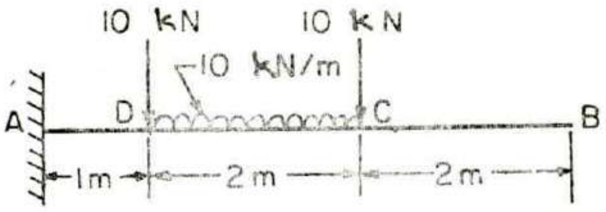
ऊपर की दिशा में लगने वाले भार के कारण $\theta_B = -\dfrac{w}{6EI}\left(\dfrac{l}{2}\right)^3$

$$\text{अतः } \theta_B = \frac{wl^3}{6EI} - \frac{wl^3}{48EI}$$

$$= \frac{7wl^3}{48EI}$$

इस प्रकार प्राप्त मानों की जाँच क्षेत्र आघूर्ण विधि द्वारा भी की जा सकती है ।

उदाहरण 6.3 : एक प्रास धरन पर, जिसकी लंबाई 5m है, एक समान बंटित भार तथा दो सकेंद्री भार जैसा कि चित्र (6.8) में दिखाया गया है, लग रहे हैं । बिन्दुओं B, C तथा D पर प्रवणता एवं विक्षेप ज्ञात कीजिए । $I = 20,000 cm^4$; $E = 200$ GPa



चित्र 6.8

प्रास के भाग AD पर दो एक समान बंटित भार विपरीत दिशाओं में लगाइये। चारों प्रकार के भारों का विश्लेषण अलग अलग किया जायेगा तथा उनके द्वारा परिणाम का बीजीय योग उत्तर होगा।

(i) C पर 10kN किलो के भार के कारण

$$\theta_D = \frac{1}{EI}\left[Plx - \frac{Px^2}{2}\right]; \quad l = 3m; \; x = 1m$$

$$= \frac{1}{EI}\left[10000 \times 300 \times 100 - 10000 \times \frac{(100)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{2.5 \times 10^8}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_B = \theta_c = \frac{10000 \times (300)^2}{2EI} = \frac{4.2 \times 10^8}{EI}$$

$$y_D = \frac{Plx^2}{2EI} - \frac{Px^3}{6EI} = \frac{1}{EI}\left[\frac{10000 \times 300 \times (100)^2}{2} - \frac{10000 \times (100)^3}{6}\right]$$

$$= \frac{4}{3EI} \times 10^{10}$$

$$y_c = \frac{10000 \times (300)^3}{EI} = \frac{9 \times 10^{10}}{EI} \text{ cm}$$

$$y_B = \frac{9 \times 10^{10}}{EI} + \theta_c \times 200 = \frac{18 \times 10^{10}}{EI} \text{ cm}$$

(ii) D पर 10kN/m के भार के कारण

$$\theta_D = \frac{10000 \times (100)^2}{2EI} = \frac{0.5 \times 10^8}{EI}$$

$$\theta_D = \theta_c = \theta_B$$

$$y_D = \frac{10000 \times (100)^3}{3EI} = \frac{10^{10}}{3EI} \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{10^{10}}{3EI} + \theta_D \times 200 = \frac{4}{3EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$y_B = \frac{10^{10}}{EI} + \theta_D \times 400 = \frac{7}{3EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

(iii) भाग AC पर नीचे की दिशा में लगने वाले 10kN/m के भार के कारण

$$\theta_D = \frac{wl^2x}{1EI} - \frac{wlx^2}{2EI} + \frac{wx^3}{6EI}$$

$$= \frac{100 \times (300)^2 \times 100}{2EI} - \frac{100 \times 300 \times (100)^2}{2EI} + \frac{100 \times (100)^3}{6EI}$$

$$= \frac{19}{6EI} \times 10^8$$

$$\theta_B = \theta_c = \frac{100 \times (300)^3}{6EI} = \frac{9}{2EI} \times 10^8$$

$$y_D = \frac{wl^2x^2}{4EI} - \frac{wlx^3}{6EI} + \frac{wx^4}{24EI}$$

$$= \frac{100 \times (300)^2 \times (100)^2}{4EI} - \frac{100 \times (300) \times (100)^3}{6EI} + \frac{100 \times (100)^4}{24EI}$$

$$= \frac{43}{24EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{100 \times (300)^4}{8EI} = \frac{81}{8EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$y_B = y_c + \theta_c \times 200 = \frac{153}{8EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

(iv) भाग AD पर 13kN/m के एक समान बंटित भार के कारण

$$\theta_D = \frac{100 \times (100)^3}{6EI} = -\frac{10^8}{6EI}$$

$$\theta_B = \theta_c = \theta_D$$

$$y_D = \frac{100 \times (100)^4}{8EI} = -\frac{10^{10}}{8EI} \text{ cm}$$

$$y_c = y_D + \theta_L \times 200 = -\frac{11}{24EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$y_B = y_D + \theta_D \times 400 = -\frac{19}{24EI} \times 10^{10} \text{ cm}$$

अतः कुल मान

$$\theta_D = \frac{10^8}{EI}\left[2.5+0.5+\frac{19}{6}-\frac{1}{6}\right] = \frac{6\times 10^8}{20{,}000\times 20\times 10^6}$$

$$= 0.0015$$

$$\theta_B = \theta_c = \frac{10^8}{EI}\left[4.5+0.5+4.5-\frac{1}{6}\right] = 0.002333$$

$$y_D = \frac{10^{10}}{EI}\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{43}{24}-\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{12} \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{10^{10}}{EI}\left[9+\frac{4}{3}+\frac{81}{8}-\frac{11}{24}\right] = 0.5 \text{ cm}$$

$$y_B = \frac{10^{10}}{EI}\left[18+\frac{7}{3}+\frac{153}{8}-\frac{19}{24}\right] = \frac{29}{30} \text{ cm}$$

उदाहरण 6.4 : एक प्रास धरन के मुक्त सिरे पर बंकन बल युग्म लगाया गया है। उसके मुक्त सिरे की प्रवणता एवं विक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल:–

बद्ध सिरे से X नापने पर

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI\ \frac{dy}{dx} = M.x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ यदि } x = 0 \text{ अतः } C_1 = 0$$

$$\therefore\ \theta x = \frac{Mx}{EI}$$

$$\text{मुक्त सिरे पर } \theta = \frac{Ml}{EI}$$

$$EIy = \frac{Mx^2}{2} + C_2$$

$$x = 0 \text{ होने पर } y = 0 \text{ अतः } C_2 = 0$$

$$yx = \frac{Mx^2}{2EI}; \text{ मुक्त सिरे का विक्षेप } = \frac{Ml^2}{2EI}$$

उदाहरण 6.5 : एक प्रास धरन के मुक्त सिरे पर P भार लगाया गया है। प्रास की लंबाई l तथा मोटाई एक समान d है परन्तु उसकी चौड़ाई b बदलती रहती है। चौड़ाई बद्ध सिरे पर b तथा मुक्त सिरे पर शून्य है। अतः मुक्त सिरे पर विक्षेप एवं प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल :

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = Px; \text{ यहाँ x मुक्त सिरे से लिया गया है}$$

$$I = \frac{bx}{l} \cdot \frac{d^3}{12}$$

$$\text{अतः } \frac{bxd^3}{12l} E. \frac{d^2y}{dx^2} = P.x$$

$$\text{अथवा } \frac{bd^3}{12l} E. \frac{d^2y}{dx^2} = P$$

$$\text{अथवा } \frac{bd^3}{12l} E. \frac{dy}{dx} = Px + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = 0; \text{ यदि } x = l; \text{ अतः } C_1 = Pl$$

$$\text{इसलिए } \frac{bd^3}{12l} E. \frac{dy}{dv} = Px - Pl$$

$$\text{अथवा } \frac{bd^3}{12l} E.y. = \frac{Px^2}{2} - Plx + C_2$$

$x = l$ होने पर $y = 0$; $C_2 = \dfrac{Pl^2}{2}$

अतः $\dfrac{bd^3}{12l}\ E.y = \dfrac{Px^2}{2} - Plx + \dfrac{Pl^2}{2}$

यदि $x = 0$; तो मुक्त सिरे पर प्रवणता

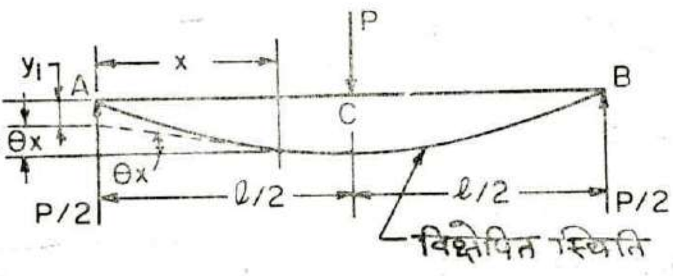
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pl \times 12l}{bd^3E} = -\frac{12Pl^2}{bd^3E}$$

यदि $x = 0$, मुक्त सिरे पर विक्षेप

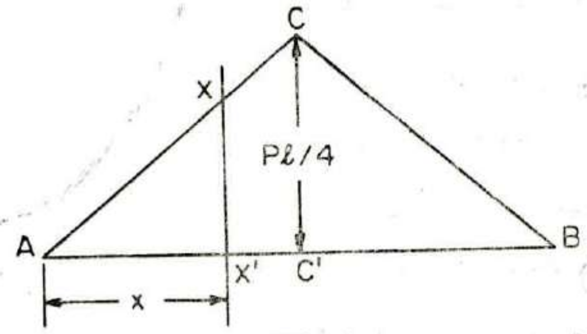
$$= \frac{Pl^2}{2} \times \frac{12l}{bd^3E} = \frac{6Pl^3}{bd^3E}$$

6·5 सरल आधारित धरन की प्रवणता तथा विक्षेप

(अ) दंड के मध्य पर संकेन्द्री भार लगने पर–



(अ)



(ब)

चित्र 6.9

खंड A C में

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{2}\ x$$

$$EI\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C_1$$

$x = l/2$ होने पर $\dfrac{dy}{dx} = 0$; $C_1 = \dfrac{Pl^3}{16}$

चूंकि धरन के मध्य बिन्दु पर भार लग रहा है अतः मध्य के सापेक्ष दोनो सिरों की ओर विक्षेप सममिति होगा । इसका मान दोनों सिरों पर शून्य तथा मध्य बिन्दु पर अधिकतम होगा । अतः धरन के मध्य बिन्दु पर $\dfrac{dy}{dx} = 0$ अर्थात विक्षेप वक्र के मध्य बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा क्षैतिज होगी ।

$$EI\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + \frac{Pl^2}{16} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (6.14)$$

$$EI\ y = -\frac{Px^3}{12} + \frac{pl^2x}{16} + C_2$$

$x = 0$ होने पर $y = 0$; $C_2 = 0$.

$$EI.\ y = -\frac{Px^3}{12} + \frac{Pl^2x}{16} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (6.15)$$

θ अधिकतम $= \dfrac{Pl^2}{16EI}$; $x = 0$ होने पर

तथा $x = l/2$ होने पर y अधिकतम $= \dfrac{Pl^3}{48EI}$

खंड CB में विक्षेप वक्र खंड AC के समान ही होगा

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{16\ EI}$$

(ii) क्षेत्र-आघूर्ण विधि–

$$\theta x - \theta c = \frac{\text{क्षेत्रफल } C\ c'\ x'\ x}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{Pl}{4} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{Px}{2} \times x \times \frac{1}{2}\right]$$

परन्तु $\theta_c = o$

इसलिए $\theta_x = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pl^2}{16} - \frac{Px^2}{4}\right]$

यही मान समीकरण (6.14) द्वारा भी प्राप्त होता है ।

A से होती हुई ऊर्ध्वाधर रेखा मानिए

$$yx = y_1 + x.\theta x$$

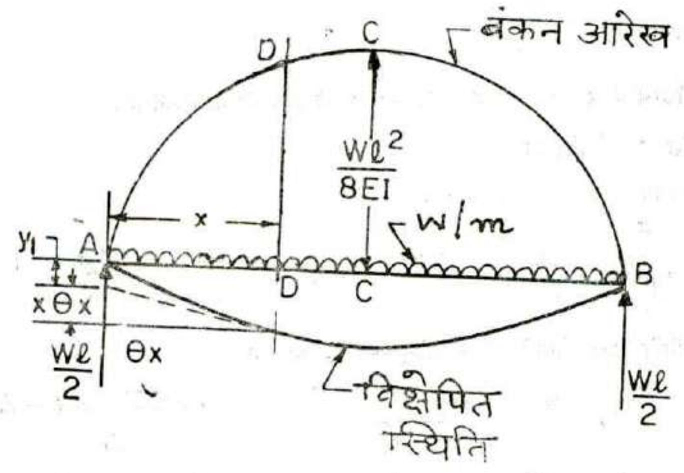
$$y_1 = \frac{\text{A के सापेक्ष क्षेत्रफल } Axx^1 \text{ का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{Px}{2} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{1}{EI} = \frac{Px^3}{6EI}$$

$$yx = \frac{Px^3}{6EI} + \frac{x}{EI}\left[\frac{Pl^2}{16} - \frac{Px^2}{4}\right]$$

$= \frac{Pl^2x}{16EI} - \frac{Px^3}{12EI}$ यही मान समीकरण (6.15) द्वारा भी प्राप्त होता है ।

(ब) संपूर्ण विस्तृत पर एक समान बंटित भार लगने पर :—



चित्र 6.10

संपूर्ण विस्तृति AB में,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} - - \frac{wlx}{2} + \frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wlx^2}{4} + \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$x = \frac{l}{2}$ होने पर $\frac{dy}{dx} = o$; $C_1 = \frac{wl^3}{24}$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wlx^2}{6} + \frac{wx^3}{6} + \frac{wl^3}{24} \qquad (6.16)$$

$$EI.\ y = -\frac{wlx^3}{12} + \frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{24} + C_2$$

$y = o$ होने पर $x = o$; $C_2 = o$

$$EI.\ y = -\frac{wlx^3}{12} + \frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{24} \qquad (6.17)$$

$$\theta_A = \frac{wl^3}{24EI};\quad \theta_B = -\frac{wl^3}{24EI}$$

यदि समीकरण (6.17) में $x = l/2$

y अधिकतम $= \frac{5wl^4}{384EI}$

समीकरण में $x = l$ रख कर $y_B = o$ की जाँच की जा सकती है ।

क्षेत्र आघूर्ण विधि :

परिवलय ADD′ का क्षेत्रफल

$$= \int_0^x \left(\frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}\right) dx = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6}$$

सममिति द्वारा विस्तृति के मध्यबिन्दु पर $\theta_c = o$

$$\theta_x - \theta_c = \theta_x = \frac{\text{क्षेत्रफल } DCC^1D'}{EI} = \frac{\text{क्षेत्रफल } ACC' \text{ क्षेत्रफल} - ADD'}{EI}$$

$$= \frac{wl^3}{16EI} - \frac{wl^3}{48EI} - \left[\frac{wlx^2}{4EI} - \frac{wx^3}{6EI}\right]$$

$$\theta x = \frac{wl^3}{24EI} - \frac{wlx^2}{4EI} + \frac{wx^3}{6EI}$$: यही व्यंज समीकरण (8.16)

द्वारा भी प्राप्त होता है ।

$$\theta_A - \theta_c = \theta_A = \frac{\text{क्षेत्रफल } ACC'}{EI} = \frac{wl^3}{16EI} - \frac{wl^3}{48EI} = \frac{wl^3}{24EI}$$

A से होती हुई ऊर्ध्वाकार रेखा लेने पर

$$yx = y_1 + x\,\theta_x$$

$$y_1 = \frac{A \text{ के सापेक्ष क्षेत्रफल } ADD' \text{ का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0 x\left[\frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}\right] x.dx$$

$$= \frac{wlx^3}{6EI} - \frac{wx^4}{8EI}$$

$$x.\theta x = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^3x}{24} - \frac{wlx^3}{4} + \frac{wx^4}{6}\right]$$

$$y_x = \left[\frac{wlx^3}{6} - \frac{wx^4}{8} + \frac{wl^3x}{24} - \frac{wlx^3}{4} + \frac{wx^4}{6}\right]$$

$$= \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wlx^3}{12EI} + \frac{wl^3x}{24EI}$$ यही व्यंजक समीकरण (8.17)

से भी प्राप्त होता है ।

मध्य विस्तृति पर $y_c = \frac{5wl^4}{384EI}$

(स) एक आधार से a की दूरी पर संकेंद्री भार लगने पर :

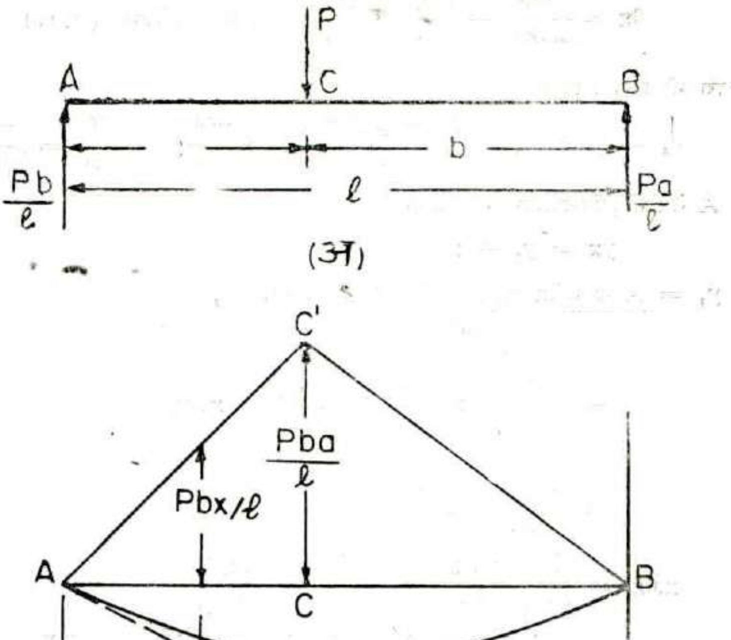
शून्य एवं a के मध्य x के विभिन्न मानों के लिए

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P.\,b}{l}x$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Pb^2x}{2l} + {}_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.18)$$

$$EI\,y = -Pbx^3 + C_1x + C_2$$

$x = 0$ होने पर $y = 0$ अतः $C_2 = 0$



चित्र 6.11

अभी स्थिरांक C_1 का मान नहीं ज्ञात किया जा सकता क्योंकि भाग Ac में कोई अन्य परिस्थिति नहीं ज्ञात है ।

$$EI.\,y = -\frac{Px^3b}{{}^36l} + C_1x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.19)$$

a तथा l के मध्य x के मान के लिए

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{pbx}{l} + P(x-a)$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3 \qquad (6.20)$$

$$EI.\ y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

जब $x = l$ तब $y = o$

$$\text{अतः } C_4 = \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{Pl-a}{6} - C_3l$$

$$= \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{Pb^3}{6} - C\ l$$

$$= \frac{Pb}{6}\ (l^2 - b^2) - C_3l$$

$$EI\ y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{6} + \frac{Pb}{6}(l^2-b^2) + C_3(x-l) \qquad (6.21)$$

$x=a$ अर्थात् बिन्दु C पर प्रवणता तथा विक्षेप का मान समान ही होना चाहिए चाहे इसे भाग AC पर अथवा BC पर माना जाय ।

समीकरणों (6.18) तथा (6.20) में $x=a$ रखने पर

$$-\frac{Pba^2}{6l} + C_1 = -\frac{Pba^2}{2l} + \frac{P}{2}(a-a)^2 + C_3$$

अथवा $C_1=C_3$

इसी प्रकार समीकरणों (6.19) तथा (6.21) में $x=a$ का मान रखने पर,

$$-\frac{Pba^3}{6l} + C_1a = -\frac{Pba^3}{6l} + \frac{P}{6}(a-a)^3 + \frac{Pb}{6}(l^2-b^2) + C_3(a-l)$$

$$\text{अथवा}\quad C_1a - C_3a + C_3l = \frac{Pb}{6}(l^2-b^2)$$

$$\text{अतः } C_1=C_3=\frac{Pb(l^2-b^2)}{6l} \quad \text{तथा} \quad C_4 = o$$

अतः शून्य एवं a के मध्य x के मानों के लिए

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{Pb(l^2-b^2)}{2l} \qquad \ldots (6.22)$$

$$EI.\ y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{Pb(l^2-b^2)x}{6l} \qquad \ldots (6.23)$$

a तथा l के मध्य x के विभिन्न मानों के लिए,

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + \frac{Pb(l^2-b^2)}{6l} \qquad \ldots (6.24)$$

$$EI.\ y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{2} + \frac{Pbx(l^2-b^2)}{6l} \qquad \ldots (6.25)$$

$$yc = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pba^2}{6l} + \frac{Pb(l^2-b^2)}{6l} \times a\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pba^3}{6l} + \frac{Pab\ (l-b)\ (l+b)}{6l}\right]$$

$$yc = \frac{1}{EI}\ Pa^2b\left[-\frac{a}{6l} + \frac{(l+b)}{6l}\right]$$

$$= \frac{1}{EI}Pa^2b \times \frac{(l-a+b)}{6l}\ ; \qquad (l-a) = b \text{ रखने पर}$$

$$y_c = \frac{1}{EI}\ \frac{Pa^2b^2}{3l}$$

$$\theta_A = \frac{Pb\ (l^2-b^2)}{6\ lEI} = \frac{Pab\ (2b+a)}{6\ EI\ l}$$

$$\theta_c = \frac{1}{EI}\left[\frac{P.\ b.\ (l^2-b^2)}{6l} - \frac{Pba^2}{2l}\right]$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{P\ (l-a)^2}{2} - \frac{Pbl^2}{2l} + \frac{Pb\ (l^2-b^2)}{6l}\right]$$

$$= -\frac{Pba}{6\ EI\ l}\ (2a+b)$$

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है यह समाकलन विधि अधिक उपयुक्त नहीं है क्योंकि स्थिरांकों का मान दोनों भागों में अलग अलग नहीं ज्ञात किए जा सकते ।

श्री मैकाले (Macaulay) ने एक ही व्यंजक द्वारा संपूर्ण धरन के विभिन्न भागों में बंकन बल आघूर्ण को व्यक्त करने की विधि बताई है । इस अध्याय में बायें सिरे पर मूल बिन्दु मान कर अध्याय (5) में वर्णित मैकाले विधि में तदनुसार परिवर्तन किया जाएगा । वहाँ मूल बिन्दु दाहिने सिरे पर माना गया है तथा x धनात्मक दाहिने से बायें

ओर नापने पर माना गया था। इस विधि के अनुसार धरन के दाहिने भाग में स्थित किसी परिछेद के लिए बंकन बल आघूर्ण व्यंजक लिख लीजिए। मैकाले की विधि से व्यवकलन स्थिरांक सरलतापूर्वक ज्ञात किए जा सकते हैं तथा धरन के सब भागों के लिए उनका मान एक ही होता है।

$$EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pbx}{l} + P\left\{(x-a)\right\}$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P}{2}\left\{x-a\right\}^2 + C_1$$

$$EI.\ y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P}{6}\left\{x-a\right\}^3 + C_1x + C_2$$

$x=o$ होने पर $y=o$ $C_2=o$

अतः $\frac{P}{6}\left\{x-a\right\}^3$ को नगण्य कर दिया जाएगा क्योंकि $x=o$ होने पर

$(x-a)$ का मान ऋणात्मक होगा।

इसी प्रकार $y=o$ होगा यदि $x=l$ हो

अथवा $C_1 = \frac{Pb\,(l^2-b^2)}{6l}$; यदि $(l-a) = b$ रखा जाय

अत $EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P}{2}\left\{x-a\right\}^2 + \frac{Pb}{6l}(l^2-b^2)$ . . . (6.26)

$$EI.\ y = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P}{6}\left\{x-a\right\}^3 + \frac{Pbx}{6l}(l^2-b^2) \quad (6.27)$$

समीकरणों (6.26) तथा (6.27) की सहायता से धरन के किसी भाग पर प्रवणता एवं विक्षेप का मान ज्ञात किया जा सकता है परन्तु $x < a$ होने पर कोष्ठकों के भीतर के पदों को नगण्य मान लेना चाहिए।

$$\theta_A = \frac{Pb}{6EIl}(l^2-b^2) = \frac{Pab}{6EIl}(2b+a)$$

$$\theta_c = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2) - \frac{Pba^2}{2l}\right]$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pbl^2}{2} + \frac{P}{2}(l-a)^2 + \frac{Pb}{6l}\left[(l^2-b^2)\right]\right]$$

$$= -\frac{Pab}{6EIl}(2a+b)$$

$$y_c = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pba^3}{6l} + \frac{Pba}{6}(l^2-b^2)\right]$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{3\,EI.\,l}$$

क्षेत्र आघूर्ण विधि :

धरन के किसी भाग पर प्रवणता नहीं ज्ञात होती अतः धरन के विभिन्न स्थानों पर प्रवणता एवं विक्षेप का मान शीघ्रता एवं सरलतापूर्वक नहीं ज्ञात किया जा सकता है।

बिन्दु B से होकर जाती हुई ऊर्ध्वाकार रेखा मानने पर, अंतर्छेद BB′ का मान B के सापेक्ष क्षेत्रफल AC′B के आघूर्ण को EI से विभाजित करने पर प्राप्त होगा।

$$BB' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pba}{l} \times \frac{a}{2}\left(\frac{a}{3} + b\right) + \frac{Pba}{l} \times \frac{b}{2} \times \frac{2}{3}b\right]$$

$$= \frac{Pab}{6EIl}(2b+a)(a+b)$$

$$\theta_A = \frac{BB'}{l} = \frac{BB'}{(a+b)} = \frac{P.a.b\,(2b+a)}{6\,EI.\,l}$$

इसी प्रकार, $\theta_B = -\frac{Pba\,(2a+b)}{6EI.\,l}$

$\theta_x = \theta_A - \frac{1}{EI} \times$ A तथा X के मध्य बं० ब० आ० आरेख का क्षेत्रफल

$$= \theta_A - \frac{1}{EI} \times \frac{Pbx}{l} \times \frac{x}{2}$$

$$= \frac{Pab\,(2b+a)}{6E\,I.l} - \frac{Pbx^2}{2\,EIl}$$

यही व्यंजक समीकरण (6.22) द्वारा भी प्राप्त होता है। a तथा l के मध्य x के विभिन्न मानों के लिए θ_x का मान इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। A से जाती हुई ऊर्ध्वाधर रेखा लेने पर

$$y_x = \frac{1}{EI}\ \frac{Pb.x}{l}\ \frac{x}{2} \times \frac{2x}{3} + x.\theta_x$$

$$= \frac{Pbx^3}{3\ EI} + \frac{Pbx\ (l^2-b^2)}{6EI\ l} - \frac{Pbx^3}{2\ EI\ l}$$

$$= -\frac{Pbx^3}{6\ EI\ l} - \frac{Pbx\ (l^2-b^2)}{6\ EI.\ l}$$

यही व्यंजक समीकरण (6. 23) द्वारा भी प्राप्त होता है ।

अधिकतम विक्षेप :—

अधिकतम विक्षेप ज्ञात करने के लिए, शून्य प्रवणता का स्थल ज्ञात करना होगा ।

$$\theta_A = \frac{Pab\ (2b+a)}{6\ EI.\ l}$$

यह a तथा b के सभी मानों के लिए धनात्मक होगा

$$\theta_c = -\frac{Pa^2b}{2EI.\ l} + \frac{P.\ b.\ a\ (2b+a)}{6EI.\ l}$$

$$= \frac{Pab}{3EI}\ (b-a)$$

यदि $a>b$ तब θ_c ऋणात्मक तथा $a < b$ होने पर धनात्मक होगा । a तथा b के सभी मानों के लिए θ_B ऋणात्मक होगा । धरन की प्रवणता बिन्दु A पर धनात्मक रूप से शनैः शनैः B पर ऋणात्मक हो जाती है । अतः धनात्मक से ऋणात्मक में परिवर्तन होने के समय किसी बीच के परिच्छेद पर इसका मान शून्य भी होगा ।

यदि $a>b$ हो तो B पर प्रवणता ऋणात्मक प्राप्त होती है अतः यह स्पष्ट है शून्य प्रवणता अथवा अधिकतम विक्षेप भाग BC में कहीं पर होगा ।

यदि $a>b$ तो B पर प्रवणता ऋणात्मक परन्तु C पर धनात्मक है जिससे सिद्ध होता है कि अधिकतम विक्षेप स्थल भाग BC में होगा ।

$a>b$ होने पर अधिकतम विक्षेप भाग AC के लिए समीकरण(6.26)

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{Pb}{6l}\ (l^2 - b^2) = 0$$

अथवा $$x^2 = \frac{l^2 - b^2}{3}$$

अथवा $$x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

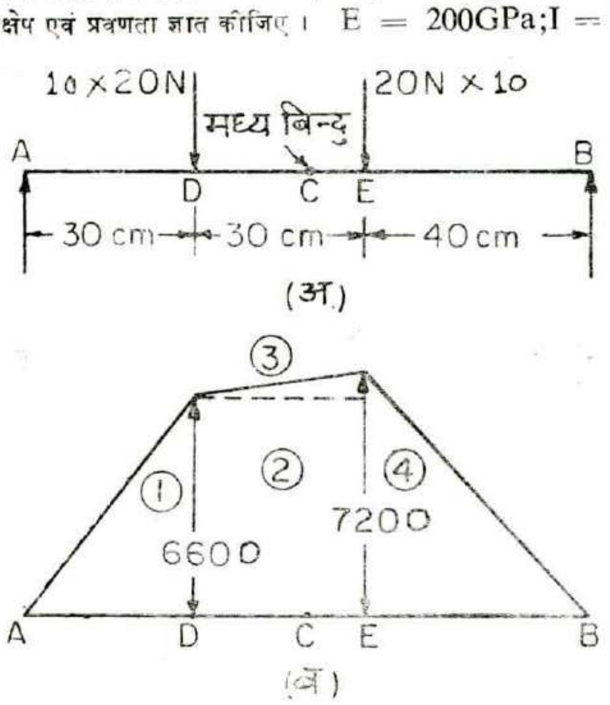
समीकरण (6. 27) में X का यह मान रखने पर तथा $(x - a)^3$ वाले पद को नगण्य मानते हुए

$$y_{\text{अधिकतम}} = \frac{1}{EI}\left[\frac{-Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{18\sqrt{3}l} + \frac{Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{6\sqrt{3}l}\right]$$

$$= \frac{P.b.(l^2-b^2)^3/^2}{9.\ \sqrt{3}EIl}$$

इसी प्रकार $a>b$ होने पर भाग CB में X का मान ज्ञात कर Ymax का मान ज्ञात किया जा सकता है । इस अवस्था में अधिकतम विक्षेप का स्थल भाग CB में होगा ।

उदाहरण 6. 6 : एक 100cm लंबी पीतल की नलिका अपने सिरों पर सरल रूप से आधारित है तथा इसके बीच बायें सिरे से 30 cm तथा 60 cm की दूरी पर दो भार क्रमशः 200 तथा 300 N के लगाए गये हैं । अतः बिन्दुओं A.B.C.D. तथा E के विक्षेप एवं प्रवणता ज्ञात कीजिए । $E = 200GPa; I = 5cm^4$



चित्र 6.12

हल :

D पर 200 N के भार के कारण (a = 30cm, b = 70cm)

$$\theta_A = \frac{Pab}{6EI.l}(2b+a) = \frac{200\times30\times60(140+30)}{6EI\times100}$$

$$= \frac{119000}{EI}$$

$$\theta_D = -\frac{Pb\,a^2}{2EI.\,l} + \theta_A = -\frac{200\times70\times30\times30}{2\times100\times EI} + \frac{119000}{EI}$$

$$= \frac{56000}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{Pb(l/2)^2}{2EIl} + \frac{P}{2EI}(l/2-a)^2 + \frac{Pb(l^2-b^2)}{6EI.\,l.}$$

$$= -\frac{200\times70\times(50)^2}{2\times100\times EI} + \frac{200\times20\times20}{2EI} + \frac{200\times70\times170\times30}{6\times EI\times100}$$

$$= -\frac{175000}{EI} + \frac{40000}{EI} + \frac{119000}{EI} = -\frac{16000}{EI}$$

$$\theta_E = -\frac{200\times70\times60\times60}{2\times100\times EI} + \frac{200\times30\times30}{2EI} + \frac{119000}{EI}$$

$$= -\frac{252000}{EI} + \frac{90000}{EI} + \frac{119000}{EI} = -\frac{43000}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{200\times30\times70}{6\times100\times EI}(60+70) = -\frac{91000}{EI}$$

$$y_D = -\frac{Pa^2b^2}{3EI.1} = \frac{200\times30\times30\times70\times70}{3\times100\times EI} = \frac{2940000}{EI}\ \text{cm.}$$

$$y_c = -\frac{Pb(l/2)^3}{6EI.\,1} + \frac{P}{6EI}(l_2-a)^3 + \frac{Pb.1/2(l^2-b^2)}{6EI.\,1}$$

$$= -\frac{200\times70\times50\times50}{6\times100\times EI} + \frac{20\times20\times200\times10}{6EI} + \frac{200\times70\times50\times170\times30}{6EI\times100}$$

$$= -\frac{8750000}{3EI} + \frac{800000}{3EI} + \frac{17850000}{EI}$$

$$= \frac{9900000}{EI}$$

$$y_E = -\frac{200\times70\times(60)^3}{6\times100\times EI} + \frac{200\times(30)^3}{6EI} + \frac{200\times70\times60\times5{,}100}{6\times100\times EI}$$

$$= -\frac{5040000}{EI} + \frac{900000}{EI} + \frac{7140000}{EI} = \frac{3000000}{EI\ \text{cm}}$$

2. E पर 200 N के भार के कारण (a = 60cm, b = 40cm)

$$\theta_A = \frac{Pab}{6EIl}(2b+a) = \frac{200\times60\times40\times140}{6\times100\times EI} = \frac{112000}{EI}$$

$$\theta_D = -\frac{200\times40\times(30)^2}{2\times100\times EI} + \frac{112000}{EI} = \frac{76000}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{200\times40\times(50)^2}{2\times100\times EI} + \frac{112000}{EI} = \frac{12000}{EI}$$

$$\theta_E = -\frac{200\times40\times(60)^2}{2\times100\times EI} + \frac{11200}{EI} = \frac{32000}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{200\times60\times40\times160}{6\times100\times EI} = -\frac{128000}{EI}$$

$$y_D = -\frac{200\times40\times(30)^3}{6\times100\times EI} + \frac{200\times40\times8400\times30}{6\times100\times EI}$$

$$= -\frac{360000}{EI} + \frac{3360000}{EI} = \frac{3000000}{EI}\ \text{cm}$$

$$y_C = -\frac{200\times40\times(50)^3}{6\times100\times EI} + \frac{200\times40\times8400\times50}{6\times100\times EI}$$

$$= -\frac{5000000}{3EI} + \frac{16800000}{3EI} = \frac{11800000}{3EI}$$

$$y_E = -\frac{200\times40\times(60)^3}{600EI} + \frac{200\times40\times8400\times60}{600EI}$$

$$= -\frac{2880000}{EI} + \frac{6720000}{EI} = \frac{3840000}{EI}$$

दोनों भारों के कारण संयुक्त प्रभाव

$$\theta_A = -\frac{119000}{EI} \times \frac{112000}{EI} = \frac{231000}{50\times10^6} = 0.00462$$

$$\theta_D = -\frac{56000}{EI} + \frac{76000}{EI} = \frac{13200}{50\times10^6} = 0.00264$$

$$\theta_C = -\frac{16000}{EI} + \frac{12000}{EI} = -\frac{4000}{50\times10^6} = -0.00008$$

$$\theta_E = -\frac{43000}{EI} - \frac{32000}{EI} = -\frac{75000}{5\times10^7} = -0.0015$$

$$\theta_B = -\frac{91000}{EI} - \frac{128000}{EI} = -\frac{219000}{5\times10^7} = -0.000438$$

$$y_A = y_B = 0$$

$$y_D = \frac{2940000}{EI} + \frac{3000000}{EI} = \frac{5940000}{5\times10^7} = 0.1188 \text{ cm.}$$

$$y_C = \frac{9900000}{3EI} + \frac{11800000}{3EI} = \frac{21700000}{3\times5\times13^7} = 0.1447$$

$$y_E = \frac{3000000}{EI} + \frac{3840000}{EI} = \frac{6840000}{5\times10^7} = 0.1368\text{cm}$$

इस अभ्यास को क्षेत्र आघूर्ण विधि द्वारा भी हल किया जा सकता है बंकन बल आघूर्ण चित्र 6.12(ब) में दिखाया गया है। संपूर्ण क्षेत्रफल का आघूर्ण प्राप्त करने के लिए इसको चार भागों में विभाजित किया गया है जैसा कि चित्र में स्पष्ट है।

$$\theta_A = \frac{\text{आरेख क्षेत्रफल का B के सापेक्ष आघूर्ण}}{EI \times 1}$$

$$= \frac{330\times300\times80+660\times300\times55+300\times30\times50+360\times400\times80/3}{100 \times EI}$$

$$= \frac{231000}{5\times10^7} = 0.00462$$

$$\theta_A - \theta_D = \frac{\text{क्षेत्र} - 1}{EI} = \frac{99000}{EI}$$

$$\theta_D = \frac{231000 - 99000}{EI} = \frac{132000}{5\times10^7} = 0.00264$$

$$\theta_E = \theta_B + \frac{\text{क्षेत्र} - 4}{EI} = -\frac{219000}{EI} + \frac{144000}{EI} = -\frac{75000}{EI}$$

$$= -0.0015$$

$$\theta_C = \theta_D - \frac{\text{C तथा D के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का क्षेत्रफल}}{EI}$$

$$= \frac{132000}{EI} - \frac{660 \times 200+40\times100}{EI} = -\frac{4000}{EI}$$

$$= -0.00008$$

$$y_D = \text{A के सापेक्ष क्षेत्र 1 का आघूर्ण} + \theta_D \times AD$$

$$= \frac{660\times30}{2} \times 200 + \theta_D \times 300$$

$$= \frac{5940000}{EI} = 0.1188 \text{ cm}$$

y_E = B के सापेक्ष क्षेत्र 4 का आघूर्ण $+ \theta_E \times EB$

$$= 720 \times \frac{400}{2} \times \frac{80}{3EI} + \frac{7,500}{EI} \times 400 = \frac{6,84,000}{EI}$$

$$= 0.1368 \text{ cm}$$

$$y_c = 720 \times \frac{400}{2} \times \frac{80}{3EI} + \frac{7000 \times 10 \times 45}{EI} + \frac{200 \times 10 \times 130}{3 \times 2 \times EI} + \frac{400 \times 500}{EI}$$

$$= \frac{21700000}{EI} = 0.1447 \text{ cm}$$

इस अभ्यास को क्षेत्र आघूर्ण विधि से हल करना सरल है ।

अधिकतम विक्षेप :—

चूंकि अधिकतम विक्षेप का मान C तथा D के मध्य होता है। अतः मैकाले विधि का प्रयोग करते हुए भाग CD के लिए बंकन बल आघूर्ण का व्यंजक प्राप्त कीजिए ।

$$EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = -22x + 20\left\{x - 30\right\}$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{22x^2}{2} + 20\frac{\left\{x - 30\right\}^2}{2} + C_1$$

$$EI \times \frac{23100}{EI} = C_1 = 23100$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{22}{2}x^2 + 10(x-30)^2 + 23100$$

अधिकतम विक्षेप के लिए

$$-11x^2 + 10x^2 + 600x + 9,000 + 23100 = 0$$

अथवा $x = 49.5$ cm.

$$EI.\ y = -\frac{22x^3}{6} + \frac{10}{3}\left\{x - 30\right\}^3 + 23100 \times x + C_2$$

$x = 0$ होने पर $y = 0$ अतः $C_2 = 0$

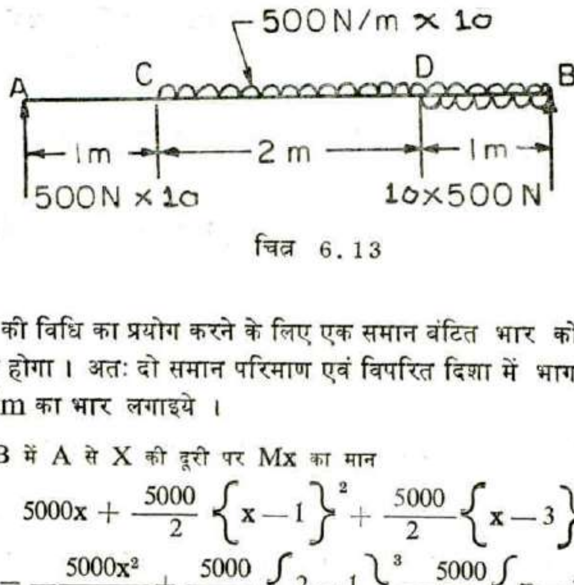
$$EI.\ y\,max = -\frac{22 \times (49.5)^3}{6} + \frac{10 \times (19.5)^3}{3} + 23100 \times 49.5 + 0$$

$$y\,max = \frac{2177.35}{3EI} = \frac{2177.35}{5 \times 3 \times 10^6} = 0.1457 \text{ cm}$$

इस अभ्यास को मैकाले की विधि का प्रयोग करके बड़ी ही सरलता पूर्वक हल किया जा सकता है ।

उदाहरण 6.7 : एक 4m लंबा धरन सिरों पर सरल आधारित है । इसके मध्य अर्द्ध भाग पर 5000 N/m का एक समान बंटित भार लग रहा है। धरन के दोनों सिरों तथा भार के दोनों सिरों पर प्रवणता ज्ञात कीजिए । भार के सिरों पर विक्षेप ज्ञात कीजिए तथा अधिकतम विक्षेप की भी स्थिति एवं मान बताइये ।

$E = 200 \times 10^9$ N/m^2; $I = 8,000$ cm^4



चित्र 6.13

हल :

मैकाले की विधि का प्रयोग करने के लिए एक समान बंटित भार को एक सिरे तक फैलाना होगा । अतः दो समान परिमाण एवं विपरित दिशा में भाग DB पर 5000 N/m का भार लगाइये ।

भाग DB में A से X की दूरी पर Mx का मान

$$= 5000x + \frac{5000}{2}\left\{x - 1\right\}^2 + \frac{5000}{2}\left\{x - 3\right\}^2$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{5000x^2}{2} + \frac{5000}{6}\left\{2 - 1\right\}^3 - \frac{5000}{2}\left\{x - 3\right\}^3 + C_1$$

$$EI\,y = -\frac{-5000x^3}{6} + \frac{5000}{24}\left\{x - 1\right\}^4 - \frac{5000}{24}\left\{x - 3\right\}^4 + Gx + C_2$$

$x = 0$ पर $y = 0$ अतः $C_2 = 0$

$x = 4$ पर $y = 0.$

अतः $0 = -\frac{5000(4)^3}{6} + \frac{5000(3)^4}{24} - \frac{5000}{24} + C_1 \times 4$

अथवा $C_1 = \frac{80000}{6} - \frac{135000}{32} + \frac{5000}{24} = \frac{27500}{3}$

$$EI\frac{d_y}{d_x} = -\frac{5000x^2}{2} + \frac{5000}{6}\left\{x-4\right\}^3 - \frac{5000}{6}\left\{x-3\right\}^3 + \frac{27500}{3}$$

$x = 0$ होने पर $\theta_A = \frac{27500}{3EI} = \frac{27500}{3\times16\times10^9} \times \frac{1}{10^{-3}} = \frac{27500}{48\times10^5}$

$= 0.000573$

$x = 1$ मी॰ पर $\theta_C = -\frac{5000}{2EI} + \frac{27500}{3EI} = \frac{20000}{3EI}$

$= \frac{2000}{48\times10^5} = 0{\cdot}000417$

$x = 3$ मी॰ पर $\theta_D = -\frac{5000x9}{2EI} + \frac{5000x8}{6EI} + \frac{27500}{3EI}$

$= -\frac{20000}{3EI} = -0.000417$

$x = 4$ मी॰ पर $\theta_B = -\frac{5000x16}{2EI} + \frac{5000x27}{2EI} - \frac{5000}{6EI} + \frac{27500}{3EI}$

$= -\frac{27500}{3EI} = -0.000573$

चूंकि भार सममिति रूप से लग रहा है अतः $\theta_A = -\theta_B$ तथा $\theta_C = -\theta_D$ । चाहे भारे सममिति हो अथवा नहीं यही विधि प्रयोग की जा सकती है ।

$$EI.\,y = -\frac{5000x^2}{6} + \frac{5000}{24}\left\{x-1\right\}^4 - \frac{5000}{24}\left\{x-3\right\}^4 + \frac{27500x}{3}$$

$y_c = -\frac{5000}{6EI} + \frac{27500}{3EI} = \frac{25000}{48\times10^6} = 0.00052\text{ m}$

$= 0.052\text{ cm}$

$y_D = -\frac{5000x27}{6EI} + \frac{5000x16}{24EI} + \frac{27500x3}{3EI} = \frac{25000}{48\times10^6}$

$= 0.00052\text{ m} = 0.052\text{ cm}$

अधिकतम विक्षेप की स्थिति के लिए $\frac{dy}{dx} = O$ तथा यह CD के मध्य स्थित होगा क्योंकि θ_C घनात्मक तथा θ_D ऋणात्मक है ।

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{5000x^2}{2} + \frac{5000}{6}\left\{x-1\right\}^3 - \frac{5000}{6}\left\{x-3\right\}^3 + \frac{27500}{3}$$

अथवा $O = -\frac{5000x^2}{2} + \frac{5000}{6}\left(x-1\right)^3 + \frac{27500}{3}$

अथवा, $x = 2\text{m}$

$y\ max = -\frac{5000x8}{6EI} + \frac{5000}{24EI} + \frac{55000}{3EI}$

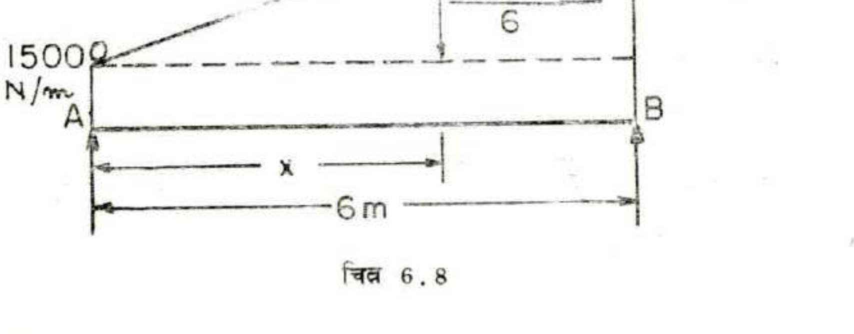
$= \frac{35625}{3EI} = \frac{35625}{58\times10^6} = 0.00074\text{ m}$

$= 0.074\text{ cm}$

चूंकि भार सममिति रूप से लग रहा है, यह अभ्यास केंद्र में प्रवणता को शून्य मानकर भी हल किया जा सकता था। परन्तु यहाँ व्यापक विधि का वर्णन किया गया है जिससे कि यदि किसी अभ्यास में भारण सममिति न हो तो भी हल किया जा सके ।

उदाहरण 6.8 : एक क्षैतिज धरन जो अपने सिरों पर सरल रूप से आधारित है एक बंटित भार इस प्रकार का लगाया गया है कि उसका मान एक सिरे पर 15000 N/m से दूसरे सिरे तक 60000 N/m के हिसाब से बदलता है । इसके मध्य पर विक्षेप ज्ञात कीजिए यदि इसकी विस्तृति 6m है इसके परिच्छेद की मोटाई 42cm तथा अधिकतम बंकन प्रतिबल 10000N/cm^2 है

$E = 200\times109\ N/m^2$ (लं॰ वि॰ वि॰)



चित्र 6.8

हल :

समीकरण (6.5) से

$$E\ I.\ \frac{d^4{}_y}{d_x{}^4} = +w = +1500 + \frac{45000x}{6}$$

$$E\ I\cdot \frac{d^3{}_y}{d_x{}^3} = 15000x + \frac{4500ax^2}{12} + C_1$$

$$E\ I.\ \frac{d^2{}_y}{d_x{}^2} = \frac{15000x^3}{2} + \frac{45000x^3}{36} + C_{1x} + C_2$$

$\frac{d^2{}_y}{d_x{}^2} = 0$ होगा यदि $x = 0$ तथा $x = 6$ हो

अतः $C_2 = 0;\ C_1 = -\frac{15000 \times 36}{2 \times 6} - \frac{45000 \times 36 \times 6}{36 \times 6}$

$$= -90000$$

$$EI.\ \frac{d^2{}_y}{d_x{}^2} = \frac{15000x^2}{2} + \frac{45000x^3}{36} - 90000x$$

यही व्यंजक बंकन बल आघूर्ण के लिए प्राप्त होगा यदि पहिले दोनों सिरों पर प्रति-क्रिया बल का मान निकाल लिया जाय तथा बाद में बंकन-बल आघूर्ण का समीकरण लिखा जाय ।

$E\ \frac{d^3{}_y}{d_x{}^3}$ उस स्थान पर शून्य होगा जहाँ बं० ब० आघूर्ण अधिकतम होगा

अतः $0 = 150000x + \frac{45000x^2}{12} - 90000$

अथवा $x = 3.3$ m

अधिकतम बं० ब० आ $= \frac{15000 \times 10.9}{2} + \frac{45000 \times 36}{36} - 90000 \times 3.3$

$$= 81750 - 45000 - 297000 = 170250\ N\text{—}m$$

अधिकतम प्रतिबल $= 10000 = \frac{17{,}0250 \times 100 \times 21}{I}$

अथवा $I = 35750\ cm^4$

$$EI.\ y = \frac{15000x^4}{24} + \frac{45000x^5}{20 \times 36} - \frac{90000x^3}{6} + C_3x + C_4$$

$x = 0$ तथा $x = 6$ होने पर $y = 0$ होगा

अतः $C_4 = 0$

तथा $C_3 = \frac{-15000x(6)^4}{24 \times 6} - \frac{45000 \times (6)^5}{30 \times 36 \times 6} + \frac{90000 \times (6)^3}{6 \times 6}$

$= +135000 - 81000 + 540000$

$= 324000$

$$EIy = \frac{15000x^4}{24} + \frac{45000x^5}{20 \times 36} - \frac{90000x^3}{6} + 32{,}4000$$

मध्य के लिए $x = 3m$ रखने पर

$$EI._y = \frac{15000 \times (3)^4}{24} + \frac{45000(3)^5}{20 \times 36} - \frac{90000 \times 27}{6} + 32{,}4000 \times 3$$

$$= \frac{15000 \times 27}{8} + \frac{5000 \times 27}{80} - \frac{90000 \times 27}{6} + 22{,}4000 \times 3$$

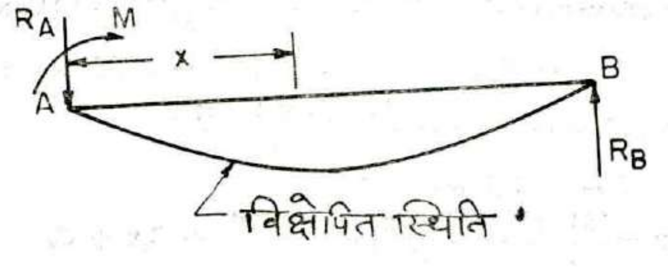
$$= \frac{18{,}7500 \times 27}{8}$$

अतः के मध्य विन्दु पर $y = \frac{187500 \times 2700}{8 \times 20 \times 10^3 \times 3375 \times 10^{-6}}$ m

$$= \frac{187500 \times 2700}{8 \times 20 \times 10^3 \times 3575}\ cm$$

$= 1.76$ cm

उदाहरण 6.9 : एक सरल आधारित धरन पर जैसा कि चित्र (6.15) में दिखाया गया है एक दक्षिणावर्ती बलयुग्म लगाया गया है अतः इसके विक्षेप वक्र का समीकरण बताइये । अधिकतम विक्षेप का भी मान बताइये । धरन की लंबाई l हैं ।



चित्र 6.15

हल :--

सिरा B पर प्रतिक्रिया बल उस प्रकार लगेगा जिससे कि सिरा A पर वामावर्ती बल युग्म प्राप्त हो ।

$$E_B = \frac{M}{l} = -R_A \text{ क्योंकि } R_B + R_A = 0$$

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{l}(l - x) = -M + \frac{M.x}{l}$$

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -M.x + \frac{Mx^2}{2l} + C_1$$

$$EI.\,y = -\frac{Mx^2}{2} + \frac{Mx^3}{6l} + C_1x + C_2$$

$x = 0$ तथा $x = l$ होने पर $y = 0$ अतः $C_2 = 0$

तथा $C_1 = \frac{Ml^2}{2l} - \frac{Ml^3}{6l^2} = \frac{Ml}{3}$

$$EI.\,\frac{dy}{dx} = -Mx + \frac{Mx^2}{2l} + \frac{Ml}{3}$$

$$EI.\,y = -\frac{M.x^2}{2} + \frac{M.x^3}{6l} + \frac{Mlx}{3}$$

मध्य बिन्दु पर $y = -\frac{Ml^2}{8EI} + \frac{Ml^2}{48EI} + \frac{Ml^2}{6EI} = \frac{Ml^2}{16EI}$

$$\theta_A = \frac{Ml}{3EI};\quad \theta_B = -\frac{Ml}{EI} + \frac{Ml}{2EI} + \frac{Ml}{3EI} = -\frac{Ml}{6EI}$$

चूंकि θ_A का मान θ_B की अपेक्षा दुगना है इससे यह प्रतीत होता है कि बलयुग्म लग रहे सिरा का घूर्णन दूरस्थ सिरे से दुगना होता है ।

उस स्थान पर धरन में अधिकतम विक्षेप होगा जहाँ $\frac{dy}{dx} = 0$

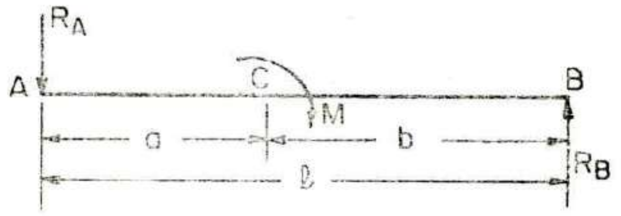
$$0 = -Mx + \frac{Mx^2}{2l} + \frac{Ml}{3}$$

अथवा $3x^2 - 6l.x + 2l^2 = 0$

अथवा $x = \frac{+6l \pm \sqrt{36l^2 - 24l^2}}{6} = l - \frac{l}{\sqrt{3}}$

$$y\,Max = \frac{1}{EI}\left[-\frac{M}{2}\left(l-\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{M}{6l}\left(l-\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{Ml}{3}\left(l-\frac{l}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{Ml^2\sqrt{3}}{27EI}$$

उदाहरण 6.10: चित्र (6.16) में दिखाये गये सरल आधारित दंड पर बल युग्म लगाये गये हैं । इसके विक्षेप वक्र का समीकरण प्राप्त कीजिए ।



चित्र 6.16

हल : -

$$R_B = \frac{M}{l},\quad R_A = \frac{-M}{l}$$

$$EI.\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{l}x - M\left\{x - a\right\}^0$$

$$EI.\,\frac{dy}{dx} = \frac{Mx^2}{2l} - M\left\{x - a\right\} + C_1$$

$$EI.\,y. = \frac{Mx^3}{6l} - \frac{M}{2}\left\{x - a\right\}^2 + C_1x + C_2$$

$x = 0$ तथा $x = l$ होने पर $y = 0$, अतः $C_2 = 0$

तथा $C_1 l = -\frac{Ml^3}{6l} - \frac{M}{2}b^2$ अथवा $C_1 = -\frac{Ml}{6} + \frac{Mb^2}{2l}$

$$EI.\,\frac{dy}{dx} = \frac{Mx^2}{2l} - M\left\{x - a\right\} + \frac{Mb^2}{2l} - \frac{Ml}{6}$$

$$EI\text{-}y = \frac{Mx^3}{6l} - \frac{M}{2}\left\{x - a\right\}^2 + \frac{Mb^2x}{2l} - \frac{Mlx}{6}$$

$$\theta_A = \frac{Mb^2}{2EIl} - \frac{Ml}{6EI},\ \theta_C = \frac{Ma^2}{2EIl} \times \frac{Mb^2}{2EIl} - \frac{Ml}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{Ml}{2EI} + \frac{Mb^2}{2EIl} - \frac{Mb}{EI} - \frac{Ml}{6EI}$$

$$= \frac{Ml}{2EI} + \frac{Mb^2}{2EIl} - \frac{Mb}{EI}$$

यदि सरल आधारित दंड AB के दोनों सिरों पर विपरीत दिशाओं में बलयुग्म लग रहे हों तब,

$$\theta_A = -\theta_B = \frac{Ml}{2EI}$$

मध्य बिन्दु पर y अधिकतम होगा $= \frac{Ml^2}{8EI}$

उदाहरण 6.11 : एक सरल आधारित धरन के मध्य बिन्दु पर जिसकी लंबाई 4m है विक्षेप ज्ञात कीजिए। इसका धारण निम्न प्रकार से किया गया है। इसके बायें सिरे 1m की दूरी पर एक संकेंद्री भार P लगाया है, मध्य बिन्दु पर एक संकेंद्री भार 2P लगाया गया है तथा संपूर्ण विस्तृत पर P/m का एक समान बंटित भार लग रहा है।

हल :—

मध्य बिन्दु पर 2P भार के कारण y मध्य

$$= \frac{2P \times (400)^3}{48EI}\ \text{cm}$$

एक समान बंटित भार के कारण

$$y\ \text{मध्य} = \frac{5 \times 4P \times (400)^3}{384EI}$$

बायें सिरे से 1 मी की दूरी पर लग रहे भार P के कारण

$$y\ \text{मध्य} = -\frac{P \times 300 \times (200)^3}{6 \times 400EI} + \frac{P}{6EI}(100)^2 + \frac{P \times 300 \times 200 \times 7{,}000}{6 \times 400 \times EI}$$

$$= \frac{P \times (400)^3}{EI}\left[-\frac{1}{64} + \frac{1}{6 \times 64} + \frac{7}{256}\right]$$

$$\text{कुल } y\ \text{मध्य} = \frac{P \times (400)^3}{EI}\left[\frac{1}{64} + \frac{20}{384} + \frac{1}{64} + \frac{1}{6 \times 64} + \frac{7}{256}\right]$$

$$= \frac{83}{768} \times \frac{P \times (400)^3}{EI} = \frac{6.9 \times 10^6 \times P}{EI}$$

उदाहरण 6.12 : एक ऊर्ध्वाधर ध्वज दंड जिसकी ऊंचाई 10m है नीचे से ऊपर की ओर समान रूप से पतला होता गया है। इसका सबसे निचला परिच्छेद 28cm का वर्ग तथा सबसे ऊपर का परिच्छेद 8cm का वर्ग है। इसके ऊपरी परिच्छेद पर गुरुत्व केंद्र से होता हुआ तथा एक भुजा के समांतर 1000N का क्षैतिज बल लगाया गया है। अधिकतम विक्षेप ज्ञात कीजिए। $E = 200 \times 10^9 N/m^2$

हल :—

मुक्त सिरे से x की दूरी पर I का मान

$$= \frac{\left(8 + \frac{x}{50}\right)^4}{12}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1000 \times x \times 12 \times (50)^4}{(400+x)^4 \times 200 \times 10^5}$$

$$= \frac{3{,}750x}{(400+x)^4}$$

$(400 + x) = Z$ रखने पर

$$\frac{dz}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}$

अतः $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{3{,}750(z-400)}{z^4}$

$$\frac{dy}{dz} = 3{,}750\left[-\frac{1}{2z^2} + \frac{400}{3z^3}\right] + C_1$$

यदि $x = 1000$ cm अथवा $x = 1400$ cm तब $\frac{dy}{dz} = 0$

$$\text{अतः } 0 = 3{,}750\left[-\frac{1}{2 \times (1{,}400)^2} + \frac{400}{3(1{,}400)^3}\right] + C_1$$

$$\text{अथवा } C_1 = \frac{17 \times 3{,}750}{42 \times (1{,}400)^2}$$

$$y = 3{,}750\left[\frac{1}{2z} - \frac{400}{6z^2} + \frac{17}{42} \times \frac{z}{(1.400)^2}\right] + C_2$$

यदि $z = 1400$ सेमी० $y = 0$

$$\text{अतः } C_2 = -\frac{6}{7} \times \frac{3{,}750}{1400}$$

$$y = 3{,}750\left[\frac{1}{2z} - \frac{400}{6z^2} + \frac{17z}{42 \times (1400)^2} - \frac{6}{7 \times 1{,}400}\right]$$

$x = 0$ होने पर अधिकतम विक्षेप प्राप्त होता है तथा $z = 400\text{cm}$

अतः

$$y_{\text{अधि}} = \frac{3{,}750}{400}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{34}{1029} - \frac{12}{49}\right]$$

$$= \frac{4{,}750 \times 2{,}010}{400 \times 6 \times 1{,}029} = 3\text{ cm}$$

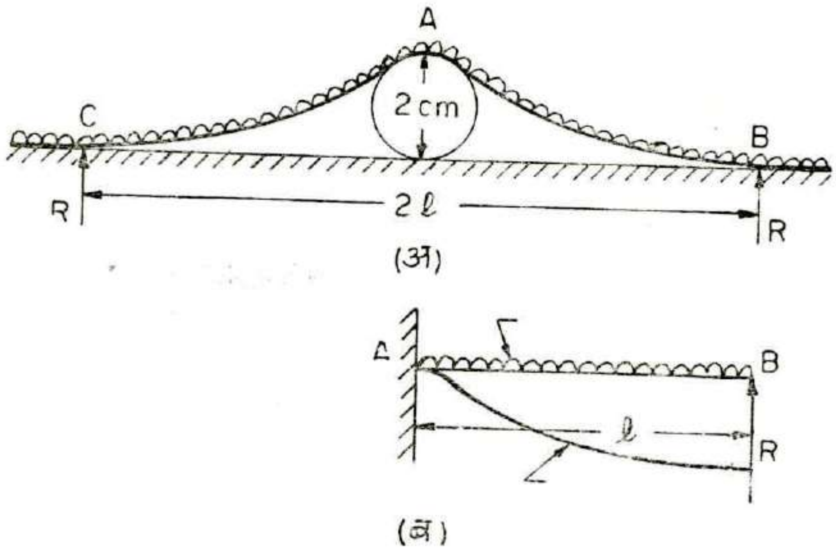
उदाहरण 6.13 : इस्पात की एक समान चौड़ाई तथा 0.25 cm मोटाई की एक पट्टी समतल फर्श पर रखी गई है परन्तु वह एक स्थान पर 2 cm व्यास के रोलर के ऊपर से होकर पड़ी है। बतलाइये रोलर के दोनों ओर कितनी लंबाई तक पट्टी जमीन से ऊपर उठी हुई रहेगी तथा यदि इस्पात का घनत्व 8000 kg/m^3 हो तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान बताइए।

(लं० वि० वि०)

$$E = 200\text{GPa}$$

हल :

चित्र (6.17) को देखिए। बिन्दुओं C तथा B पर बंकन बल आघूर्ण शून्य होगा क्योंकि फर्श पर टिके हुए भाग में प्रत्येक बिन्दु पर पृथ्वी का प्रतिक्रिया बल उसके भार से संतुलित रहता है। उस बिन्दु पर जहाँ पर कि पट्टी पृथ्वी से ऊपर उठनी आरंभ होती है, एक प्रतिक्रिया बल R लगेगा जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। अतः पट्टी का भाग AB एक प्रास धरन माना जा सकता है जिसका बद्ध सिरा A होगा। इस पर मुक्त सिरे पर लग रहे प्रतिक्रिया बल R के अतिरिक्त एक समान बंटित भार जो कि पट्टी के भार के बराबर होगा संपूर्ण लंबाई पर लगेगा। बिन्दुओं A, B तथा C पर प्रवणता शून्य होगी।



चित्र 6.17

सिरा B से X की दूरी पर एक परिच्छेद पर ध्यान दीजिए

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wx^2}{2} - Rx$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{6} - \frac{Rx^2}{2} + C_1$$

$x = 0$ तथा $x = l$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$

अतः $C_1 = 0$ तथा $R = \frac{wl}{3}$

$$EI.y = \frac{wx^4}{24} - \frac{wl}{3} \times \frac{x^3}{6} + C_2$$

$y = 0$, $x = l$ होने पर

$$O = \frac{wl^4}{24} - \frac{wl^4}{18} + C_2$$

अथवा $C_2 = \frac{wl^4}{72}$

$$EI.\ y = \frac{wx^4}{72} - \frac{wlx^3}{18} + \frac{wl^4}{72}$$

$x = 0$ होने पर $y = 2$ cm

$2EI = \frac{wl^4}{72}$ यह w प्रति सेमी० लंबाई पर लग रहा भार है

यदि पट्टी की चौड़ाई b हो

$$I = b \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{1}{12}\ cm^4$$

$$w = \frac{b}{4} \times \frac{80}{1000} = \frac{20b}{1000}\ N$$

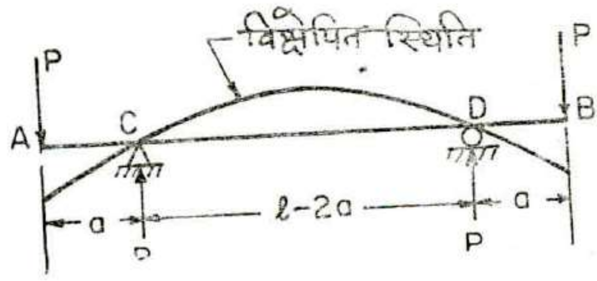
$$l^4 = \frac{5 \times 72 \times 200 \times 10^5 \times b \times 1000}{2b \times (4)^3 \times 120}$$

$= 4.7 \times 10^8$

अथवा $l = 147$ cm

6.6 प्रलंबी धरन

(अ) समान प्रलंब तथा दोनों सिरों पर समान भार लगने पर —



चित्र 6.18

$$EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = Px - P\left\{x - a\right\} + P\left\{x - (l - a)\right\}$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - \frac{P}{2}\left\{x - a\right\}^2 + C_1 + \frac{P}{2}\left\{x - (l - a)\right\}^2$$

$x = l/2$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\text{अतः } 0 = \frac{Pl^2}{8} - \frac{P}{2}\left\{\frac{l}{2} - a\right\}^2 + C_1$$

$$\text{अथवा } C_1 = -\frac{Pla}{2} + \frac{Pa^2}{2}$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - \frac{P}{2}\left\{x - a\right\}^2 + \frac{Pa^2}{2} - \frac{Pla}{2} + \frac{P}{2} \times \left\{x - (l - a)\right\}^2 \quad (6.28)$$

$$EI.\ y = \frac{Px^3}{6} - \frac{P}{6}\left\{x - a\right\}^3 - \frac{Plax}{2} + \frac{Pa^2x}{2} + C_2 + \frac{P}{6}\left\{x - (l-a)\right\}^3$$

$x = a$ होने पर $y = 0$

$$\text{अतः } 0 = \frac{Pa^3}{6} - \frac{Pla^2}{2} + \frac{Pa^3}{2} + C_2 \text{ अथवा } C_2 = \frac{Pla^2}{2} - \frac{2Pa^3}{3}$$

$$EI.\ y = \frac{Px^3}{6} - \frac{P}{6}\left\{x - a\right\}^3 + \frac{P}{6}\left\{x - (l - a)\right\}^3 - \frac{Plax}{2} + \frac{Pa^2x}{2} + \frac{Pla^2}{2} - \frac{2Pa^3}{3} \quad (6.29)$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI.}\left[\frac{Pa^2}{2} - \frac{Pla}{2}\right]$$

$\theta_B = -\theta_A$ सममिति के द्वारा

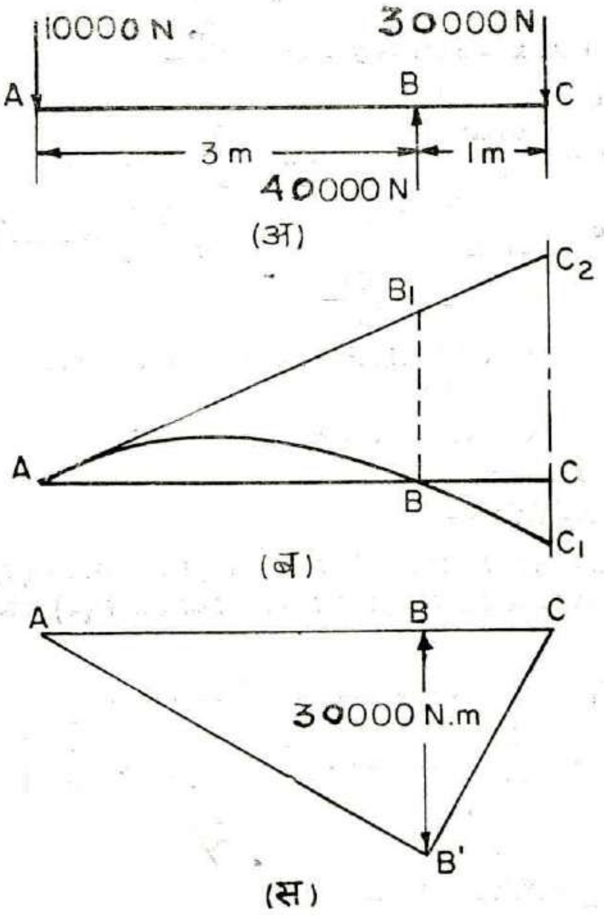
$$y_A = \frac{1}{EI.}\left[\frac{Pla^2}{2} - \frac{2Pa^3}{3}\right] = y_B$$

(ब) समान प्रलंब तथा w प्रति एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लगने पर मैकाले विधि का प्रयोग कर के इसी प्रकार विक्षेप वक्र का समीकरण ज्ञात किया जा सकता है।

$$EI.\ y = \frac{wx^4}{24} - \frac{wl}{12}\left\{x - a\right\}^3 - \frac{wl^3x}{48} + \frac{wlx}{4}\left(\frac{l}{2} - a\right)^2 - \frac{wa^4}{24} - \frac{wal^3}{48} - \frac{wla}{4}\left(\frac{l}{2} - a\right)^2 \quad (6.30)$$

यह व्यंजक $0 < x < (l-a)$ के लिए है क्योंकि लंबाई a के अंतिम खंड में वक्र का रूप वही होगा जो बायें प्रलंबी भाग में हैं ।

उदाहरण 6.14 : एक प्रलंबी धरन बिन्दु A पर हिंज से जुड़ा है तथा B रोलर पर आधारित है । C पर एक 30000 N का भार लगाया गया है जैसा कि चित्र 6.19 (अ) में दिखाया गया है । C बिन्दु पर विक्षेप ज्ञात कीजिए यदि $I = 30000\ cm^4$ तथा $E = 200 \times 10^5\ N/cm^2$



चित्र 6.19

हल :

दोनों प्रतिक्रिया बल चित्र में दिखाये गए की भाँति होंगे ।

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = 10000\,x - 40000\left\{x-3\right\}$$

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{10000x^2}{2} - \frac{40000}{2}\left\{x-3\right\}^2 + C_1$$

$$EI.\,y = \frac{10000x^3}{6} - \frac{40000}{6}\left\{x-3\right\}^3 + C_1x + C_2$$

$x = 0$ तथा $x = 3$ होने पर $y = 0$; अतः $C_2 = 0$

तथा $C_1 = -15000$

$$EI.\,y = \frac{10000x^3}{6} - \frac{40000}{6}\left\{x-3\right\}^3 - 15000x$$

$$\text{अतः } yc = \frac{1}{EI}\left[\frac{10000\times(4)^3}{6} - \frac{40000\times(1)^3}{6} - 15000\times4\right]$$

$$= \frac{40000}{EI}$$

चूंकि $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$ तथा $I = 30000 \times 10^{-8}\ m^4$

$$yc = \frac{40000}{200\times10^9\times30000\times10^{-8}} = 0.000667m$$

$$= 0.067cm$$

क्षेत्र आघूर्ण विधि :—

यह विधि "संयुग्मी धरन विधि" भी कहलाती है । चित्र 6.19 (स) में बंकन बल आघूर्ण आरेख दिखाया गया है । धरन को विक्षेप की दशा में (ब) में दिखाया गया है ।

$$C_2C_1 = \frac{1}{EI} \times \text{C के सापेक्ष क्षेत्र } AB'CA \text{ का आघूर्ण}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[30000\times3\times\frac{2}{2} + \frac{30000}{2}\times\frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{100000}{EI}$$

$$BB = \frac{\text{B के सापेक्ष क्षेत्र } AB'B \text{ का आघूर्ण}}{EI}$$

$$= \frac{30000}{EI} \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{45000}{EI}$$

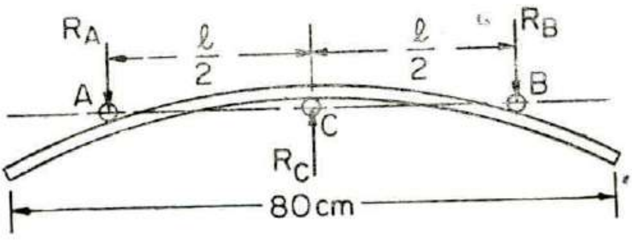
समरूप त्रिभुजों ACC_2 तथा APB_1 से

$$\frac{CC_2}{BB_1} = \frac{4}{3} \text{ अथवा } CC_2 = \frac{4}{3} \times \frac{450000}{EI} = \frac{60000}{EI}$$

$$yc = CC_1 = C_1C_2 - CC_2 = \frac{100000-60000}{EI} = \frac{40000}{EI}$$

$$= 0.0667 \text{ cm}$$

उदाहरण 6.15 : एक 80 cm लंबी 2 cm × $\frac{1}{4}$ cm की इस्पात की पट्टी तीन खूंटियों के मध्य मोड़ी गई है जैसा कि चित्र (6.20) में दिखाया गया है। खूंटियाँ 0.5 cm व्यास की तथा एक सरल रेखा में लगाई गई हैं। यदि खूंटियाँ बराबर दूरी पर लगी हों तो उनके मध्य परस्पर दूरी ज्ञात कीजिए यदि मुक्त सिरों पर वही विक्षेप हो जो मध्य-विस्तृति में होगा। धरन दोनों सिरों पर समान रूप से प्रलंबी है। खूंटियों पर प्रतिक्रिया बल का मान भी बताइये ।



चित्र 6.20

हल :

उपर्युक्त इस्पात की पट्टी को एक सरल आधारित धरन के रूप में माना जा सकता है जिसकी विस्तृति l है तथा उसके मध्य में एक ऊपर की दिशा में संकेंद्री भार लग रहा हो जिसका मान वही हो जो कि मध्य खूंटी पर प्रतिक्रिया बल हो।

c पर विक्षेप = खूंटी का व्यास + पट्टी की मोटाई

$$= 0.5 + 0.25 = 0.75 \text{ cm}$$

$$0.75 = \frac{R_c l^3}{48EI} \text{ अथवा } R_c = \frac{36\, EI}{l^3}$$

$$\text{बाहरी खूंटियों पर प्रवणता} = \frac{R_c \times l^2}{16\, EI}$$

y = [प्रलंबी भाग की लंबाई × बाह्य खूंटी पर प्रवणता + $\frac{1}{2}$ (इस्पात पट्टी की मोटाई + खूंटी का व्यास]

$$y = \left(40 - \frac{l}{2}\right) \frac{R_c\, l^2}{16\, EI} + \frac{1}{2} \times 0.75 = 0.75$$

$$\text{अथवा } \left(40 - \frac{l}{2}\right) \times \frac{l^2}{16EI} \times \frac{36EI}{l^3} = \frac{0.75}{2}$$

$$\text{अथव } \left(40 - \frac{l}{2}\right) \times \frac{9}{4l} = \frac{3}{8}$$

$$l = 60 \text{ cm}$$

$$R_c = \frac{36 \times 20 \times 10^5 \times 2 \times (\frac{1}{4})^3}{(60)^2 \times 12} = 8.68\text{ N}$$

$$R_A = R_B = \frac{8.68}{2} = 4.34\text{ N}$$

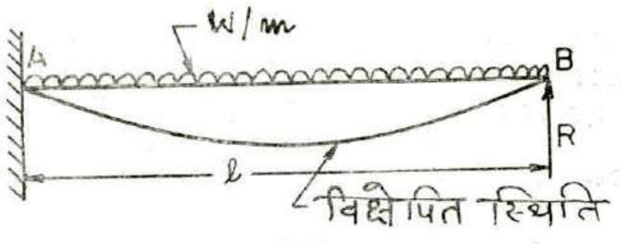
6.7 अपरूपण के कारण विक्षेप

पूर्व वर्णनों में धरन में विशुद्ध बंकन के कारण उत्पन्न विक्षेप पर ही ध्यान दिया गया है। परन्तु अनुप्रस्थ दिशा में लग रहे अपरूपण बल के कारण भी धरन में विक्षेप होता है। अधिकांश परिस्थितियों में इस अपरूपण बल के कारण उत्पन्न धरन में विक्षेप बंकन की अपेक्षा नगण्य होता है।

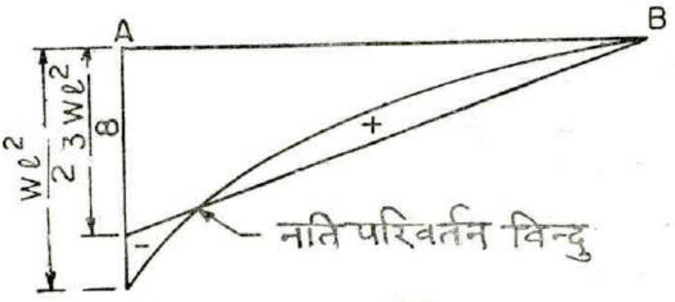
6.8 टेक लगे प्रास धरन

ऐसा धरन, जो कि एक सिरे पर बद्ध हो तथा मुक्त सिरे अथवा दोनों सिरों के मध्य किसी भी बिन्दु पर सरल आधारित हो, टेक लगा प्रास धरन कहलाता है।

(अ) एक समान बंटित भार तथा सिरे पर टिका होने पर :--



(अ)



(ब)

चित्र 6.21

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2}\ (l-x)^2 - R\,(l-x)$$

$$E1\ \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2}\left[\ l^2x + \frac{x^3}{3} - lx^2\right] - Rlx + \frac{Rx^2}{2} + C_1$$

$x = o$ होने पर $\frac{dy}{dx} = o$ अतः $C_1 = O$

$$EI\ y = \frac{\omega}{2}\left[\frac{l^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{3}\right] - \frac{Rlx^2}{2} + \frac{Rx^3}{6} + C_2$$

$x = o$ होने पर, $y = o$ तथा $C^2 = o$

यदि टेक सुदृढ़ है तथा उसी समतल में रहता है जिसमें बिना भारण के दंड रहता है तब $x = l$ होने पर $y = o$

$$O = \frac{w}{2}\left[\frac{l^4}{2} + \frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{3}\right] - \frac{Rl^3}{2} + \frac{Rl^3}{6}$$

अथवा $R = \frac{3}{8}\ wl$

प्रतिक्रिया बल R का मान, मुक्त सिरे पर R तथा एक समान बंटित भार के कारण प्राप्त विक्षेपों को अध्यारोपित कर सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है । एक समान बंटित भार के कारण मुक्त सिरे पर नीचे की दिशा में विक्षेप $= \frac{wl^4}{8EI}$ प्रतिक्रिया बल R के कारण ऊपर की दिशा में विक्षेप $= \frac{Rl^3}{3EI}$

$\frac{Rl^3}{8EI} = \frac{wl^4}{3EI}$; अथवा $R = \frac{3}{8}\ wl$

$$EI\ \frac{dy}{dx} = \frac{w}{2}\left[\ l^2x + \frac{x^3}{3} - lx^2\right] - \frac{3}{8}\ wl\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \quad \ldots(6.31)$$

$$EI\ y = \frac{w}{2}\left[\frac{l^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{3}\right] - \frac{3}{8}\ wl\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad \ldots(6.32)$$

समीकरण (6.31) में $x = l$ रखने पर

मुक्त सिरे पर $\theta = -\ \frac{1}{48}\ \frac{wl^3}{EI}$

समीकरण (6.32) में $x = l/2$

मध्य विस्तृति पर $y = \frac{wl^4}{192EI}$

समीकरणों (6.31) तथा (6.32) की सहायता से अधिकतम विक्षेप का मान तथा स्थिति ज्ञात की जा सकती है ।

बद्ध सिरे से x की दूरी पर किसी परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण

$$Mx = -\ \frac{w}{2}\ \left\{\ l^2 + x^2 - 2lx\ \right\} = \frac{3}{8}\ wl\ (l-x) \quad .\ \ .\ (6.33)$$

$$\frac{dMx}{dx} = -\ \frac{w}{2}\ (2x-2l) - \frac{3}{8}\ wl = o$$ (अधिकतम० ब० आ० के लिए)

अथवा $x = \frac{5}{8}\ l$

इस प्रकार बद्ध सिरे से $\frac{5}{8}\ l$ की दूरी पर अधिकतम विक्षेप होगा तथा इसका मान समीकरण (6.33) में $x = 5/8\ 1$ रख कर प्राप्त किया जा सकता है ।

धनात्मक अधिकतम बंकन बल आघूर्ण $= \frac{9}{128}\ wl^2$

यह बीजीय अधिकतम बंकन बल आघूर्ण होगा क्योंकि ऋणात्मक बंकन बल आघूर्ण (अधिकतम) बद्ध सिरों पर होता है तथा इसका मान $\frac{wl^2}{8}$ है ।

बंकन बल आघूर्ण आरेख समीकरण (6. 33) की सहायता से अथवा अध्यारोपण विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है जैसा कि चित्र 6. 21 (ब) में दिखाया गया है ।

दिशा परिवर्तन बिन्दु बद्ध सिरे से $\frac{3}{4}l$ की दूरी पर होगा ।

उदाहरण 6. 16 : एक 10m लंबे तथा मुक्त सिरे पर दृढ टेक पर आधारित धरन पर लगने वाले उस एक समान बंटित भार का मान ज्ञात कीजिए जिसके कारण उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल 1000 N/cm² है । तथा केंद्रीय विक्षेप 1. 5 cm से अधिक न हो । धरन परिच्छेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण 80000 cm⁴ है । $E = 12 \times 10^5$ N/cm² तथा धरन की मोटाई 40 cm है ।

हल :

ऋणात्मक अधिकतम बंकन बल आघूर्ण बद्ध सिरे पर होगा तथा इसका मान $\frac{wl^2}{8}$ होगा ।

$$\frac{w \times (1000)^2 \times 20}{8 \times 80000} = 1000$$

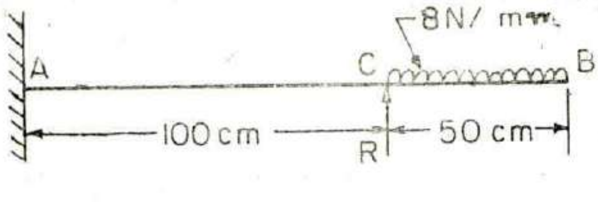
अथवा $w = 32$ N/cm

मध्य विस्तृति पर $y = 1.5 = \frac{w \times 10^{12}}{192 \times 80000 \times 12 \times 10^5}$

अथवा $w = 27.5$ N/cm

अतः निरापद भार का मान 27.5 N/cm

उदाहरण 6. 17 : चित्र (6. 22) में दिखाये गये टेक लगे प्रास धरन के लिए R तथा अधिकतम ऋणात्मक एवं घनात्मक बंकन बल आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिए ।



चित्र 6. 22

धरन के भाग AC पर दो 80 N/cm के समान परन्तु विपरीत दिशा में भार लगाइये । समीकरण (6. 13) से संपूर्ण विस्तृति पर एक समान बंटित भार के कारण C पर नीचे की ओर विक्षेप —

$$y = \frac{80 \times 10^8}{EI} \left[\frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1.5}{6} \quad \frac{1}{24} \right] = \frac{17}{48EI} \times 80 \times 10^8$$

भाग AC पर ऊपर की दिशा में लग रहे एक समान बंटित भार के कारण C पर ऊपर की दिशा में विक्षेप :—

$$\frac{wa^2}{8EI} \qquad \frac{80 \times 10^8}{8EI}$$

टेक प्रतिक्रिया बल (ऊपर की दिशा में) के कारण बिन्दु C पर विक्षेप

$$y = \frac{R \times (100)^3}{3\ EI}$$

C पर कुल विक्षेप = O

$$0 = \frac{17}{48EI} \times 80 \times 10^8 - \frac{80 \times 10^8}{8EI} - \frac{R \times 100^3}{3EI}$$

अथवा $R = \frac{3 \times 800 \times 11}{48} = 5500$ N

अधिकतम ऋणात्मक बंकन बल आघूर्ण C पर लगेगा

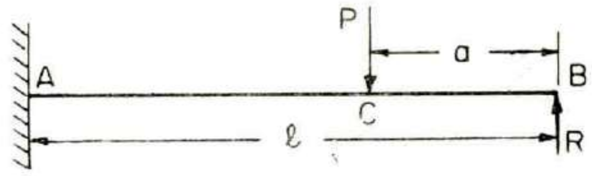
$$= \frac{80 \times 50 \times 50}{2} = 100000 \text{ N.cm}$$

C से **x** की दूरी पर C एवं A के मध्य बं० ब० आ०

$= -80 \times 50\ (x+25) + 55000 \times x$

यह बद्ध सिरे पर अधिकतम घनात्मक बंकन बल आघूर्ण देगा जिसका मान $= 80 \times 50 \times 125 + 5500 \times 100 = 50000$ N.cm

(ब) मुक्त सिरे पर टिके प्रास के किसी अन्य परिच्छेद पर संकेंद्री भार लगने पर —



चित्र 6.23

भार P के कारण B पर विक्षेप

$$= \frac{Rl^3}{3EI}$$

$$\text{अतः } \frac{P(l-a)^3}{3EI} + \frac{P(l-a)^2 \times a}{2EI} = \frac{Rl^3}{3EI}$$

$$\text{अतः } R = \frac{P(2l+a)\,(l-a)^2}{2l^3}$$

अधिकतम घनात्मक बंकन बल आघूर्ण विन्दु C पर होगा तथा इसका मान Rxa होगा। यदि a = o हो अर्थात् भार टेक के ऊपर ही लग रहा हो तब R=P होगा तथा संपूर्ण प्रास बंकन बल आघूर्ण मुक्त होगा।

उदाहरण 6.18 : एक प्रास धरन के, जिसकी लंबाई l है, मुक्त सिरे पर भार P लग रहा है तथा यह इसी सिरे से $\frac{1}{4}$ की दूरी पर टेक पर आधारित है। अतः टेक पर प्रतिक्रिया बल तथा धरन पर लग रहे अधिकतम घनात्मक एवं ऋणात्मक बंकन बल आघूर्ण का मान बताइये। बं० ब० आ० आरेख तथा अ० ब० आरेख भी बनाइये।

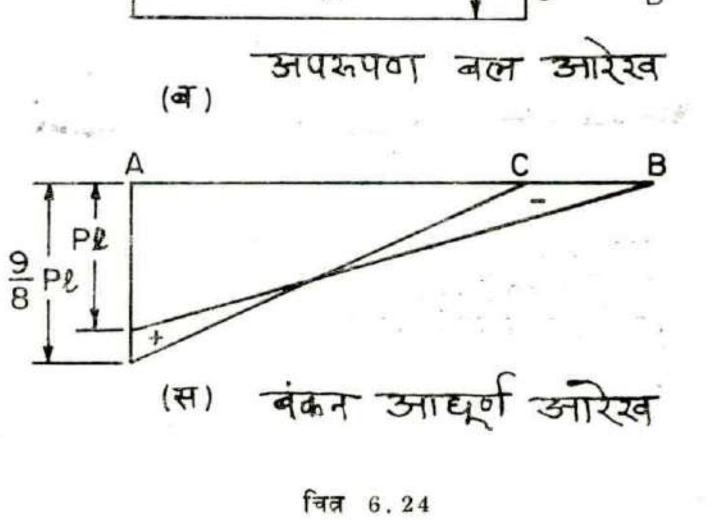
हल :

समीकरण (6.11) द्वारा P के कारण C पर विक्षेप

$$= \frac{Pl(\frac{3}{4}l)^2}{2EI} - \frac{P}{6EI}(\frac{3}{4}l)^3$$

$$= \frac{27Pl^3}{128EI} \text{ (नीचे की दिशा में)}$$

R के कारण C पर ऊपर की दिशा में विक्षेप



चित्र 6.24

$$= \frac{Rx(\frac{3}{4}l)^3}{3EI} = \frac{9Rl^3}{64EI}$$

$$\frac{27Pl^3}{128EI} = \frac{9Rl^3}{64EI}\text{; अथवा } R = \frac{3P}{2}$$

अधिकतम ऋणात्मक बंकन बल आघूर्ण C पर होता है $= \frac{Pl}{4}$

अधिकतम घनात्मक बंकन बल आघूर्ण A पर होगा $= -Pl + \frac{9}{8}Pl = \frac{lP}{8}$

उदाहरण 6.19 : एक l लंबाई के प्रास धरन के मुक्त सिरे पर वामावर्ती बल-युग्म लगाया गया है। वह मुक्त सिरे से $\frac{l}{5}$ की दूरी पर एक दृढ़ टेक पर आधारित है। अतः टेक पर प्रतिक्रिया बल तथा अधिकतम घनात्मक एवं ऋणात्मक बंकन बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।

हल :

टेक वाले परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण M के कारण नीचे की दिशा में विक्षेप

$$= \frac{M}{2EI}\left(\frac{4}{5}l\right)^2$$

टेक वाले परिच्छेद पर इसके प्रतिक्रिया बल के कारण ऊपर की दिशा में विक्षेप

$$= \frac{R}{3EI}\left(\frac{4}{5}1\right)^3$$

अथवा $R = \frac{15M}{81}$

अधिकतम घनात्मक बंकन बल आघूर्ण मुक्त सिरे पर M के बराबर होगा।

अधिकतम ऋणात्मक बंकन बल आघूर्ण बद्ध सिरे पर होगा तथा इसका मान

$$= M - Rx\left(\frac{4}{5}\times 1\right) = M - \frac{15}{8} \times \frac{M}{1} \times \frac{41}{5}$$

$$= M - \frac{3M}{2} = -\frac{M}{2}$$

(स) धंसने वाले तथा प्रत्यास्थ टेक :—

यदि टेक धंसता है अथवा इसका पराभव होता है तब टेक वाले सिरे पर विक्षेप शून्य नहीं होगा अपितु यह धसाँव अथवा पराभव के बराबर होगा।

उदाहरण 6.20 : एक प्रास धरन पर जिसकी लंबाई l है मुक्त सिरे पर भार P लगाया गया है। प्रास इसी सिरे पर एक प्रत्यास्थ टेक पर भी आधारित है जिसका धसाँव भार P के समानुपाती है। यदि टेक का प्रतिक्रिया बल भार P का आधा हो तो धसाँव के लिए समानुपाती स्थिरांक K का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

चूंकि टेक प्रतिक्रिया बल $\frac{P}{2}$ है

अतः टेक का धंसाव $= \frac{KP}{2}$

भार P के कारण मुक्त सिरे पर नीचे की दिशा में विक्षेप

$$= \frac{Pl^3}{3EI}$$

मुक्त सिरे पर प्रतिक्रिया बल $\frac{P}{2}$ के कारण ऊपर की दिशा में विक्षेप

$$= \frac{Pl^3}{6EI}$$

अतः $\frac{Pl^3}{3EI} - \frac{Pl3}{6EI} = \frac{KP}{2}$

अथवा $K = \frac{l^3}{3EI}$

6.9 सरल आधारित टेक लगे धरन

एक सरल आधारित धरन पर ध्यान दीजिए। इसकी संपूर्ण लंबाई पर w प्रति एकांक लंबाई का भार लग रहा है तथा यह मध्य विस्तृति पर एक दृढ़ टेक पर टिका है। यदि एक समान बंटित भार के कारण नीचे की दिशा में उत्पन्न विक्षेप को टेक के प्रतिक्रिया बल के कारण उत्पन्न ऊपर की दिशा के विक्षेप के बराबर कर दिया जाय ।

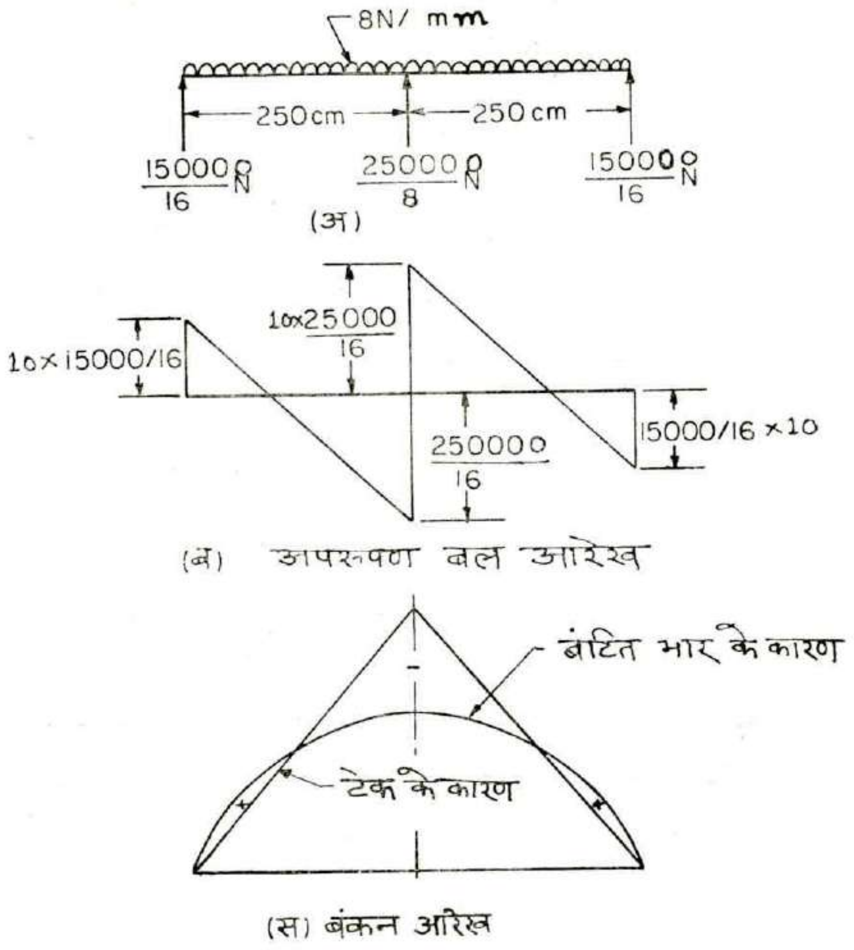
$$\frac{R \times l^3}{48EI} = \frac{5wl^4}{384EI}$$

अथवा $R = \frac{5}{8}\,wl$

सममिति द्वारा दोनों सिरों पर प्रतिक्रिया बल

$$= \frac{1}{2}\left\{wl - \frac{5}{8}\,wl\right\} = \frac{3}{16}\,wl$$

उदाहरण 6.21 : एक गर्डर पर, जिसकी लंबाई 500 cm है, 50000 N का एक समान बंटित भार लग रहा है। यह सिरों पर सरल आधारित तथा मध्य में उसी समतल में टेक पर आधारित है। अतः टेक प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए तथा इसके अपरूपण बल एवं बंकन बल आघूर्ण आरेख भी खींचिए ।



चित्र 6.25

यदि टेक, सिरों की अपेक्षा मुक्त अवस्था में प्राप्त विक्षेप के आधे के बराबर धंसे तो टेक एवं सिरों पर प्रतिक्रिया बल के मान बताइये ।

हल :

टेक प्रतिक्रिया बल $= 5/8\ wl = 5/8 \times 50000$

$$= \frac{25,0000}{8}\ \text{N}$$

सममिति के द्वारा प्रत्येक सिरे पर प्रतिक्रिया बल

$$\frac{3}{16} \times 50000 = \frac{150000}{16}\ \text{N}$$

चित्र (6.25) (ब) तथा (स) में अपरूपण बल एवं बंकन बल आघूर्ण आरेख दिखाए गए हैं ।

एक समान बंटित भार के कारण, मध्य विस्तृति पर बंकन बल आघूर्ण

$$= \frac{wl^2}{8} = \frac{50000 \times 500}{8} = \frac{25 \times 10^6}{8}\ \text{N-cm}$$

केवल R के कारण धरन के मध्य पर बंकन बल आघूर्ण

$$= -\frac{Rl}{4} = \frac{25,0000}{8} \times \frac{500}{4} = \frac{125 \times 10^6}{32}\ \text{N-cm}$$

मध्य में परिणामी बंकन बल आघूर्ण

$$= \frac{25 \times 10^6}{8} - \frac{125 \times 10^6}{32} = \frac{25 \times 10^6}{8}\ (1 - 5/4)$$

$$= -\frac{25 \times 10^6}{8 \times 4}\ \text{N-cm}$$

यदि टेक $\frac{1}{2} \times \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI}$ के बराबर धँस जाता तो टेक प्रतिक्रिया बल का मान इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है ।

$$\frac{Rl^3}{48EI} = \frac{5}{384}\ \frac{wl^4}{EI} - \tfrac{1}{2} \times \frac{5}{384}\ \frac{wl^4}{EI}$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \frac{5}{384} \times \frac{wl^4}{EI}$$

अथवा $R = \frac{5}{16}\ wl = \frac{5}{16} \times 50000 = \frac{25,0000}{16}\ \text{N}$

सिरों पर प्रतिक्रिया बल $= \tfrac{1}{2} \left\{ 50000 - \frac{250000}{16} \right\}$

$$= \frac{55,0000}{32}\ \text{N}$$

उदाहरण 6.22 : एक धरन जिसकी लंबाई l है तीन स्थानों पर आधारित है, दो आधार इसके सिरों पर हैं तथा तीसरा इसके मध्य में है। धरन पर w प्रति एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लग रहा है। यह बताइये कि मध्य में स्थित आधार दोनों सिरों के आधार से कितना नीचा रखा जाय जिससे तीनों आधारों के प्रतिक्रिया बल एक समान हों।

हल :

प्रत्येक आधार पर प्रतिक्रिया बल $= \dfrac{wl}{3}$

मध्य पर एक समान बंटित भार के कारण नीचे की दिशा में विक्षेप $= \dfrac{5wl^4}{384EI}$

टेक प्रतिक्रिया बल के कारण धरन के मध्य पर ऊपर की दिशा में विक्षेप

$$= \frac{wl}{3} \times \frac{l3}{38EI} = \frac{wl^4}{144EI}$$

मध्य वाले टेक का धँसाव

$$\frac{5wl^4}{384EI} - \frac{wl^4}{144EI} = \frac{7wl^4}{1,152\ I}$$

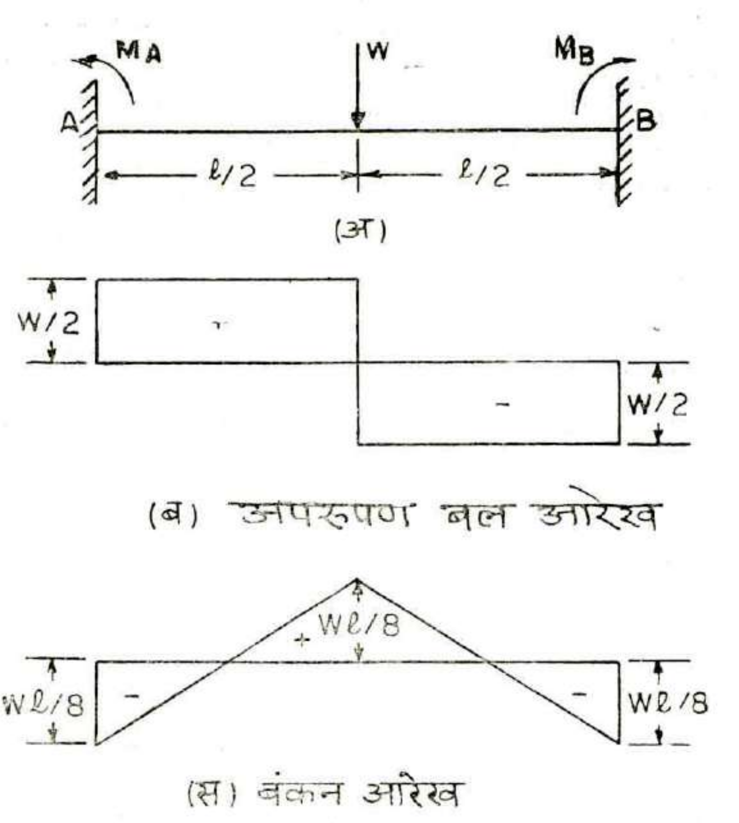
6.10 बद्ध धरन

इस प्रकार के धरन में प्रास धरन के बद्ध सिरे के समान दोनों सिरे बद्ध होते हैं तथा सिरों पर किसी प्रकार घूर्णन संभव नहीं होता। यह चिना हुआ अथवा जड़ा हुआ धरन भी कहलाता है। परन्तु यह मान लिया जाता है कि धरन अनुदैर्ध्य दिशा में खिसक सकता है जिससे कि विक्षेप हो सके।

सरल आधारित धरन में सिरों पर प्रवणता शून्य नहीं होती है। अतः बद्ध धरन के समान शून्य प्रवणता प्राप्त करने के लिए इसके सिरों पर बलयुग्म लगाये जाने चाहिए।

अतः बद्ध धरन एक उस सरल आधारित धरन के ही तुल्य माना जा सकता है जिस पर सिरों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया बल के अतिरिक्त बलयुग्म भी लग रहे हों।

नीचे की दिशा में लगने वाले ऊर्ध्वाधर भार लगने पर ये बलयुग्म बायें तथा दाहिने सिरे पर क्रमशः वामावर्ती तथा दक्षिणावर्ती होंगे जैसा कि चित्र (6.26) में दिखाया गया है।



चित्र 6.26

(अ) धरन के मध्य विस्तृति पर संकेंद्री भार लगने पर :—

सममिति द्वारा प्रत्येक प्रतिक्रिया बल का मान $\frac{W}{2}$ होगा। A से X की दूरी पर किसी परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण

$$M_x = \frac{Wx}{2} - M_A \quad (x \text{ का मान } l/2 \text{ से कम होने पर})$$

अथवा $$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Wx}{2} + M_A$$

अथवा $$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{Wx^2}{4} + M_A \times X + C_1 \quad \ldots \quad (6.34)$$

$\frac{d_y}{d_x} = 0; X = 0$ होने पर अतः $C_1 = 0$

अथवा $EI.\ y = -\frac{W_x 3}{12} + M_A \frac{x2}{2} + C_2$

$x = 0$ होने पर $y = 0$ अतः $C_2 = 0$

अथवा $EI\ y = -\frac{Wx^3}{12} + M_A \frac{x^2}{2}$ . . . . (6.35)

$x = \frac{l}{2}$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

समीकरण (6.34), मे $M_A = \frac{Wl}{8} = M_B$ (ऋणात्मक) ऐसा सममिति के कारण है ।

M_A तथा M_B के मान जो बराबर हैं एक अन्य विधि से भी प्राप्त किए जा सकते हैं । चूंकि आधार पर प्रवणता $\theta_A = \theta_B = 0$ है तथा $\theta_A - \theta_B = 0$ । अतः A एवं B के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का नेट क्षेत्रफल शून्य होना चाहिए ।

अतः $-M_A \times l + \frac{Wl}{4} \times \frac{l}{2} = 0$

अथवा $M_A = \frac{Wl}{8}$ (ऋणात्मक)

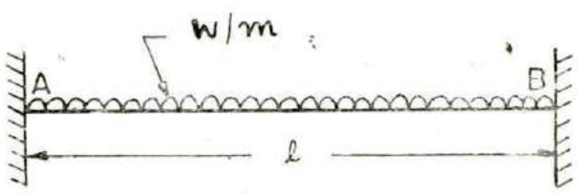
बंकन बल आघूर्ण तथा अपरूपण बल आरेख चित्र (6.26) में दिखाये गए हैं ।

समीकरण (6.35) से मध्य विस्तृति पर

$$y_{\text{अधि}} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{W}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{Wl}{8} \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}\right] = \frac{Wl^3}{192EI}$$

अथवा सरल आधारित धरन का $\frac{1}{4}$

(ब) एक समान बंटित भार लगने पर



चित्र 6.27

सममिति द्वारा प्रत्येक प्रतिक्रिया बल $\frac{wl}{2}$ होगा तथा सिरों पर लग रहे बलयुग्म भी बराबर होंगे । सिरा A से दूरी X पर किसी परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण

$$M = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - M_A$$

$$\text{अतः } EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wlx}{2} + \frac{wx^2}{2} + M_A$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{wlx^2}{4} + \frac{wx^3}{6} + M_A x + C_1$$

$\frac{dy}{dx} = o$; $x = o$ होने पर अतः $C_1 = o$

अतः $EI.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{wlx^2}{4} + \frac{wx^3}{6} + M_A x$ . . . . (6.36)

$$EI.\ y = -\frac{wlx^3}{12} + \frac{wx^4}{24} + \frac{M_A x^2}{2} + C_2$$

$x = o$ होने पर $y = o$, अतः $C_2 = o$

अतः $EI.\ y = -\frac{wlx^3}{12} + \frac{wx^4}{24} + \frac{M_A x^2}{2}$ . . . . . . (6.37)

M_A का मान समीकरण (6.36) से $x = l/_2$ पर $\frac{dy}{dx} = o$ रख कर अथवा सममिति द्वारा समीकरण (6.37) में $x = l$ पर $y = o$ रख कर प्राप्त किया जा सकता है ।

$$M_A = \frac{wl^2}{12}$$

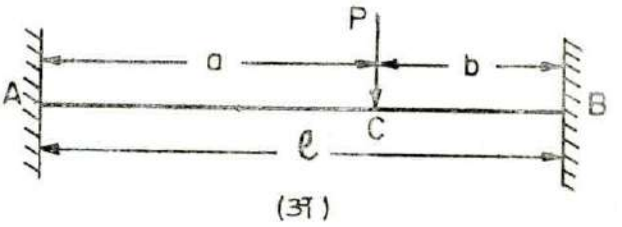
मध्य विस्तृति पर अधिकतम विक्षेप समीकरण (6.37) द्वारा प्राप्त किया जा सकता है ।

$$y_{\text{अधि}} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{wl}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{w(l/2)^4}{24} + \frac{wl^2}{12} \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}\right]$$

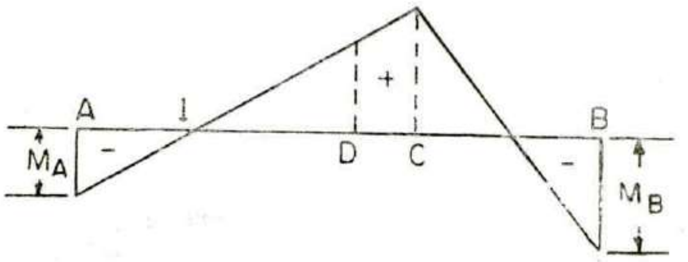
$= \frac{wl^4}{384\ EI}$ अथवा सरल आधारित धरन के मान का $\frac{1}{5}$ सिरों को बद्ध करने अथवा सिरों पर स्थायक बलयुग्मों के प्रभाव के कारण धरन में अधिकतम बंकन बल आघूर्ण का मान घट जाता है एवं संपूर्ण धरन में प्रवणता तथा विक्षेप का मान

भी कम हो जाता है । अतः बद्ध सिरों वाला धरन सरल आधारित धरन की अपेक्षा अधिक दृढ़ तथा मजबूत होता है ।

उदाहरण 6.23 : एक बद्ध धरन पर जिसकी विस्तृति l है दोनों सिरों से a तथा b की दूरी पर एक संकेंद्री भार P लगाया गया है । इसके सिरे के आघूर्ण, प्रतिक्रिया बल, अधिकतम एवं मध्य विस्तृति पर विक्षेप ज्ञात कीजिए । अपरूपण बल तथा बंकन बल आघूर्ण आरेख भी खींचिए ।



(अ)



(ब) बंकन आरेख

चित्र 6.28

हल :

मान लीजिए कि M_A M_B एवं R_A, R_B क्रमशः सिरा A तथा B पर बंकन बल आघूर्ण तथा प्रतिक्रिया बल को व्यक्त करते हैं ।

बायें सिरे से x की दूरी पर किसी परिच्छेद पर बंकन बल आघूण =

$$R_A x - M_A - P\left\{ x - a \right\}$$

(मैकाले विधि का प्रयोग करने पर)

$$EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = -R_A x + M_A + P\left\{x - a\right\}$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -R_A\frac{x^2}{2} + M_A x + \frac{P}{2}\left\{x - a\right\}^2 + C_1$$

$x = 0$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$ अतः $C_1 = 0$

$x = l$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = -R_A\frac{l^2}{2} + M_A l + \frac{P}{2}(l - a)^2$$

अथवा $R_A = 2\frac{M_A}{l} + \frac{Pb^2}{l^2}$ . . . . (6.38)

$$EI.\ y = -\frac{R_A x^3}{6} + \frac{M_A x^2}{2} + \frac{P}{6}\left\{x - a\right\}^3 + C_2$$

$x = 0$ तथा $x = l$ होने पर $y = 0$ अतः $C_2 = 0$

एवं $0 = -\frac{R_A l^3}{6} + M_A\frac{l^2}{2} + \frac{P}{6}\left\{l - a\right\}^3$

अथवा $R_A = \frac{3M_A}{l} + \frac{Pb^3}{l^3}$ . . . . (6.39)

समीकरणों (6.38) तथा (6.39) द्वारा

$$\frac{2M_A}{l} + \frac{Pb^2}{l^2} = \frac{3M_A}{l} + \frac{Pb^3}{l^3}$$

अथवा $M_A = \frac{Pab^2}{l^2}$

समीकरण (6.39) से

$$R_A = \frac{3Pab^2}{l^3} + \frac{Pb^3}{l^3} = \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b)$$

सममिति द्वारा a एवं b के स्थानीय मानों को बदलने पर

$$M_B = \frac{Pa^2 b}{l^3} \text{ तथा } R_B = \frac{Pa^2}{l^3}(3b + a)$$

अब A तथा B के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का नेट क्षेत्रफल शून्य होगा ।

$$\text{अतः} \ -(M_A + M_B) \times \frac{l}{2} + \frac{Pab}{l}\,\frac{l}{2} = 0$$

$$\text{अथवा} \quad M_A + M_B = \frac{Pab}{l} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6.40)$$

चूंकि आधार पर विक्षेप का मान शून्य है । अतः समुचित बीजीय चिन्हों को ध्यान में रखते हुए A अथवा B के सापेक्ष बंकन बल आघूर्ण आरेख क्षेत्रफल का आघूर्ण शून्य होना चाहिए ।

A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$\frac{M_A l^2}{2} + \frac{(M_b - M_a)}{2} \times \frac{2l \times l}{3} = \frac{Pab}{l} \times \frac{a}{2} \times \frac{2a}{3}$$

$$+ \frac{Pab}{l} \times \frac{b}{2} \times \left(a + \frac{b}{3}\right)$$

$$\text{अथवा} \quad M_A + 2M_B = \frac{Pab}{l^2}(2a + b) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6.41)$$

समीकरणों (6 40) तथा (6.41) से

$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \quad \text{तथा} \quad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

प्रतिक्रिया बलों को प्राप्त करने के लिए B के सापेक्ष सभी बलों के आघूर्ण तथा बल-युग्मों पर ध्यान दीजिए ।

$$R_A \times l + M_B = M_A + P \times b$$

$$R_A \times l = \frac{Pab^2}{l^2} - \frac{Pa^2b}{l^2} + Pb$$

$$\text{अथवा} \quad R_A = \frac{Pb}{l^3}\left[a\,b - b^2 + l^2\right]$$

$$= \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b) \ \text{यदि} \ l = (a + b) \ \text{रखा जाए}$$

$$\text{इसी प्रकार} \quad R_B = \frac{Pa^2}{l^3}(3b + a)$$

$$x = 0 \ \text{तथा} \ x = 10 \ \text{होने पर} \ \frac{dy}{dx} = 0 \ \text{अतः} \ C_1 = 0$$

$$\text{तथा} \ 0 = -R_A \times \frac{(10)^2}{2} + M_A \times 10 + \frac{w \times 10^3}{6} + \frac{w}{6}5^3$$

$$\text{अथवा} \ 50R_A = 10M_A + w\frac{(10)^3}{6} + w\frac{(5)^3}{6} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6.46)$$

$$EI.\,y = -R_A\frac{x^3}{6} + M_A\frac{x^2}{2} + \frac{wx^4}{24} + \frac{w}{24}\left\{x - 5\right\}^4 + C_2$$

$$x = 0 \ \text{तथा} \ x = 10 \ \text{होने पर} \ y = 0 \ \text{अतः} \ C_2 = 0$$

$$\text{तथा} \ 0 = -R_A\frac{(10)^3}{6} + M_A\frac{(10)^2}{2} + w\frac{(10)^4}{24} + \frac{w(5)^4}{24}$$

$$\frac{10000}{6}R_A = 50M_A + \frac{w}{24}(10)^4 + \frac{w}{24}(5)^4 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6.47)$$

M_A का लुप्तीकरण करने के लिए समीकरण (6.46) के पदों को 5 से गुणा कीजिए तथा समीकरण (6.47) के पदों को उसमें से घटाइये ।

$$\frac{50}{6}R_A = \frac{w}{6}(10)^3 \times 5\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{w}{6}(5)^4\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{10000 \times 5 \times 10^3}{6} \times \frac{1}{2} - \frac{10000}{6} \times (5)^4 \times \frac{3}{4}$$

$$R_A = 4{,}0625 \ N$$

$$R_B = 50000 - 40626 = 9375 \ N$$

समीकरण (6.46) अथवा (6.47) में $R_A = 40625$ रखने पर

$$M_A = -5{,}7290 \ N\text{-}m$$

बंकन बल आघूर्ण व्यंजक द्वारा

$$M_B = R_A \times 10 - 57290 - \frac{10000 \times 10^2}{2} - \frac{10000}{2}(10 - 5)^2$$

$$= 40625 \times 10 - 5{,}7290 - \frac{10000 \times 10^2}{2} - \frac{10000}{2}(10 - 5)^2$$

$$= -26040 \ N\text{-}m$$

मध्य विस्तृति पर संकेंद्री भार के कारण

$$R_A = R_B = \frac{10,0000}{2} = 50000 \text{ N}$$

अतः कुल $R_A = 40625 + 50000 = 9,0625$ N

कुल $R_B = 9375 + 5,0000 = 59375$ N

मध्य विस्तृति पर संकेंद्री भार के कारण

$$M_A = M_B = \frac{Pl}{8} = \frac{10,0000 \times 10}{8} = -12,500 \text{ N-m}$$

कुल $M_A = -5,7290 - 12,5000 = -18,2290$ N-m

कुल $M_B = -2,6040 - 12,5000 = -15,1040$ N-m

उदाहरण 6.25 : एक 12m विस्तृति का गर्डर सिरों पर पूर्ण रूप से बद्ध है। गर्डर के सिरा A से 4m की दूरी पर एक समान ऊध्वाधर नीचे की दिशा में लगने वाला 120000 N का भार लग रहा है तथा दाहिने सिरे B से 6m की दूरी पर 80000 N का ऊर्ध्वाधर भार ऊपर की दिशा में लग रहा है। सिरों पर प्रतिक्रिया बल एवं बद्ध करने वाले बलयुग्मों का मान बताइये।

(लं० वि० वि०)

हल :

ऊपरी ऊध्वाधर भार के कारण

$$R_A = R_B = -4,0000 \text{ N}$$

बायें सिरे पर नीचे की दिशा में ऊर्ध्वाधर भार के कारण

$$R_A = \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b)$$

$$= \frac{12,0000 \times (8)^2}{(12)^3}(12 + 8) = \frac{80,0000}{9} \text{ N}$$

दाहिने सिरे पर $R_B = 12,0000 - \dfrac{80,0000}{9} = \dfrac{28,0000}{9}$ N

जाँच करने के लिए $R_B = \dfrac{Pa^2}{l^3}(3b + a) = \dfrac{12,0000 \times (4)^2}{12^3}(24 + 4)$

$$= \frac{28,0000}{9} \text{ N}$$

नेट $R_A = \dfrac{80,0000}{9} - 4,0000 = \dfrac{44,0000}{9}$ N

नेट $R_B = \dfrac{28,0000}{9} - 4,0000 = -\dfrac{80000}{9}$ N

ऊपर की दिशा में लगने वाले ऊर्ध्वाधर भार के कारण

$$M_A = M_B = \frac{8,0000 \times 12}{8} = 12,0000 \text{ N-m}$$

नीचे की दिशा में लग रहे भार के कारण

$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} = \frac{12,0000 \times 4 \times (8)^2}{(12)^2} = -\frac{64,0000}{3} \text{ N-m}$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{12,0000 \times 8 \times (4)^2}{(12)^2} = -\frac{32,0000}{3} \text{ N-m}$$

नेट $M_A = -\dfrac{64,0000}{3} + 12,0000 = -\dfrac{28,0000}{3}$ N-m

नेट $M_B = -\dfrac{32,0000}{3} + 12,0000 = -\dfrac{4,0000}{3}$ N-m

उदाहरण 6.26 : चित्र 6.28 (अ) में दिखाए गए धरन के लिए सिरा A पर उस स्थिति में ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया बल तथा प्रतिक्रिया बलयुग्मों को ज्ञात कीजिए जब कि बायें सिरे वाला आधार 'δ' के बराबर धँस जाता है

हल :

यह अभ्यास उसी प्रकार हल किया जा सकता है जैसा कि अभ्यास 6.22 में वर्णन किया गया है।

चित्र 6.28 (ब) को देखिए

$\theta_A = \theta_B = 0$ तथा $\theta_A - \theta_B = 0$

जिसके कारण बिन्दुओं A तथा B के मध्य बंकन बल आघूर्ण आरेख का नेट क्षेत्रफल शून्य प्राप्त होता है

अतः $-(M_A + M_B) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{Pab}{2} \quad \dfrac{1}{2} = 0$

अथवा $M_A + M_B = \dfrac{Pab}{l}$ . . . . (6.48)

क्योंकि बिन्दु B के सापेक्ष बिन्दु A का विक्षेप δ है। अतः यदि समुचित बीजीय चिन्हों को ध्यान में रखा जाय तो A के सापेक्ष बंकन बल आघूर्ण आरेख के क्षेत्र के आघूर्ण को EI से भाग देने पर δ प्राप्त होना चाहिए।

अतः A के सापेक्ष आघर्ण लेने पर,

$$\frac{1}{EI}\left[-\frac{M_A\cdot l^2}{2}-\left(\frac{M_B-M_A}{3}\right)\times\frac{2l^2}{3}+\frac{Pab}{1}\times\frac{a}{2}\times\frac{2a}{3}\right.$$
$$\left.+\frac{Pab}{1}\times\frac{b}{2}\left(a+\frac{b}{3}\right)\right)=-\delta$$

अथवा $M_A+2M_B=\dfrac{Pab}{l^2}(2a+b)+\dfrac{6EI.\delta}{l^2}$ . . . (6.49)

समीकरणों (6.48) तथा (6.49) को हल करने पर

$$M_A=\frac{Pab^2}{l^2}-\frac{6EI.\delta}{l^2}$$

बिन्दु B पर लग रहे संपूर्ण आघूर्ण

$$R_A\times l+M_B=M_A+P\times b$$

$$\text{or } R_A\times l=2M_A+\frac{Pb}{l}(l-a)$$

$$=\frac{2Pab^2}{l^2}+\frac{Pb^2}{l}-\frac{12EI.\delta}{l^2}$$

अथवा $R_A=\dfrac{Pb^2}{l^3}(2a+l)-\dfrac{12EI.\delta}{l^2}$

इस अभ्यास को व्यवकलन विधि द्वारा भी हल किया जा सकता है जिसका वर्णन नीचे किया गया है —

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2}=-R_A.x+M_A+P\left\{x-a\right\}$$

$$EI.\frac{dy}{dx}=-R_A\frac{x^2}{2}+M_A.x+\frac{P}{2}\left\{x-a\right\}^2+C_1$$

$x=0$ तथा $x=l$ होने पर $\dfrac{dy}{dx}=0$ रखने पर

$C_1=0$ तथा $R_A=\dfrac{2M_A}{l}+\dfrac{Pb^2}{l^2}$ . . . . . (6.50)

24--23 M. of HRD/ND/95

और व्यवकलन करने पर,

$$EI.y=-R_A\frac{x^3}{6}+\frac{M_A.x^2}{2}+\frac{P}{6}\left\{x-a\right\}^3+C_2$$

$x=0$ होने पर $y=\delta$ तथा $x=l$ होने पर $y=0$

अतः $C_2=EI\delta$ एवं

$$0=-\frac{R_A.l^3}{3}+\frac{M_A.l^2}{2}+\frac{P}{6}\left\{l-a\right\}^3+EI.\delta$$

अथवा $R_A=\dfrac{3M_A}{l}+\dfrac{Pb^3}{l^3}+\dfrac{6EI.\delta}{l^3}$ . . . . (6.51)

समीकरणों (6.50) तथा (6.51) से

$$M_A=\frac{Pab^2}{l^2}-\frac{6EI.\delta}{l^2}$$

तथा $R_A=\dfrac{Pb^2}{l^3}(3a+b)-\dfrac{12EI.\delta}{l^2}$

उदाहरण 6.27 : एक बद्ध सिरों वाले धरन पर जिसकी विस्तृति l है w प्रति एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लग रहा है तथा यह बायें सिरे पर $l/_3$ की दूरी पर टेक पर आधारित है। टेक पर विक्षेप का मान kR है, जब कि k समानुपात स्थिरांक तथा R टेक प्रतिक्रिया बल है। टेक प्रतिक्रिया बल का मान बताइये।

हल :—

समीकरण (6.37) को प्रयोग करते हुए टेक का एक समान बंटित भार के कारण विक्षेप

$$y=\frac{1}{EI}\left[-\frac{wl}{12}\times\left(\frac{l}{3}\right)^3+\frac{w}{4}\left(\frac{l}{3}\right)^4+\frac{wl^2}{12}\times\left(\frac{l}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{wl^4}{486EI}\text{ (नीचे की दिशा में)}$$

अभ्यास (6.23) में प्राप्त किए गये परिणामों का प्रयोग करते हुए टेक पर प्रतिक्रिया बल R के कारण विक्षेप

$$y = R\ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2l}{3}\right)}{3EI.\ l^3} = \frac{8R\ l^3}{2187EI}$$ (ऊपर की दिशा में)

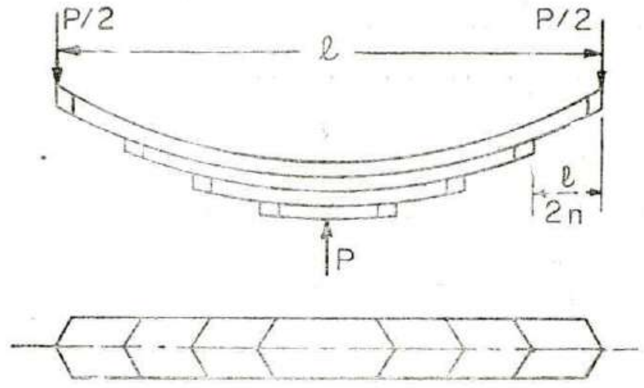
अतः नीचे की दिशा में नेट विक्षेप

$$= \frac{wl^4}{486EI} - \frac{8Rl^3}{2187ER} = kR$$

$$\text{अतः } R = \frac{9wl^4}{(4374EI\ k + 16l^3)}$$

6.11 भार वाहक कमानियाँ

इस प्रकार की कमानियों में कई चपटी मुड़ी हुई इस्पात की पट्टियाँ, जिनको पत्ती भी कहते हैं, होती हैं । इनकी चौड़ाई तथा मोटाई एक समान होती हैं परन्तु लंबाई अलग-अलग होती हैं जैसा कि चित्र (6.30) में दिखाया गया है ।



चित्र 6.30

इसीलिए इनको पटलित अथवा पत्ती कमानियाँ भी कहा जाता है । इनका प्रयोग सामान्यतः भारवाहनों जैसे आटोमोबील अथवा रेल के डिब्बों में किया जाता है । इनको सामान्यतः केंद्र से भारित किया जाता है तथा ये एक सरल आधारित दंड के रूप में मानी जा सकती है । पत्तियों की लंबाई इस प्रकार समयोजित की जाती है कि जैसे-जैसे परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण का मान परिवर्तित होता रहे उसी प्रकार परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण भी बदलता रहे तथा $\frac{M}{I} \times y$ का मान एक समान रहे । प्रत्येक

पत्ती अपने ऊपर की अथवा नीचे की पत्ती के बिना रुकावट के सर्पण कर सकती है तथा सभी पत्तियाँ अपने उदासीन अक्ष के सापेक्ष एक ही वक्रता त्रिज्या बनाती हैं ।

चूंकि तुल्यमान परिच्छेद पर लगने वाला बंकन बल आघूर्ण उसकी सिरा से दूरी का समानुपाती होता है तथा I का मान भी एक समान रूप से बदलता रहता है, अतः यह कमानी एक उस धरन के तुल्य होती है जिसकी सामर्थ्य प्रत्येक परिच्छेद पर एक समान होती है अर्थात् प्रत्येक परिच्छेद पर समान अधिकतम प्रतिबल लगता है । लंबाई में I के मान में एक समान परिवर्तन करने के लिए प्रत्येक पत्ती के सिरे को शंक्वाकार बनाकर सिरा एक नोक के रूप में बना दिया जाता है तथा इसके आगे दूसरी शंक्वाकार पत्ती आरंभ हो जाती है । मध्य विस्तृति पर पत्तियों की संख्या अधिकतम होती हैं तथा बंकन बल आघूर्ण भी यहीं अधिकतम होता है ।

मध्य विस्तृति पर $M = \frac{Pl}{4}$ यदि l कमानी की सर्वांग लंबाई, n मध्य विस्तृति पर पत्तियों की संख्या एवं b तथा t प्रत्येक पत्ती की चौड़ाई तथा मोटाई हो, चूंकि प्रत्येक पत्ती अपने उदासीन अक्ष के सापेक्ष मुड़ती है अतः मध्य विस्तृति पर एक पत्ती द्वारा वहन किया जाने वाला बंकन बल आघूर्ण $= \frac{Pl}{4n}$

$$I = \frac{bt^3}{12},\quad y_c = yt = t/2$$

इन मानों को बंकन सूत्र $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ में रखने पर

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{pl}{4n} \times \frac{12}{bt^3} \times t/2 = \frac{3pl}{2nbt^2} \qquad (6.52)$$

प्रत्येक पत्ती के प्रत्येक परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण $= \frac{Pl}{4n}$

$$EI.\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\ \frac{Pl}{4n}$$

$$EI.\ \frac{dy}{dx} = -\ \frac{Plx}{4n} + C_1\ ;$$

$x = l/2$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$ अतः $C_1 = \frac{Pl^2}{8n}$

$$EI.\ y = -\ \frac{Plx^2}{8n} + \frac{Pl^2x}{8n} + C_2$$

$x = 0$ होने पर $y = 0 \quad C_2 = 0$

$$\text{मध्य विस्तृति पर } y = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pl\left(\frac{l}{2}\right)^2}{8n} + \frac{Pl^2\left(\frac{l}{2}\right)}{8n}\right.$$

$$= \frac{Pl^3}{32nEI}$$

$$\text{प्रत्येक पत्ती का अतिव्यापन} = \frac{l}{2n}$$

उदाहरण 6.28 : एक पटलित इस्पात कमानी जो सिरों पर सरल आधारित है तथा 75 cm के विस्तृति पर मध्य में भारित किया गया है तथा इस पर 7500 N का प्रूफ भार लगाया गया है। यदि मध्य में विक्षेप 5 cm से अधिक न हो तथा बंकन प्रतिबल 40000 N/cm^2 से अधिक न हो तो इस कमानी में पत्तियों की संख्या, उनकी चौड़ाई तथा मोटाई ज्ञात कीजिए तथा यह भी बताइये कि प्रारंभ में पत्तियों किस त्रिज्या तक मोड़ी जाय। चौड़ाई = 12 × मोटाई; तथा $E = 20 \times 10^6\ N/cm^2$

(लं० वि० वि०)

हल :

कमानी को बिल्कुल सीधा कर देने वाले भार को प्रूफ भार कहा जाता है।

$$\text{विक्षेप } y = \frac{3Pl^3}{8nbt^3E}$$

$$5 = \frac{3 \times 750 \times (75)^3}{8n\,(12t)\ t^3 \times 20 \times 10^5}$$

$$nt^4 = 0.9825$$

$$\text{अधिकतम प्रतिबल } \sigma = \frac{2Pl}{2nbt^2}$$

$$4{,}0000 \times \frac{3 \times 755 \times 75}{2n\,(12t)\,t^2}$$

$$nt^3 = 1.76$$

$$t = \frac{0.9825}{1.76} = 0.56 \text{ cm}$$

$$\text{चौड़ाई} = 12 \times 0.56 = 6.72 \text{ cm}$$

$$\text{पत्तियों की संख्या} = \frac{1.76}{(0.56)^3} = 10$$

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

$$R = \frac{EI}{M} = \frac{4EI}{Pl} \text{ तथा } I = \frac{nbt^3}{12}$$

$$\text{अथवा } I = \frac{n \times 12t \times t^3}{12} = nt^4 = 0.9825$$

$$R = \frac{4 \times 20 \times 10^6 \times 0.9825}{7500 \times 75} = 140 \text{ cm}$$

उदाहरण 6.29 : एक भार वाहन कमानी जिसकी लंबाई 100 cm है प्रत्येक सिरे पर सरल आधारित है। इसके बायें सिरे से 30 cm तथा 70 cm की दूरी पर 2000 N के दो भार लग रहे हैं। इसकी प्रत्येक पत्ती 5 cm चौड़ी तथा 0.5 cm मोटी है। इसके प्रत्येक पत्ती की लंबाई तथा उनकी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इसके पदार्थ में 3,0000 N/cm^2 से अधिक प्रतिबल न उत्पन्न हो।

हल :

मध्य विस्तृति पर अधिकतम बंकन बल आघूर्ण

$$= 2000 \times 50 - 2000 \times 20 = 60{,}000 \text{ N. cm}$$

$$n = \frac{60000 \times 6}{3000 \times 5 \times (0.5)^2} = \frac{48}{5} = 9.6 = 10 \text{ (मानिए)}$$

$$\text{सबसे निचली पत्ती की लंबाई} = 40 + \frac{100 - 40}{10}$$

$$= 46 \text{ cm}$$

क्योंकि मध्यवर्ती 40 cm लंबाई पर बंकन बल आघूर्ण का मान एक समान रहेगा अतः शेष लंबाई 10 पत्तियों में समान रूप से बँट जायेगी।

पत्तियों की लंबाई निम्नलिखित होगी :

46, 52, 58, 64, 70, 76, 82, 88, 94 तथा 100 cm।

अभ्यास प्रश्नमाला

1. एक क्षैतिज प्रास धरन पर जिसकी प्रभावी लंबाई 3a है, दो संकेंद्री भार लग रहे हैं। एक भार W है जो बद्ध सिरे से a की दूरी पर लगता है तथा दूसरा W_1 है जो मुक्त सिरे से a की दूरी पर लग रहा है। अतः इस प्रकार के भारण द्वारा उत्पन्न अधिकतम विक्षेप ज्ञात कीजिए।

यदि यह प्रास I-परिच्छेद का 25 cm मोटा तथा 3 m लंबा हो जिसके परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण 8,000 cm^4 हो तो W एवं W_1 का मान बताइये जिससे अधिकतम विक्षेप 0.625 cm तथा अधिकतम बंकन प्रतिबल 10000 N/cm^2 हो।

$$E = 20 \times 10^6\ N/cm^2 \quad \text{(लं० वि० वि०)}$$

$$\left\{ \frac{2a^3}{3EI}(2W + 7W_1) \quad 49330\ N,\ 7330\ N \right\}$$

2. एक सरल आधारित धरन जिसका परिच्छेद एक समान है 2l लंबाई की विस्तृति का है तथा इस पर मध्य बिन्दु के दोनों ओर 1/3 की दूरी पर दो भार W लग रहे हैं। सिद्ध कीजिए कि अधिकतम विक्षेप $\frac{23Wl^3}{81EI}$ है।

3. एक 24 cm मोटा तथा 3 m लंबाई का प्रास धरन विभिन्न प्रकार से भारित किया गया है। इनमें से प्रत्येक के कारण $8 kN/cm^2$ का अधिकतम बंकन प्रतिबल उत्पन्न होता है। अतः संपूर्ण भार का परिमाण तथा मुक्त सिरे पर विक्षेप की मात्रा प्रत्येक भारण स्थिति के लिए ज्ञात कीजिए जो नीचे वर्णन की गई हैं।

(अ) संपूर्ण विस्तृति पर एक समान बंटित भार लगा हो।

(ब) विस्तृति के मध्य पर एक संकेंद्री भार लगा हो।

(स) भार मध्य बिन्दु से लेकर मुक्त सिरे तक एक समान बंटित है।

(द) प्रास दंड के मध्यवर्ती एक तिहाई भाग पर भार एक समान बंटित है।

(क) आधा भार संपूर्ण विस्तृति पर एक समान बंटित रूप से लग रहा है तथा आधा मुक्त सिरे पर संकेंद्री भार के रूप में लग रहा है।

$I = 12,000\ cm^4;\ E = 20 \times 10^6\ N/cm^2$

(अ) 53334 N, 0.75 cm (ब) 53334 N, 0.625 cm

(स) 35480 N, 0.054 cm (द) 53334 N; 0.64 cm

(क) 35480 N; 1.5834 cm

4. एक l लंबाई के धरन पर जिसकी बंकन दृढ़ता समान है, मध्यवर्ती आधे भाग में W प्रति एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लग रहा है। इसके मध्य बिन्दु एवं मुक्त सिरे पर प्रवणता तथा विक्षेप का अनुपात ज्ञात कीजिए।

$$\left(\frac{25}{216},\ \frac{43}{112} \right)$$

5. एक समान परिच्छेद वाला l मी लंबा धरन सिरों पर आधारित है। इसके दाहिने सिरे b की दूरी तक W प्रति एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लग रहा है। b का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे कि अधिकतम विक्षेप भार के बायें छोर पर हो। यदि अधिकतम विक्षेप का मान $\frac{wl^4}{KEI}$ तक सीमित हो तो K का मान ज्ञात कीजिए।

(लं० वि० वि०)

(0.4531; 178.6)

6. एक क्षैतिज धरन l की दूरी पर दो बिन्दुओं पर आधारित है। धरन प्रत्येक आधार से b की दूरी तक प्रलंबी है तथा प्रत्येक सिरे पर एक संकेंद्री भार p लग रहा है। b का मान l के रूप में ज्ञात कीजिए यदि अधिकतम विक्षेप का मान न्यूनतम संभव हो।

(लं० वि० वि०)

(0.317l; 0.221)

7. एक सरल आधारित धरन में जिसकी मोटाई 20 cm है प्रतिबल का मान 12000 N/cm^2 तथा विक्षेप का मान विस्तृति के एक सहस्त्रांश के बराबर सीमित है। इस धरन की विस्तृति ज्ञात कीजिए यदि उपर्युक्त दोनों सीमायें लागू हों तथा धरन पर एक समान बंटित भार लग रहा हो।

$$I = 15,000\ cm^4 \quad \text{तथा} \quad E = 20 \times 00^6/N/cm^2$$

(लं० वि० वि०)

(160 cm; 5625 N/cm)

8. एक सरल आधारित धरन पर एक समान बंटित भार इस प्रकार लगाया गया है कि इसका परिमाण एक सिरे पर W_1 तथा दूसरे सिरे पर W_2 है। यह सिद्ध कीजिए कि मध्य बिन्दु पर विक्षेप का मान वही है जो संपूर्ण भार के एक समान बंटित होने की दशा में प्राप्त होता है।

(लं० वि० वि०)

9. एक l विस्तृति का धरन दो धरनों को सिरे से जोड़ कर प्राप्त किया गया है प्रत्येक की लंबाई l/2 है। एक भाग के परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण दूसरे का दुगुना है तथा धरन सिरों पर सरल आधारित है। धरन की लंबाई पर तीन समान संकेंद्री भार W लग रहे हैं तथा इनके मध्य दूरी l/4 है। अतः इसके मध्य बिन्दु पर विक्षेप ज्ञात करने के लिए सूत्र बताइये।

(लं० वि० वि०)

$$\left(\frac{19}{512},\ \frac{wl^3}{EI}\right)$$

10. एक धरन दो आधारों पर, जो l की दूरी पर है, सरल आधारित है तथा प्रत्येक आधार से l/3 तक प्रलंबी है। इसके आधार के बीच वाले भाग में भार W एक समान बंटित है तथा प्रत्येक सिरे पर W/4 के संकेंद्री भार लग रहे हैं। यदि मध्य बिन्दु पर विक्षेप का मान मुक्त सिरों पर होने वाले विक्षेप के समान हो तो प्रलंबी भाग का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए जब कि मध्य भाग का जड़त्व आघूर्ण I है।

(लं० वि० वि०)

$$\left(\frac{32}{27},\ I\right)$$

11. एक धरन जिसकी लंबाई (l+2a) है l की दूरी पर दो आधारों पर सरल आधारित है तथा प्रत्येक सिरे से a की दूरी तक प्रलंबी है। इसके प्रत्येक सिरे पर संकेंद्री भार W तथा मध्य बिन्दु पर W2 लग रहा है। प्रत्येक भारण बिन्दु पर विक्षेप का मान ज्ञात कीजिए।

(लं० वि० वि०)

$$\left(\frac{Wa^3}{3EI}+\frac{Wa^2l}{2EI}-\frac{Wal^2}{8EI}\right);\ \frac{Wl^2}{\theta EI}\left[\frac{l}{3}-a\right]$$

12. एक सरल आधारित धरन के सिरों पर विपरीत दिशाओं में क्रमशः M_1 तथा M_2 मान के बलयुग्म लगाए गए हैं। इसके सिरों पर प्रवणता बताइये।

$$\left[\left(\frac{2M_1+M_2}{2EI}\right)l;\left(\frac{M_1+2M_2}{6EI}\right)l.\right]$$

13. एक 10cm चौड़ा 30cm मोटा तथा 4m लंबे प्रास धरन के मुक्त सिरे एक पर संकेंद्री भार लग रहा है। यदि अधिकतम अनुमेय विक्षेप तथा बंकन प्रतिबल क्रमशः 2cm तथा तथा 1000 N/cm² हो तो मुक्त सिरे पर लग रहा निरापद भार ज्ञात कीजिए। $E=10\times10^5$ N/cm²; (2110N)

14. एक सरल आधारित धरन पर जिसकी विस्तृति हैं। एक समान बंटित भार W/ एकांक लंबाई का लग रहा है। इसके मध्य बिन्दु पर कितना भार ऊपर की दिशा में लगाया जाय जिससे कि यहाँ विक्षेप का मान शून्य हो जाय। $\left(\frac{5}{8}wl\right)$

15. एक यंत्र अवयव जिसकी मोटाई 1cm तथा चौड़ाई 2cm है पिन बेयरिंग पर 2 m की दूरी पर आधारित है। यदि किसी एक पिन पर एक बलयुग्म लगने के कारण वह अपने अक्ष के सापेक्ष 5° घूम जाए तो बलयुग्म एवं अवयव में अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान बताइये।

$E=20\times10^6$ N/cm²

16. एक धरन अपने बायें सिरे पर तथा इससे l की दूरी पर एक अन्य बिन्दु पर सरल आधारित है इसका दूसरा सिरा इस आधार से l/3 की दूरी तक प्रलंबी है। इसकी समस्त लंबाई पर एक समान बंटित भार लग रहा है। प्रत्येक आधार पर दंड की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

$$\left[\frac{7}{216};\ \frac{wl^3}{EI};\ -\frac{5}{216};\ \frac{wl^3}{EI}\right]$$

17. एक m लंबे प्रास धरन के मुक्त सिरे पर बंटित भार शून्य तथा बद्ध सिरे पर w लग रहा है तो इसके मुक्त सिरे पर प्रवणता एवं विक्षेप ज्ञात कीजिए।

$$\left[\frac{wl^3}{24EI};\ \frac{wl^4}{30EI}\right]$$

18. एक क्षैतिज प्रास धरन पर, जिसका परिच्छेद एक समान तथा लंबाई l है w/ एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लग रहा है। धरन उसी समतल पर बद्ध सिरे से kl की दूरी पर एक दृढ टेक पर भी आधारित है। k का वह मान बताइये जिससे टेक पर बंकन बल आघूर्ण का मान बद्ध सिरे पर प्राप्त मान के बराबर हो।

(लं० वि० वि०)

(k=0.71)

19. एक l लंबाई के प्रास धरन पर भार wl एक समान बंटित रूप से लग रहा है। यदि मुक्त सिरे से l/4 की दूरी पर धरन एक टेक पर आधारित हो तथा टेक की ऊंचाई इस प्रकार रखी जाय की मुक्त सिरे पर शून्य विक्षेप हो। उस प्रकार टेक पर प्रतिक्रिया बल एवं टेक पर विक्षेप ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त कीजिए। प्रास धरन के लिए अपरूपण बल एवं बंकन बल आघूर्ण आरेख भी बनाइये।

(लं० वि० वि०)

$$\left\{ \frac{16}{27}\ wl;\ \frac{wl^4}{6144EI} \right\}$$

20. एक समान परिच्छेद का एक धरन l की दूरी पर अपने सिरों पर सरल आधारित है तथा इस पर इस प्रकार का बंटित भार लग रहा है कि इसका मान सिरों पर शून्य तथा दाहिने सिरे से 1/3 की दूरी पर अधिकतम होता है। सिद्ध कीजिए कि अधिकतम विक्षेप मध्य विस्तृति से लगभग 0.01 ι की दूरी प्राप्त होगा। मध्य विस्तृति पर भी विक्षेप का मान w, l, E तथा I का प्रयोग करते हुए बताइये।

(लं० वि० वि०)

$$\left(0.00108\ \frac{wl^4}{ER}\right)$$

21. एक धरन जिनकी लंबाई l तथा एक समान बंकन दृढ़ता EI है सिरा **A** पर बद्ध तथा B पर पिन पर आधारित है दोनों सिरे एक ही समतल पर आधारित हैं। B पर एक वामावर्ती बलयुग्म लगाया गया है। A पर प्रतिक्रिया तथा स्थायक बलयुग्म ज्ञात कीजिए। B पर धरन की प्रवणता तथा अधिकतम विक्षेप का मान ज्ञात कीजिए। यदि B, A के सापेक्ष δ तक धँस जाता है तो A पर बलयुग्म एवं प्रतिक्रिया बल का नवीन मान तथा B पर प्रवणता बताइये।

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } R_A = \dfrac{3M}{2l}\,;\ M_A = M/2,\ \theta_B = -\dfrac{Ml}{4EI},\ y_{\text{अधिकतम}} = \dfrac{Ml^2}{27EI} \\ \text{पिन वाले सिरे से 1/3 की दूरी पर} \\ \text{(ii) } R_A = \dfrac{3M}{2l} + \dfrac{3EI\delta}{l^3}\,;\ M_A = \dfrac{M}{2} + \dfrac{3EI\delta}{l^2}\,;\ \theta_B = -\dfrac{Ml}{4EI} + \dfrac{3\delta}{2l} \end{array} \right\}$$

22. एक चिना हुआ धरन पर जिसकी विस्तृति l है, W प्रति एकांक लंबाई का एक समान बंटित भार लग रहा है। धरन का जड़त्व आघूर्ण संपूर्ण लंबाई में समान नहीं है। दोनों सिरों से 1/4 की दूरी तक इसका मान 2I तथा मध्यवर्ती ι/2 लंबाई में I है।

धरन के सिरों पर बंकन बल आघूर्ण बताइये तथा बंकन बल आर्णघू आरेख बनाइये।

(लं० वि० वि०)

$$\left[\text{प्रत्येक सिरों पर } M = +\frac{3wl^2}{32}\ :\ \text{मध्य विस्तृति पर } M = -\frac{wl^2}{32}\right]$$

23. एक भारवाहन कमानी में 9 पत्तियाँ हैं। प्रत्येक 7 cm चौड़ी तथा 0.6 cm मोटी है। कमानी की लंबाई बताइये जिससे कि इसके मध्य पर 4000N का भार लगाया जा सके तथा प्रतिबल 1500 N/cm^2 से अधिक न हो। घर्षण को नगण्य मानते हुए कमानी के मध्य बिन्दु पर विक्षेप का मान बताइये।

(लं० वि० वि०)

$E = 20 \times 10^6\ N/cm^2$ (56.6cm, 1cm)

24. एक पत्ती कमानी 7 पत्तियों को मिलाकर बनानी है इसमें प्रत्येक पत्ती 6 cm चौड़ी तथा 0.6 cm मोटी है। मूल सिद्धांतों का प्रयोग करते हुए कमानी की लंबाई ज्ञात कीजिए जिससे कि इसके मध्य पर 2800N का भार लगाया जा सके तथा इसमें लंबाई प्रति बल की मात्रा 15000 N/cm^2 से अधिक न हो।

कमानी के मध्य बिन्दु पर विक्षेप का मान भी बताइये $E = 20 \times 10^6\ N/cm^2$

(लं० वि० बि०)

(54cm, 0.91cm)

25. एक प्रास धरन जिसकी लंबाई 6m है 30000N/m के एक समान बंटित भार से भारित की गई है तथा इसका मुक्त सिरा एक प्रत्यास्थ टेक पर आधारित है जो 25000N के भार लगने पर 1cm धँस जाता है। प्रास धरन का जड़त्व आघूर्ण 80,000 cm^4 हैं तथा यंग्स मापांक $20 \times 10^6\ N/cm^2$ है। प्रास धरन के लिए अपरुपण बल एवं बंकन बल आघूर्ण आरेख बनाइये।

26. एक ι लंबाई का धरन दोनों सिरों पर बद्ध है तथा इस पर एक त्रिभुजा कार भार लग रहा है जिसका दाहिने सिरे पर मान w प्रति एकांक लंबाई तथा बायें सिरे पर शून्य है। सिरों पर प्रतिक्रिया बल तथा बंकन बल आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिए। अधिकतम विक्षेप का मान भी बताइये।

$$\left[\frac{3}{20}\ wl;\ \frac{7}{20}\ wl;\ -\frac{wl^2}{30}\ ;\ -\frac{wl^2}{20}\ ;\ \frac{0.00131\ wl^4}{EI}\right]$$

27. एक बद्ध धरन की विस्तृति ι है। इस पर एक त्रिभुजाकार बंटित भार लग रहा है जिसका बाँये सिरे पर मान शून्य तथा दाहिने सिरे पर w है। इसके मध्य बिन्दु पर एक दृढ़ टेक लगाया गया है। टेक प्रतिक्रिया बल का मान बताइये।

$$\left(\frac{wl}{4}\right)$$

28. एक सरल आधार वाले धरन पर जिसकी विस्तृति l है एक त्रिभुजाकार बंटित भार लग रहा है जिसका मान सिरों पर शून्य तथा मध्य बिन्दु पर w है । अधिकतम विक्षेप का मान बताइये ।

$$\left(\frac{wl^4}{120ER}\right)$$

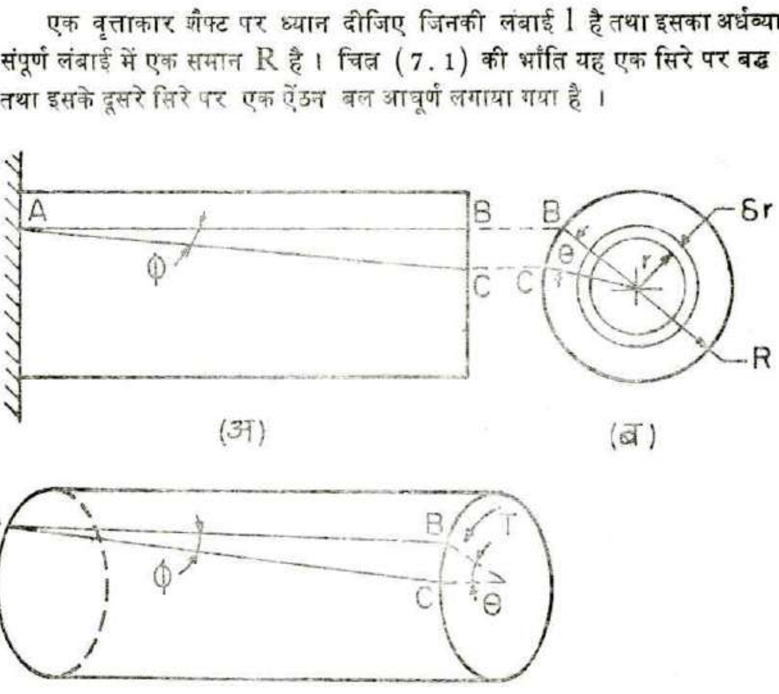
अध्याय 7

मरोड़ भार वाले अवयव

7.1 विषय प्रवेश

यदि किसी शैफ्ट पर एठन बलयुग्म लगाया जाय तो उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद में प्रत्येक अर्धव्यास के अभिलंबवत अपरूपण प्रतिबल उत्पन्न होगा । जब ऐंठन बलयुग्य तथा शैफ्ट के अक्ष एक ही हों तो इसको विशुद्ध ऐंठन अथवा विशुद्ध मरोड़ कहा जाता है ।

एक वृत्ताकार शैफ्ट पर ध्यान दीजिए जिनकी लंबाई l है तथा इसका अर्धव्यास संपूर्ण लंबाई में एक समान R है । चित्र (7.1) की भांति यह एक सिरे पर बद्ध है तथा इसके दूसरे सिरे पर एक ऐंठन बल आघूर्ण लगाया गया है ।



चित्र 7.1

बद्ध सिरे पर एक प्रतिक्रिया ऐंठन बल आघूर्ण लगेगा जो संतुलन बनाए रखेगा । ऐंठन बल आघूर्ण एक स्पर्श रेखीय बल जो अक्ष से 'a' की दूरी पर हो लगा कर उत्पन्न किया जा सकता है ।

ऐंठन के कारण, प्रत्येक परिच्छेद अक्ष के सापेक्ष अपने निकटतम परिच्छेद की अपेक्षा कुछ घूम जाता है । उस प्रकार शैफ्ट के पृष्ठ पर एक रेखा AB जो ऐंठन से पूर्व अक्ष के समान्तर थी । बल आघूर्ण लगने के बाद एक लंबी कुंडलिनी AC का रूप धारण कर लेती है ।

यदि वास्तविक रूप से नाप कर देखा जाय तो यह माना जा सकता है कि ऐंठन लगने पर शैफ्ट के दो परिच्छेद जो अगल-बगल स्थित हैं उनके मध्य उनके मध्य दूरी में कोई परिवर्तन नहीं होता तथा न ही शैफ्ट के व्यास में कोई अन्तर पड़ता है । परन्तु ऐसा तभी माना जा सकता है जब कि ऐंठन कोण का मान बहुत न्यून हो ।

शैफ्ट के क्रमागत परिच्छेद (जो एक पतली चक्रिका के रूप में होते हैं) शैफ्ट के अक्ष के सापेक्ष परस्पर घूम जाते हैं, यह घुमाव परिच्छेद की बद्ध सिरे से दूरी का समानुपाती होता है तथा यह बद्ध सिरे पर शून्य एवं मुक्त सिरे पर अधिकतम होता है । विषम घूर्णन के कारण एक परिच्छेद दूसरे पर सर्पण करना चाहता है इस प्रकार परिधीय अपरूपण प्रतिबल परिच्छेद में उत्पन्न होता है । परस्पर घुमाव, एवं अपरूपण प्रतिबल का परिमाण लगने वाले ऐंठन बल आघूर्ण के समानुपाती होता है ।

बद्ध सिरे से l की दूरी पर सतह पर विरूपण BC है अपरूपण विकृति $\phi =$ प्रति एकांक लंबाई विरूपण $= Bc/l$

परन्तु $\phi = \frac{\tau}{G}$ (G दृढ़ता मापांक है)

यहाँ τ शैफ्ट के सतह पर अपरूपण प्रतिबल को व्यक्त करता है तथा $BC = R\theta$ यहाँ θ रेडियन में व्यक्त किया गया है ।

$$\frac{\tau}{G} = \frac{R\theta}{l}$$

$$\frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l} \quad \dots \quad (7.1)$$

इसी प्रकार कोई अन्य बिन्दु त्रिज्या r पर लेने से, विकृति $\frac{r\theta}{l}$

यदि त्रिज्या r पर अपरूपण प्रतिबल τ_r लग रहा हो

$$\frac{\tau_r}{r} = \frac{G\theta}{l} \text{ अथवा } \frac{\tau_r}{r} = \frac{\tau}{R} \quad \dots \quad (7{\cdot}2)$$

समीकरण (7.2) से यह ज्ञात होता है कि शैफ्ट में किसी स्थान पर अपरूपण प्रतिबल का मान उस स्थान की अक्ष से दूरी के समानुपाती होता है, यह प्रतिबल किसी अनुप्रस्थ परिच्छेद में केन्द्र पर शून्य तथा बाहरी पृष्ठ पर अधिकतम होता है ।

संतुलन अवस्था के लिए, किसी परिच्छेद पर केन्द्र के सापेक्ष संपूर्ण अपरूपण बल का आघूर्ण उस पर लगने वाले बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होना चाहिए । चित्र 7.1 (ब) में जैसा दिखाया गया है एक पतले वलय की कल्पना कीजिए जो केंद्र से r की दूरी पर स्थिर है तथा जिसकी मोटाई dr है ।

इस वलय पर लग रहा संपूर्ण बल $= \tau_r \times 2\pi r \times dr$

यहां τ_r अपरूपण प्रतिबल है तथा $2\pi r.dr$ वलय का क्षेत्रफल है ।

शैफ्ट के अक्ष के सापेक्ष उस बल का आघूर्ण

$$= \tau_r \times 2\pi r^2 \times dr$$

$$= \frac{\tau}{R} \times r \times 2\pi r^2 \, dr$$

$$= \frac{2\pi\tau}{R} \times r^3 \, dr$$

परिच्छेद का संपूर्ण आघूर्ण प्रतिरोध = बाह्य बल आघूर्ण

$$= \frac{2\pi\tau}{R} \int_0^R r^3 \, dr$$

$$= \frac{\pi\tau R^4}{2R}$$

$$T = \frac{\pi\tau R^4}{2R}$$

$$= \frac{\tau J}{R} \quad \dots \quad (7.3)$$

यहाँ $J = \frac{\pi R^4}{2}$ शैफ्ट के ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण को व्यक्त करता है ।

यदि D शैफ्ट के व्यास को व्यक्त करे तो इसको $\frac{\pi D^4}{32}$ लिखा जा सकता है ।

व्यंजकों (7.1), (7.2) तथा (7.3) से

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau_r}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.4)$$

समीकरण (7.4) को व्यावर्तन अथवा मरोड़ समीकरण कहा जाता है। यहाँ T बाह्य रूप से लगने वाला बल आघूर्ण, J ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण, अर्धव्यास R पर τ अपरूपण प्रतिबल, G दृढ़ता मापांक, θ लंबाई l में सापेक्ष ऐंठन कोण है जिसको कि रेडियन में व्यक्त किया गया है तथा τ_r किसी त्रिज्या r पर अपरूपण प्रतिबल है।

मरोड़ समीकरण द्वारा,

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \quad \text{अथवा} \quad GJ\frac{\theta}{l} = T$$

यदि $\theta = l$ = एकांक हो तो,

गुणन फल GJ वह बल आघूर्ण होता है जो शैफ्ट के प्रति एकांक लंबाई में एक रेडियन की ऐंठन उत्पन्न कर सके इसको शैफ्ट की "मरोड़ दृढ़ता" भी कहा जाता है।

$$T = \frac{J}{R} \times \tau$$

$\frac{J}{R}$ को परिच्छेद का ध्रुवीय मापांक कहा जाता है। यह परिच्छेद की विशिष्टता व्यक्त करता है तथा बंकन सिद्धांत में प्रयुक्त परिच्छेद मापांक राशि के समान ही होता है। एक ठोस वृत्ताकार शफ्ट जिसका व्यास D है उसका ध्रुवीय मापांक $\frac{\pi D^3}{16}$ होगा।

समीकरण (7.4) को खोखले वृत्ताकार परिच्छेद के लिए भी प्रयुक्त किया सकता है। यदि शैफ्ट के बाह्य एवं आंतरिक व्यास क्रमशः D तथा d हों तो परिच्छेद का ध्रुवीय मापांक $\frac{\pi}{32}\left[D^4 - d^4\right]\frac{2}{D}$ होगा।

उदाहरण 7.1 : एक 4 सेमी व्यास के छड़ की 300 cm लंबाई पर 800Nm का बलाघूर्ण लगाया गया है। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल एवं ऐंठन कोण (डिग्री) में बताइये। G = 80 GPa

हल :

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l}$$

$$\tau = \frac{T}{J} \times R = \frac{8{,}000 \times (4/2)}{\frac{\pi}{32} \times (4)^4} = 63.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\theta = \frac{T.1}{G_1} = \frac{8{,}000 \times 300}{8 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32} \times (4)^4}$$

$$= 0.119 \times \frac{180}{\pi} = 6.8^\circ$$

उदाहरण 7.2 : एक ठोस शैफ्ट पर 15 kN-m का अधिकतम ऐंठन बल आघूर्ण लगाया गया है। यदि शैफ्ट के प्रत्येक 20 गुना व्यास के लंबाई में ऐंठन कोण 1° तथा प्रतिबल की मात्रा 60 N/mm² तक सीमित हो तो शैफ्ट का उपयुक्त व्यास ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\tau = \frac{T}{J} \times R = \frac{150{,}00 \times D/2}{\pi/32\ D^4}$$

$$D^3 = \frac{150{,}00 \times 16}{60 \times \pi}$$

D = 108 mm

$$\theta = \frac{T.l}{CJ} = \frac{150{,}00 \times 20 \times D}{80 \times 10^3 \times \pi_{32} \times D^4} = \frac{\pi}{180}$$

$$D^3 = \frac{150{,}00 \times 20 \times 180 \times 32}{80 \times 10^3 \times \pi^2}$$

D = 130 mm

∴ अधिक परिमाण वाला व्यास ही निरापद होगा

अतः शैफ्ट का व्यास = 130mm

उदाहरण 7.3 : दो शैफ्टों की मरोड़ सामर्थ्य, ऐंठन कोण तथा मरोड़ दृढ़ता (प्रति एकांक ऐंठन कोण के लिए बल आघूर्ण) की तुलना कीजिए। इनमें से एक शैफ्ट ठोस है तथा दूसरा खोखला है जिसका आंतरिक व्यास बाह्य व्यास का आधा है। दोनों ही शैफ्टों की लंबाई, भार तथा पदार्थ एक ही है तथा दोनों में अधिकतम प्रतिबल की मात्रा भी समान ही होनी चाहिए।

हल :

खोखले शैफ्ट के लिए $J = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

यहाँ D बाह्य तथा d आंतरिक व्यास को व्यक्त करते हैं ।

अधिकतम प्रतिबल सबसे बाहरी रेशे पर अर्थात केंद्र से $D/_2$ की दूरी पर उत्पन्न होगा।

मान लीजिए ठोस शैफ्ट का व्यास D_1 है। तथा यदि D_2 एवं d_2 खोखले शैफ्ट के बाह्य एवं आंतरिक व्यास हों, तब

$$\pi/4\ D_1^2 = \pi/4\ (D_2^2 - d_2^2)$$

क्योंकि दोनों शैफ्टों की लंबाई, भार तथा पदार्थ एक ही हैं ।

$$\pi/4\ D_1^2 = \pi/4 \left\{ D_2^2 - \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 \right\}$$

$$D_1^2 = \tfrac{3}{4} D_2^2 \text{ अथवा } D_1 = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\ D_2$$

अतः खोखले शैफ्ट का $J = \frac{\pi}{32}\left\{D^4 - d^4\right\} = \frac{15\pi}{512} D_2^4 = \frac{5\pi D_1^4}{96}$

(अ) समान अधिकतम प्रतिबल के लिए

ठोस शैफ्ट में लग रहा बल आघूर्ण $T_1 = \pi/32 \times D_1^4 \times \tau \times \frac{2}{D_1}$

$$= \frac{\pi}{16} D_1^3 \times \tau$$

खोखले शैफ्ट पर लग रहा बल आघूर्ण $T_2 = \frac{5\pi(D_1)^4}{96} \times \tau \times \frac{2}{D_2}$

$$= \frac{5\pi(D_1)^4}{96} \times \tau \times \frac{\sqrt{3}}{D_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5\pi D_1^3 \times \tau \times \sqrt{3}}{96} \times \frac{16}{\pi D_1^3 \times \zeta} = 1.44$$

(ब) समान अधिकतम अपरूपण प्रतिबल τ होने पर

ठोस शैफ्ट में ऐंठन $\theta_1 = \frac{\tau.1 \times 2}{G \times D_1}$

खोखले शैफ्ट में ऐंठन $\theta_2 = \frac{\tau \times 1 \times 2}{G \times D_2} = \frac{\tau 1 \times \sqrt{3}}{G \times D_1}$

$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ क्योंकि दोनों शैफ्ट लंबाई में समान तथा 1 के बराबर है,

$$\text{मरोड़ दृढ़ता} = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l}$$

$$\frac{\text{खोखले शैफ्ट की मरोड़ दृढ़ता}}{\text{ठोस शैफ्ट की मरोड़ दृढ़ता}} = \frac{5\pi(D_1)^4}{96} \times \frac{32}{\pi(D_1)^4}$$

उपर्युक्त उदाहरण से यह ज्ञात होता है कि खोखला शैफ्ट अधिक बलाघूर्ण सहन कर सकता है, ऐंठन कोण कम प्राप्त होता है तथा उसकी मरोड़ दृढ़ता भी अधिक होती है ।

इसका स्पष्टीकरण इस प्रकार दिया जा सकता है । शैफ्ट में अक्ष के सापेक्ष बल आघूर्ण लगने पर, अक्ष के समीप स्थित बिन्दुओं पर प्रतिबल की मात्रा बहुत कम होती है एवं अक्ष पर इसका मान शून्य होता है । अतः ठोस शैफ्ट में अक्ष के निकटवर्ती पदार्थ का पूर्ण उपयोग नहीं हो पाता है क्योंकि वह बहुत ही कम बल को वहन करता है । यही अतिरिक्त पदार्थ यदि यहाँ से निकालकर उस क्षेत्र पर प्रयोग किया जाय जहाँ प्रतिबल की मात्रा अधिक होती है तो शैफ्ट अधिक मजबूत बनाया जा सकता है । अतः समान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाला खोखला शैफ्ट सदैव ठोस शैफ्ट की अपेक्षा अधिक मजबूत होता है ।

यदि $d_2 = \frac{2}{3} D_2$ हो तो बलाघूर्ण अनुपात = 1.93 तथा दृढ़ता अथवा मरोड़ दृढ़ता का अनुपात $\frac{13}{5}$ है जिससे स्पष्ट हैं पदार्थ की सामर्थ्य तथा दृढ़ता अधिक होती जाती है यदि पदार्थ को अनुदैर्ध्य अक्ष से जहाँ प्रतिबल कम होता है, उस क्षेत्र से दूर रखा जाता है ।

उदाहरण 7.4 : एक उत्थापक (Hoist) का बेलन 75cm व्यास का है तथा यह 5 cm व्यास के धुरे पर घूमता है । उत्थापक से 5cm व्यास की रस्सी से द्वारा ऊर्ध्व दिशा में 4kN का भार उठाया जाता है । शैफ्ट में अधिकतम प्रतिबल की मात्रा बताइये । (रस्सी के भार को नगण्य माना जा सकता है)।

धुरे में पदार्थ की बचत की मात्रा प्रतिशत में बताइये यदि इस ठोस शैफ्ट के स्थान पर उसी पदार्थ का खोखला शैफ्ट प्रयोग किया जाय । इसके व्यास इस प्रकार के होने चाहिए जिससे कि पदार्थ में अधिकतम प्रतिबल की मात्रा एक समान ही रहे । इसका आंतरिक व्यास बाह्य व्यास का $\frac{2}{3}$ है ।

हल :

धुरे पर लग रहा बल आघूर्ण $= 4000\left(\frac{75}{2} + \frac{5}{2}\right) = 1600$ N/m.

$$\tau = \frac{T}{J} \times \frac{D}{2} = \frac{400 \times 4 \times 16}{\pi(5)^3} = 65\ N/mm^2$$

मान लीजिए खोखले शैफ्ट का बाह्य व्यास D है

$$\text{इसका } J = \frac{\pi}{32}\left\{D^4 - \left(\frac{2}{3}D\right)^4\right\} = \frac{\pi 65 D^4}{32 \times 81}$$

$$\tau = 65 = \frac{400 \times 4 \times D/_2}{\frac{65\pi}{32 \times 81} D^4}$$

अथवा $D = 53.8mm$

$$\text{आंतरिक व्यास} = \frac{2}{3} \times 53.8 = 35.9mm$$

$$\text{खोखले शैफ्ट का क्षेत्रफल} = \pi/_4 \left\{(5.38)^2 - (3.59)^2\right\}$$

$$= \frac{16.1\pi}{4}\ cm^2$$

$$\text{ठोस शैफ्ट का क्षेत्रफल} = \pi/_4 \times (5)^2 = \frac{25\pi}{4}\ cm^2$$

$$\text{पदार्थ की प्रतिशत बचत की मात्रा} = \frac{\frac{25\pi}{4} - \frac{16.1\pi}{4}}{\frac{25\pi}{4}} \times 100$$

$$= \frac{8.9}{25} \times 100 = 35.6\%$$

उदाहरण 7.5 : एक संयुक्त शैफ्ट दो शैफ्टों को जोड़कर बनाया गया है। इसमें एक 5cm व्यास के इस्पात शैफ्ट को एक पीतल की नलिका के सिरे पर पेंच द्वारा जोड़ा गया है। पीतल की नलिका का आंतरिक व्यास 3cm तथा बाह्य व्यास 6cm है। जोड़ने के पश्चात् इस्पात तथा पीतल के शैफ्ट खंडों की प्रभावी लंबाई क्रमशः 100 तथा 75cm है। यदि इस शैफ्ट में अधिकतम अनुमेय प्रतिबल इस्पात एवं पीतल खंड में क्रमश: 70 तथा 50 N/mm^2 तथा ऐंठन कोण 2° से अधिक न हो तो शैफ्ट पर कितना बलाघूर्ण लगाया जा सकता है? इस्पात के लिए G=85GPa तथा पीतल के लिए G = 38GPa है। शैफ्ट में वास्तविक प्रतिबलों का मान एवं इस्पात शैफ्ट तथा नलिका में अलग ऐंठन कोण का मान बताइये।

हल :—

$$\text{इस्पात शैफ्ट के लिए } J = \frac{\pi}{32}(5)^4\ cm^4$$

$$\text{पीतल नलिका का } J = \frac{\pi}{32}\left[6^4 - 3^4\right] = \pi/32 \times 81 \times 15$$

इस्पात के शैफ्ट में अनुमेय प्रतिबल के लिए निरापद बलाघूर्ण का मान

$$= \frac{\pi}{32}(5)^4 \times 70 \times \frac{2}{5} \times 10^3 = 1.72 \times 10^5\ N/mm$$

पीतल की नलिका में अनुमेय प्रतिबल के लिए निरापद बल आघूर्ण का मान

$$= \frac{\pi}{32} \times 81 \times 15 \times 50 \times \frac{2}{6} \times 10^3 = 2.0 \times 10^5\ N/mm$$

यदि अधिकतम 2° के ऐंठन कोण के लिए ऐंठन बल आघूर्ण का माना T हो तब,

$$\frac{2\pi}{180} = \frac{T.\ l_s}{G_s J_s} + \frac{T.\ l_b}{G_b.J_b}$$

$$= \frac{T \times 100 \times 10^2}{80 \times 10^3 \times \frac{\pi}{32}(5)^4 \times 10^4} + \frac{T \times 75 \times 10^2}{\frac{\pi}{32} \times 81 \times 15 \times 35 \times 10^3 \times 10^4}$$

$T = 910 \times 10^3\ N/mm$

ज्ञात किए गए तीनों मानों में न्यूनतम मान ही निरापद होगा

अतः $T = 910\ N/m$

$$\text{इस्पात शैफ्ट में प्रतिबल} = \frac{91000 \times 5}{\pi/32 \times (5)^4 \times 2} = 22.8\ N/mm^2$$

इस्पात शैफ्ट में ऐंठन कोण का मान

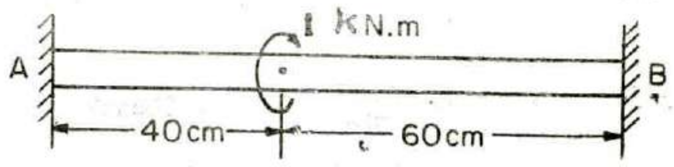
$$= \frac{9{,}100 \times 100}{8 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32} \times (5)^4} \times \frac{180}{\pi}$$

$= 1.06^\circ$

पीतल की नलीका में ऐंठन कोण का मान

$$= \frac{9{,}100 \times 75 \times 180}{3.5 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32} \times 81 \times 15 \times \pi} = 0.94^\circ$$

उदाहरण 7.6 : एक ठोस शैफ्ट 100 cm की दूरी पर अपने दोनों सिरों पर बद्ध है । चित्र में दिखाये गए के समान इसके बाये सिरे A से 40cm की दूरी पर 1 kN–m का बलयुग्म लगाया गया है । शैफ्ट में अधिकतम अपरूपण बल का मान ज्ञात कीजिए ।



चित्र 7.2

हल :—

मान लीजिए कि सिरों A तथा B पर प्रतिक्रिया बल्युग्म क्रमशः T_A तथा T_B लग बहे हैं ।

$$T_A + T_B = 1000 \qquad \ldots \qquad (7.5)$$

सिरा A तथा B पर ऐंठन कोण का मान शून्य है। बाह्य बलयुग्म दूसरे सिरे पर लग रहे प्रतिक्रिया बलयुग्म से संतुलित हो जाता है अतः सिरा B पर

$$\frac{1000\times 60}{CJ\times 100} = \frac{T_A\times 100}{CJ\times 100}$$

$$T_A = 6,000 \text{ N–cm}$$

$$T_B = 4,000 \text{ N–cm}$$

इसी प्रकार के परिणाम उस दशा में भी प्राप्त होंगे यदि C पर एठन कोण का मान निकाला जाय जहाँ पर बलयुग्म लगाया गया है । शैफ्ट को दो खंडों में माना जा सकता है। शैफ्ट, CA पर बल युग्म T_A तथा शैफ्ट CB पर बलयुग्म T_B लगेगा। तब इस प्रकार बिन्दु C पर ऐंठन कोण का मान समान ही होना चाहिए क्योंकि यह उभयनिष्ठ बिन्दु है ।

$$\frac{T_A\times 40}{CJ} = \frac{T_s\times 60}{CJ}$$

$$40T_A = 60T_B \qquad \ldots \qquad (7.6)$$

समीकरणों (7.5) तथा (7.6) से

$$T_A = 6,000 \text{ N–cm}$$

$$T_B = 4,000 \text{ N–cm}$$

खंड AC में अधिकतम ऐंठन बलाघूर्ण लगता है जिसका मान 6,000 N-cm है।

$$\text{अधिकतम अपरूपण प्रतिबल} = \frac{6,000\times 16}{\pi\times(4)^3} = 47.8 \text{ N/mm}^2$$

उदाहरण 7.7 : यदि उदाहरण (7.6) में सिरा B से 30 cm की दूरी पर 500 N–m का एक और बलयुग्म D बिन्दु पर उसी दिशा में लगाया जाय तो AC, DA तथा DE भागों में बलयुग्मों का मान बताइये ।

हल :—

यदि T_A तथा T_B, A तथा B पर क्रमशः प्रतिक्रिया बलों को व्यक्त करते हैं

$$T_A + T_B = 1000 + 500$$

सिरा B पर ऐंठन का मान निकालने पर

$$\frac{T_A\times 100}{GJ\times 100} = \frac{10,00\times 60}{GJ\times 100} + \frac{500\times 30}{GJ\times 190}$$

$$\text{AC में ऐंठन बल आघूर्ण} = T_A = 750 \text{ N.m}$$

$$\text{BD में ऐंठन बल आघूर्ण} = T_A = 15,00 - 750$$

$$= 750 \text{ N.m}$$

$$\text{CD में ऐंठन बल आघूर्ण} = T_A - 10,00$$

$$= -\ 2,50 \text{ N.m}$$

उदाहरण 7.8 : एक संयुक्त निकाय में एक 4cm बाह्य व्यास एवं 0.5 cm मोटी दीवार की इस्पात नलिका है जिसके अंदर एक 3cm व्यास की ताँबे की छड़ पड़ी है तथा इस पर 500 N. m. का एक ऐंठन बल आघूर्ण लगाया गया है । ये दोनों ही समान लंबाई के हैं तथा दोनों सिरों पर एक प्लेट से वेल्ड किये गये हैं जिससे कि नलिका एवं छड़ में ऐंठन एक समान हो । अतः इस्पात एवं ताँबे में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए । $G_s = 80\text{GPa}$ तथा $G_c = 40\text{GPa}$

हल :—

मान लीजिए इस्पात तथा ताँबे द्वारा प्रतिरोध किया जाने वाला बलाघूर्ण क्रमशः T_s तथा T_c है ।

$$T_s + T_c = 5{,}00 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.7)$$

$$\theta_s = \theta_c$$

$$\frac{T_s \times 1}{J_s \times G_s} = \frac{T_c \times 1}{J_c \times G_c}$$

$$\frac{T_s}{\frac{\pi}{32}\left[(4)^4-(3)^4\right] \times 8 \times 10^5} = \frac{T_c}{\frac{\pi}{32}\, 3^4 \times 4 \times 10^5}$$

$$\frac{T_s}{2 \times 175} = \frac{T_c}{81}$$

$$T_s = \frac{350}{81} T_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.8)$$

समीकरणों (7.7) तथा (7.8) द्वारा

$$T_c = 94 \text{ N.m}$$

$$T_s = 406 \text{ N.m}$$

$$\text{ताँबे में अपरूपण प्रतिबल} = \frac{33 \times 940 \times 3}{\pi \times (3)^4 \times 2} = 17.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{इस्पात में अपरूपण प्रतिबल} = \frac{32 \times 4060 \times 4}{\pi[(4)^4-(3)^4] \times 2} = 46 \text{ N/mm}^2$$

उदाहरण 7.9 : एक 5cm औसत व्यास एवं 0.25cm मोटी नलिका में ऐंठन बल आघूर्ण का मान बताइये जिससे कि उसमें 100N/mm^2 का अधिकतम अपरूपण प्रतिबल उत्पन्न हो ।

हल :--

मान लीजिए नलिका के बाह्य एवं आंतरिक व्यास क्रमशः D तथा ∝ है ।

$$J = \frac{\pi}{32}(D^4-d^4) = \frac{\pi}{32}(D^2+d^2)(D^2-d^2)$$

$$= \frac{\pi}{32}(D^2+d^2)(D-d)(D+d)$$

हल :

मान लीजिए कि ठोस शैफ्ट द्वारा पारेषित शक्ति H(kW) है तथा उसमें अनुमेय प्रतिबल $\tau(\text{MN/m}^2)$

संचारण किया जाने वाला बल आघूर्ण

$$= \frac{H \times 10^3}{2\pi \times 200} \times 60$$

$$= \frac{\pi}{16} \times \frac{(40)^3}{10^6} \times \tau \times 10^6 \quad . \quad . \quad . \quad (7.10)$$

खोखले शैफ्ट द्वारा पारेषित शक्ति 1.6 H तथा उसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल 1.2 τ है । यदि खोखले शैफ्ट का बाह्य एवं आंतरिक व्यास क्रमशः D एवं d हो, तो

$$\text{पारेषित बल आघूर्ण} = 1.6\,\frac{H \times 1000 \times 60}{2\pi \times 100}$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{16} \times \frac{(D^4-d^4)}{D} \times 1.2\,\tau \quad . \quad . \quad . \quad (7.11)$$

समीकरण (7.10) को (7.11) से भाग देने पर

$$1.6 \times 2 = 2.4 \times \frac{(D^4-d^4)}{D} \times \frac{1}{(40)^3}$$

$$\frac{D^4-d^4}{D} = \frac{3.2 \times (40)^3}{2.4}$$

यदि $d = D/2$

$$\frac{15}{16} D^3 = \frac{3.2 \times (40)^3}{2.4}$$

$$D^3 = \frac{3.2 \times 16 \times (40)^3}{2.4 \times 15} = 1.42 \times (40)^3$$

बाह्य व्यास D = 44.8 cm

आंतरिक व्यास d = 22.4 cm

उदाहरण 7.15 : एक शैफ्ट 50cm लंबा तथा 4cm बाह्य व्यास का है । इसकी कुछ लंबाई में 2cm व्यास का तथा शेष लंबाई में 3cm व्यास का छेद कर दिया गया है । यदि अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान 80 N/mm² से अधिक न हो तो 200 घू० प्र० मि० पर पारेषित शक्ति का मान बताइये यदि 2cm छेद वाले भाग में ऐंठन का मान 3 cm व्यास के छेद वाले भाग में ऐंठन के बराबर हो तो उस भाग की लंबाई बताइये जिसमें 2cm व्यास का छेद किया गया है ।

हल :—

अधिकतम प्रतिबल उस भाग में उत्पन्न होगा जिसमें छेद का व्यास अधिक है क्योंकि बह्य व्यास समान होते हुए भी J का मान कम है ।

$$\text{निरापद बल आघूर्ण} = \frac{\pi}{16}\left[(4)^4 - (3)^4\right] \times \tfrac{1}{4} \times 80 \times 10^3$$

$$= 687.23 \text{ N.m}$$

$$\text{शक्ति} = \frac{2\pi \times 200 \times 687.23}{60 \times 10^3} = 14.39 \text{ kW}$$

$$\theta = \frac{T.\,l_1}{GJ_1} = \frac{T.\,l_2}{GJ_2}$$

यहाँ l_1 J_1 तथा l_2 J_2 2 cm व्यास के तथा 3 cm व्यास के छेद वाले खंडों की क्रमशः लंबाई तथा ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण व्यक्त करते हैं ।

$$\frac{l_1}{J_1} = \frac{l_2}{J_2}$$

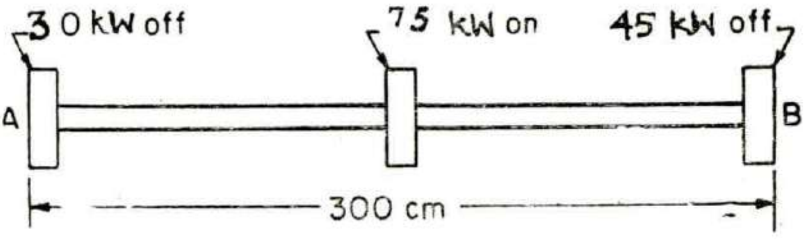
$$\frac{32 l_1}{\pi[(4)^4 - (2)^4]} = \frac{32\, l_2}{\pi[(4)^4 - (3)^4]}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{35}{48}\,; \text{ तथा } l_1 + l_2 = 50$$

$$l_1 = 29 \text{ cm}$$

उदाहरण 7.16 : एक ठोस गोल शैफ्ट का एक समान व्यास 6 cm तथा लंबाई 300 cm है । उसके मध्य बिन्दु पर एक घिरनी पर पट्टे द्वारा 75kW शक्ति प्रदान की गई है । इस शक्ति को दो मशीनों को चलाने के लिए प्रयोग किया गया है,

एक शैफ्ट के बाये ओर है जो 30kW शक्ति लेती है तथा दूसरी और शेष जो 45 kW शक्ति लेती है । शैफ्ट में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल तथा शैफ्ट के दोनों सिरों के मध्य सापेक्ष ऐंठन कोण ज्ञात कीजिए शैफ्ट की चाल 200 घू० प्र० मि० तथा G का मान 80 GPa है ।



चित्र 7.3

हल :

बिन्दु B पर 45 kW शक्ति लिया गया है अतः भाग CB द्वारा 45 kW शक्ति पारेषित होती है तथा भाग CA से शेष 30 kW शक्ति पारेषित होती है । चूंकि खंड CB से अधिकतम शक्ति पारेषित होती है अतः उसी भाग में अधिकतम प्रति बल भी उत्पन्न होगा ।

$$\text{भाग BC में बल आघूर्ण} = \frac{45 \times 10^3 \times 60}{2\pi \times 200}$$

$$= 2148.6 \text{ Nm}$$

$$\text{अधिकतम अपरूपण प्रति बल} = \frac{2148.6 \times 10^3 \times 16}{\pi \times (60)^3}$$

$$= 50.67 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{खंड BC में ऐंठन} = \frac{T.l}{G.J} = \frac{67{,}500 \times 150 \times 32 \times 180}{\pi \times 8 \times 10^5 \times \pi \times (6)^4 \times \pi}$$

$$= 1.82^0$$

$$\text{खंड AC में बल आघूर्ण} = \frac{30 \times 10^3 \times 60}{2\pi \times 200}$$

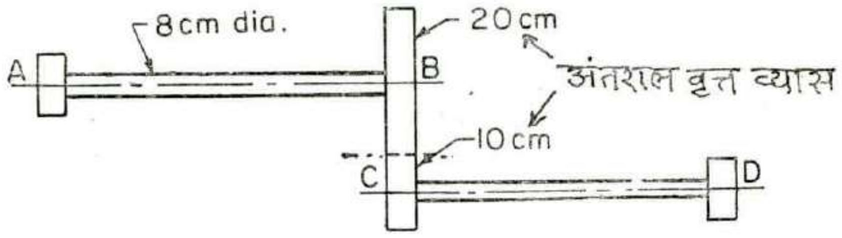
$$= 1432.4 \text{ N.m}$$

$$\text{भाग AC में ऐंठन} = \frac{600\times75\times150\times32}{\pi\times8\times10^5\times\pi\times(6)^4}\times\frac{180}{\pi}$$
$$= 1.21^\circ$$

A तथा B के मध्य सापेक्ष ऐंठन

$$= 1.02+1.21$$
$$= 3.03^\circ$$

उदाहरण 7.17 : चित्र (7.4) में जैसा दिखाया गया है दो शैफ्टों AB तथा CD को गियरों B तथा C द्वारा जोड़ा गया है गियर के अंतराल व्यास क्रमशः 20 तथा 10 cm हैं । शैफ्ट AB में बिन्दु A पर एक बल आघूर्ण लगाने पर 60 N/mm² का प्रतिबल उत्पन्न होता है । अतः यदि शैफ्ट CD में अपरूपण प्रतिबल का मान 60 N/mm² हो तो इसका व्यास ज्ञात करो ।



चित्र 7.4

हल :

$$\text{A पर लगाया गया बल आघूर्ण} = \pi/16\times(8)^3\times600$$
$$= \pi\times32\times60 \text{ N.m}$$

$$\frac{\text{शैफ्ट AB में बल आघूर्ण}}{\text{शैफ्ट CD में बल आघूर्ण}} = \frac{\text{गियर B का व्यास}}{\text{गियर C का व्यास}}$$

चूंकि दोनों गियर के उभयनिष्ठ स्पर्श बिन्दु पर लग रहे बल का मान समान है तथा बल आंघूर्ण उनके अंतराल व्यास के समानुपाती होते हैं ।

$$\text{शैफ्ट CD में बल आघूर्ण} = \frac{\pi\times32\times600\times10}{20}$$
$$= \pi\times16\times600 \text{ N-cm}$$

26—23 M. of HRD/ND/95

$$\pi\times16\times600 = \pi/16\times d^3\times600$$

$$d = 63.5 \text{ mm}$$

उदाहरण 7.18 : दो शैफ्टों के सिरों को एक युग्मक द्वारा जोड़ा गया है इसमें 6 काबले 20 सेमी के अंतराल वृत्त व्यास पर प्रयोग किए गए हैं । शैफ्ट एवं काबलों में अधिकतम अनुमेय अपरूपण बल क्रमशः 60 N/mm² तथा 20 N/mm² तक सीमित है, यदि काबलों का व्यास 1 सेमी हो तो प्रत्येक शैफ्ट का व्यास इस प्रकार ज्ञात कीजिए जिससे युग्मक तथा शैफ्टों की सामर्थ्य बराबर हो ।

हल :

काबलों में कुल अपरूपण बल

$$\pi/4\,(1)^2\times6\times200 = 9424.78 \text{ N}$$

$$\text{काबलों द्वारा संचारित बल आघूर्ण} = 300\pi\times\frac{20}{2}$$

$$= 3{,}0000\pi \text{ N cm}$$

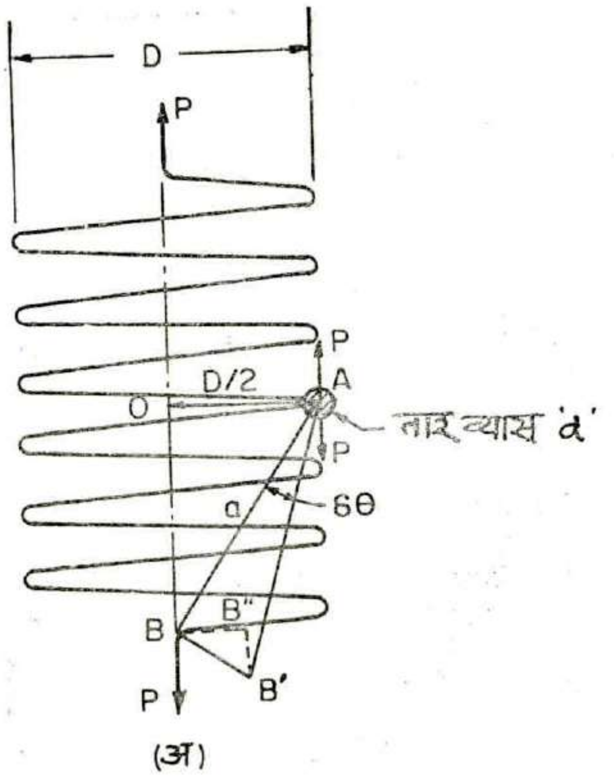
$$30000\,\pi = \frac{\pi}{16}\,d^3\times600$$

$$d^3 = 80$$

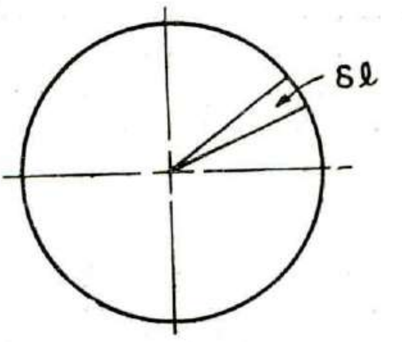
$$\text{प्रत्येक शैफ्ट का व्यास} = 43 \text{ mm}$$

7.3 सघन कुंडलित कमानियाँ

यदि एक लम्बे तार को कुंडलिनी अथवा सर्पिल रूप में लपेटा जाय तो इसको कुंडलिनी कमानी कहा जाता है । यदि कमानी की कुंडलिनियाँ इतने पास पास हों कि प्रत्येक कुंडली के समतल को कमानी अथवा कुंडलिनी के अक्ष के अभिलंब माना जा सके तब इस प्रकार के कमानी को सघन कुंडलिनी कमानी कहा जाता है । कमानियों का प्रयोग ऊर्जा-संग्रह के लिए किया जाता है तथा आवश्यकता होने पर इस ऊर्जा को वापस किया जा सकता है । इसमें स्थायी विकृति के बिना ही बहुत अधिक विरूपण संभव होता है ।



(अ)



(ब)

चित्र 7.5

7.4 सघन कुंडलित कमानी पर लग रहा अक्षीय भार :

चित्र 7.5 में एक सघन कुंडलित कमानी को दिखाया गया है जिसका औसत कुंडलिनी व्यास D एवं इसमें प्रयुक्त तार का व्यास d है । इस पर एक अक्षीय बल P लग रहा है । मान लीजिए कि कुंडली को एक ऊर्ध्वाधर अक्षीय तल द्वारा काटा गया है तथा इस प्रकार तार का परिच्छेद A पर दिखाया गया है । साम्यावस्था स्थिति बनाए रखने के लिए तार पर एक अपरूपण बल P तथा एक वामावर्ती बलयुग्म PD/2 लगेगा ।

अपरूपण बल P के कारण तार में अपरूपण प्रतिबल $= \frac{4P}{\pi d^2}$

ऐंठन बल आघूर्ण $\frac{PD}{2}$ के कारण तार में अपरूपण प्रतिबल $= \frac{8PD}{\pi d^3}$

अतः तार में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल $\tau = \frac{4P}{\pi d2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left\{1+\frac{d}{2D}\right\}$

उपर्युक्त व्यंजक में कोष्ठक के भीतर दूसरे पद का मान अत्यंत न्यून होगा क्योंकि तार का व्यास कमानी की कुंडली के औसत व्यास D की अपेक्षा बहुत कम होता है ।

अतः अधिकम अपरूपण प्रतिबल

$$\tau = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.12)$$

अक्षीय भार P के अंतर्गत कमानी का विक्षेप ज्ञात करने के लिए केवल ऐंठन पर ही ध्यान दिया गया है । किसी एक कुंडली के दो संलग्न परिच्छेद पर ध्यान दीजिए जैसा कि चित्र (7.5) में दिखाया गया है । उन परिच्छेदों के मध्य तार की लंबाई δl है । यदि इस लंबाई में ऐंठन कोण का मान δθ हो; तब

$$\delta\theta = \frac{T\delta l}{GJ} = \frac{PD}{2}\ \frac{\delta l}{GJ} = \frac{PD\delta l}{2GJ}$$

इस ऐंठन के कारण कमानी का सबसे नीचे वाला भाग A के सापेक्ष कुछ घूम जाता है तथा भारण बिन्दु B एक चाप BB की दिशा में चलता है तथा BB=a δθ इस घुमाव को उस दशा में अच्छी प्रकार समझा जा सकता है जब कि δl खंड को छोड़कर संपूर्ण कमानी को दृढ़ माना जाय ।

चूंकि RB का मान अत्यंत न्यून है अतः त्रिभुजों OAB तथा BB′B″ को दो समरूप समकोण त्रिभुज माना जा सकता है । अतः,

$$\frac{B'B''}{BB'} = \frac{OA}{AB} = \frac{D}{2a}$$

विस्थापन का ऊर्ध्वाधर घटक B′B″

$$= BB' \times \frac{D}{2a} = a\ \delta\theta \times \frac{D}{2a} = \frac{PD^2\ \delta l}{4GJ}$$

संपूर्ण ऊर्ध्वाधर विक्षेप को ज्ञात करने के लिए इसी प्रकार कमानी की संपूर्ण लंबाई πDN के कारण उत्पन्न विक्षेप के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है, यहाँ N कुंडली की संख्या व्यक्त करता है ।

$$\text{अतः कुल विक्षेप } \delta = \int_{O}^{\pi DN} \frac{PD^2}{4GJ}\ \delta l$$

$$= \frac{PD^2}{4GJ} \times \pi DN$$

यहाँ $J = \frac{\pi}{32}\ d4$

$$\text{अतः } \delta = \frac{\delta\, PD^3\, N}{Gd4} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7.13)$$

बिन्दु B के विस्थापन का क्षैतिज घटक BB का कुंडली के व्यास के सम्मुखी खंड के कारण निराकरण हो जायेगा । अतः बिन्दु B का नेट क्षैतिज विस्थापन शून्य होता है तथा यह बिन्दु सदैव अक्ष पर ही बना रहता है ।

उदाहरण 7.19 : एक सघन कुंडलित कमानी में 10 मुक्त कुंडलियाँ है इनका औसत व्यास 8 cm है तथा इसमे प्रयुक्त इस्पात के तार का व्यास 0.75 cm है । यदि इस पर 100N का अक्षीय भार लग रहा हो तो इसका कुल विक्षेप तथा इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल की मात्रा ज्ञात कीजिए । कमानी विरूपण गुणक भी बताइये । G = 80 GPa

हल :

$$\text{विक्षेप} = \frac{8PD^3N}{Gd4}$$

$$= \frac{8 \times 10 \times (8)^3 \times 10}{(0.75)^4 \times 8 \times 10^5} = 1.62 \text{ cm}$$

$$\text{अधिकतम अपरूपण प्रतिबल} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

$$= \frac{8 \times 10 \times 8}{\pi \times (0.75)^3} = 40.4 \text{N/mm}^2$$

कमानी में एकांक विक्षेप उत्पन्न करने के लिए आवश्यक अक्षीय भार को कमानी का दृढ़ांक अथवा विरूपण गुणक कहा जाता है ।

$$= \frac{P}{\delta} = \frac{Gd^4}{8D^3N}$$

$$\text{कमानी का विरूपण गुणक} = \frac{100}{1.62 \times 10^2} = 6.2 \text{ kN/m}$$

उदाहरण 7.20 : एक सघन कुंडलित कमानी का विरूपण गुणक 1kN/m है इस पर अधिकतम अक्षीय भार 40N तथा उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान 130N/mm² है। कमानी की ठोस लंबाई (अर्थात वह लंबाई जब कमानी को दबाने पर एक कुंडली दूसरी को छूने लगे) 4.5 cm है । कमानी के तार का व्यास, कुंडली का औसत अर्धव्यास तथा कुंडली की संख्या ज्ञात कीजिए । दृढ़ता मापांक G = 40 GPa

(लं० वि० वि०)

हल :

कमानी विरूपण गुणक से

$$1 = \frac{4 \times 10^5 \times d^4}{8D^3 \times N} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7.14)$$

अधिकतन अपरूपण, प्रतिबल के मान द्वारा

$$1300 = \frac{8 \times 4 \times D}{\pi d^3} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7.15)$$

जब कुंडलियाँ एक दूसरे को छू रही हों तब कुल लंबाई N×d होगी क्योंकि ठोस लंबाई में N कुंडलियाँ जिनके तार का व्यास d हैं एक दूसरे के ऊपर रखी हुई प्रतीत होंगी ।

$$N \times d = 4.5 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7.16)$$

समीकरण (7.15) से $D = \frac{1300 \times \pi d^3}{32} = 128d^3$

समीकरण (7.16) से $N = \frac{4.5}{d}$ तथा $D = 128d^3$ का मान समीकरण (7.14) में रखने पर

$$4 \times 10^5 \times d^4 = 8 \times 1\ (128)^3 \times \frac{4.5}{d}$$

अथवा $d^4 = \frac{4 \times 10^5}{8 \times (128)^3 \times 4.5}$

अतः तार का व्यास $= 0.27\ cm = 2.7\ mm$

कुंडली की संख्या $= \frac{4.5}{0.27} = 16.6$

कुंडली का औसत व्यास $= 128 \times (0.27)^3 = 25.4\ mm$

अतः कुंडली का औसत अर्द्ध व्यास $= 12.7\ mm$

उदाहरण 7.21 : यदि दो कमानियों को श्रेणी बद्ध कर दिया जाय तो इस संयुक्त निकाय का कमानी विरूपण गुणक ज्ञात कीजिए ।

एक संयुक्त निकाय में दो सघन कुंडलित कमानियों को श्रेणी बद्ध कर दिया गया है । एक कमानी में 10 कुंडलियाँ जिनका औसत व्यास 2cm तथा तार का व्यास 0.25 cm है । यदि दूसरी कमानी में 2 cm औसत व्यास की 12 कुंडलियाँ हों तो इसमें प्रयुक्त तार का व्यास ज्ञात कीजिए । संयुक्त निकाय का विरूपण गुणक 1 kN/m है ।

यदि संयुक्त कमानी में अपरूपण प्रतिबल 200 N/mm^2 से अधिक न हो तो इस पर लगाया जाने वाला अधिकतम भार तथा इसके कारण उत्पन्न कुल विक्षेप का मान भी बताइये । $G = 80\ G\ P_a$

हल :

चूंकि दोनों कमानियाँ श्रेणी में हैं अतः भार दोनों कमानियों पर समान है तथा कुल दैर्ध्यवृद्धि प्रत्येक में उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि के बराबर होगी ।

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

अथवा $\frac{P}{\mu} = \frac{P}{\mu_1} + \frac{P}{\mu_2}$

जहां कि μ_1 तथा μ_2 दोनों कमानियों के क्रमशः विरूपण गुणक है तथा संयुक्त निकाय का विरूपण गुणक μ है ।

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.17)$$

प्रथम कमानी का विरूपण गुणक $= \frac{Gd^4}{8D^3N}$

$$= \frac{8 \times 10^3 \times (6.25)^4}{8 \times (2)^3 \times 10}$$

दूसरे कमानी का विरूपण गुणक $= \frac{2 \times 10^5 \times d^4}{8 \times (2)^3 \times 12}$

समीकरण 7.17 में इन मानों को रखने पर तथा $\mu = 1kN/m$ रखने पर

$$1 = \frac{8 \times (2)^3 \times 10}{8 \times 10^5 \times (0.25)^4} + \frac{8 \times (2)^3 \times 12}{8 \times 10^5 \times d^4}$$

अथवा $10{,}000 - 256 \times 8 = \frac{9.6}{d^4}$

अथवा $d^4 = \frac{9.6}{0.7952} \times 10^{-4} = 12 \times 10^{-4}$

अथवा $d = 1.86\ mm$

चूंकि $P = \frac{\pi d^3 \tau}{8D}$ निरापद भार उस कमानी के आधार पर ज्ञात किया जाना चाहिए जिसका व्यास कम है ।

$$P = \frac{\pi \times (0.186)^3 \times 2000}{8 \times 2} = 25.3\ N$$

संपूर्ण दैर्ध्यवृद्धि $\frac{2.53}{1} = 25.3\ mm$

उदाहरण 7.22 : एक वाल्व को दबाये रखने के लिए दो कमानियों का प्रयोग किया गया है । एक कमानी को दूसरी कुंडलित कमानी के अंदर तथा समान अक्ष पर रखा गया है । भीतरी कमानी की लंबाई बाहर वाली कमानी से 0.6cm अधिक है । बाहरी कमानी में 12 कुंडलियाँ हैं जिनमें प्रत्येक का व्यास 2.5cm तथा तार का व्यास 0.3cm है । जब वाल्व बंद रखा है उस अवस्था में कमानी में प्रारंभिक संपीडन 0.5cm है । भीतरी कमानी का विरूपण गुणक ज्ञात कीजिए यदि वाल्व को 1cm खोलने के लिए 150N के बल की आवश्यकता हो ।

यदि कमानियों के मध्य त्रिज्य अवकाश 0.15cm हो तथा भीतरी कमानी में 10 कुंडलियाँ हों तो इसके तार का व्यास ज्ञात कीजिए । G = 80 GPa

(ल० वि० वि०)

हल :

बाहर वाली कमानी का विरूपण गुणक

$$= \frac{Gd^5}{8 \times D^3 \times N} = \frac{80x\ 10^4 \times (0.3)^4\ x\ 10^4}{8 + (2.5)^4 \times 12 \times 10^4}$$

$= 4.3$ KN/m

बाहरी कमानी का प्रारंभिक संपीडन $= 0.5$cm

भीतरी कमानी का प्रारंभिक संपीडन $= 0.5 + 0.6 = 1.1$cm

बाहरी कमानी का अंतिम संपीडन $= 0.5 + 1.0 = 1.5$cm

भीतरी कमानी का अंतिम संपीडन $= 1.1 + 1 = 2.1$cm

यदि भीतरी कमानी का विरूपण गुणक μ हो, तब

$$4.3 \times 1.5 + \mu \times 2.1 = 15$$

अथवा $\mu = 4.06$ kN/m

भीतरी कमानी के कुंडली का औसत व्यास

$= 2.5 - 2 \times 0.15 - 0.3 - d$

$= (1.9 - d)$ यहाँ d, भीतरी कमानी के तार का व्यास है।

भीतरी कमानी का विरूपण गुणक

$$= 4.06 = \frac{Gd^4}{8D^3\ N} = \frac{80 \times 10^7 \times d^4}{8 \times (1.9 - d)^3 \times 10}$$

$$10^4 \times d^4 = 4.06 \times (1.9 - d)^3$$

चूंकि 1.9 की अपेक्षा d का मान कम है, अतः प्रथम सन्निकट हल के लिए

$$d = \left\{ \frac{4.06 \times (1.9)^3}{10^4} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$= 0.23$ cm

द्वितीय सन्निकट मान के लिए

$$d = \left\{ \frac{4.06 \times (1.9 - 0.23)^3}{10^4} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$= 0.208$

तृतीय सन्निकट हल के लिए

$$d = \left\{ \frac{4.06 \times (1.9 - 0.208)^3}{10^4} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$= 2.1$ mm (लगभग)

7.5 सघन कुंडलित कमानी पर ऐंठन बलयुग्म T लगने पर

यदि किसी सघन कुंडलित कमानी पर अक्षीय बल आघूर्ण T लगाया जाय तो संपूर्ण कुंडली पर एक समान रूप से एक बंकन बल-आघूर्ण लगता है जिसका मान ऐंठन बल आघूर्ण T के बराबर ही होगा ।

तब अधिकतम बंकन प्रतिबल

$$\frac{T}{I} \times \frac{d}{2} = \frac{T \times 64}{\pi\ d^4} \times \frac{d}{2} = \frac{32\ T}{\pi d^3}$$

मुक्त सिरे का ऐंठन कोण ऊर्जा विधि को प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है जिसका वर्णन अगले अध्याय में किया जाएगा ।

उदाहरण 7.23 : एक सघन कुंडलित कमानी पर 1 N m ऐंठन बल आघूर्ण लगाया गया है। यदि तार का व्यास 0.5 सेमी हो तो कमानी में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{बंकन प्रतिबल} = \frac{32\ T}{\pi d^3} = \frac{32 \times 10}{\pi \times (\frac{1}{2})^3}$$

$$= \frac{8 \times 32 \times 10}{\pi} = 81.3\ N/mm^2$$

अभ्यास प्रश्नमाला

(आवश्यकता पड़ने पर G का मान 80GPa लिया जा सकता है)

1. एक 40 mm व्यास के छड़ पर 1 KN. m का ऐंठन बल आघूर्ण लगाया गया है। छड़ में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल तथा उसके 3m लंबाई में ऐंठन कोण ज्ञात कीजिए ।

(79.5 N/mm^2; 8.5°)

2. एक 50mm व्यास वाले ठोस शैफ्ट की कितनी लंबाई प्रयुक्त की जाए जिससे उस पर 1 kN. m का ऐंठन बल आघूर्ण लगाने पर उसमें 2° से अधिक ऐंठन न उत्पन्न हो ।

3. दो संकेंद्री इस्पात नलिकाओं के सिरों पर एक प्लेट वेल्ड की गई है। भीतरी नलिका का आंतरिक व्यास 50mm तथा उसकी मोटाई 5mm है। बाहरी नलिका पर 10 kN.m का ऐंठन बल आघूर्ण लगाया गया है। प्रत्येक नलिका में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान बताइये ।

(27 N/mm^2; 54 N/mm^2)

4. एक 3m लंबे शैफ्ट ABCD की संरचना इस प्रकार है :

AB तथा BC भाग ठोस हैं एवं उनके व्यास क्रमशः 100 तथा 80mm है। CD भाग खोखला है तथा इसका बाह्य व्यास 100mm एवं आंतरिक व्यास 60mm है। यदि प्रत्येक भाग में ऐंठन कोण समान हो, प्रत्येक भाग की लंबाई तथा कुल ऐंठन कोण का मान बताइये। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान 50 N/mm^2 है। शैफ्ट द्वारा पारेषित अधिकतम बल आघूर्ण का भी मान बताइये।

(131.5 cm; 53.85 cm, 114.65 cm
ऐंठन कोण = 1.450°; T = 5.03kN.m)

5. एक संयुक्त शैफ्ट का 600mm लंबा भाग ठोस ताँबे का बना है जिसका व्यास 100mm है तथा शेष 800mm लंबाई का भाग ठोस एल्युमिनियम का जिसका व्यास 150mm है तथा दोनों भागों को दृढ़तापूर्वक जोड़ा गया है। शैफ्ट के एक सिरे पर 12 kN.m का बल आघूर्ण लगाया गया है जब कि दूसरा सिरा बद्ध है। प्रत्येक पदार्थ में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल तथा संपूर्ण शैफ्ट में कुल ऐंठन कोण का मान ज्ञात कीजिए। ताँब के लिए G = 40 GPa एलुमिनियम के लिए भी G = 40 GPa

(61 N/mm^2: 8.1 N/mm^2, 1.37°)

6. एक शैफ्ट का एक सिरे पर अर्द्धव्यास ($r+a$) है तथा दूसरे सिरे पर समान रूप से घटता हुआ ($r - a$) हो गया है। यदि इस पर अक्षीय बल आघूर्ण T लग रहा हो तथा $a = 0.1\ r$ हो तो उसकी किसी लंबाई में ऐंठन कोण के मान में कितने प्रतिशत की त्रुटि होगी यदि यह मान लिया जाय कि उसका समान व्यास r है। (3.25%)

(लं० वि० वि०)

7. एक ठोस इस्पात का शैफ्ट 80mm व्यास का है तथा वह एक सिरे पर पूर्णतया बद्ध है, उसकी मुक्त लंबाई 5m है। इसके मुक्त सिरे पर एवं मुक्त सिरे से 2m की दूरीपर क्रमशः 81 kN.m का दक्षिणावर्त एवं 6kN.m का वामावर्ती ऐंठन

बल आघूर्ण लगाया गया है। शैफ्ट में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल तथा शैफ्ट के मुक्त सिरे का ऐंठन कोण ज्ञात कीजिए।

(79.6 N/mm^2; 3.91°)

8. एक शैफ्ट 110 घू० प्र० मि० पर 67kW शक्ति पारेषित करता है तथा इस पर एक समान ऐंठन बल आघूर्ण लग रहा है।

शैफ्ट में अपरूपण प्रतिबल का मान 70N/mm^2 तथा 2m लंबाई में ऐंठन कोण 2° से अधिक नहीं होना चाहिए। शैफ्ट का न्यूनतम व्यास ऐसी स्थिति के लिए ज्ञात कीजिए। (7.55 cm)

(लं० वि० वि०)

9. एक खोखले शैफ्ट का भीतरी व्यास उसके बाह्य व्यास का आधा है। यह 400 घू० प्र० मि० पर 30 kw शक्ति पारेषित करने के लिए डिजाइन किया गया है तथा उसमें 80 N/mm^2 से अधिक का अपरूपण प्रतिबल नहीं होना चाहिए। अतः (अ) खोखले शैफ्ट का बाह्य व्यास (ब) 2m की दूरी पर स्थित दो परिच्छेदों के मध्य सापेक्ष ऐंठन कोण तथा (स) उसी परिस्थिति के लिए खोखले शैफ्ट को प्रयोग करने पर प्रतिशत पदार्थ की बचत का मान ज्ञात कीजिए।

(लं० वि० वि०)

(3.43 cm 6.650 22%)

10. एक ठोस मिश्र धातु का शैफ्ट एक अन्य समान बाह्य व्यास वाले इस्पात के शैफ्ट से लंबाई में जोड़ा गया है। इस्पात शैफ्ट का भीतरी व्यास ज्ञात कीजिए यदि प्रति एकांक लंबाई में इसका ऐंठन कोण मिश्र धातु के शैफ्ट का 75% हो।

यदि मिश्र धातु एवं इस्पात में अधिकतम सीमांत प्रतिबलों का मान 50 तथा 75 N/mm^2 हो तो शैफ्ट द्वारा कितने घू० प्र० मि० पर 149 kw शक्ति पारेषित की जा सकती है। G_s=2.2 Gallo

(4.4cm, 1,915 घू० प्र० मि०)

11. एक युग्मक में 40 सेमी के अंतराल व्यास पर चार काबले लगे हुए हैं। काबलों का व्यास ज्ञात कीजिए यदि इसके द्वारा 200 घू०प्र०मि०पर 746kw शक्ति पारेषित की जा रही हो। काबले में अपरूपण प्रतिबल का मान 20N/mm^2 से अधिक नहीं होना चाहिए। अधिकतम ऐंठन बल आघूर्ण का मान औसत से 30% अधिक है। (6.08 cm)

12. एक कुंडलीदार कमानी का औसत व्यास उसमें प्रयुक्त तार के व्यास का छह गुणा है। यदि इस कमानी पर 500N का अक्षीय बल लगाया जाय तो इसमें 40mm का विक्षेप प्राप्त होता है। यदि तार में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान 300 N/mm^2 तक सीमित हो तो तार का व्यास एवं आवश्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

(5.05 mm 1.78 m)

13. एक कुंडलीदार कमानी में 12 मुक्त कुंडली हैं जिनका औसत व्यास 20mm है तथा इसमें प्रयुक्त तार का व्यास 2mm है। कमानी की आरंभिक लंबाई 60mm है। यदि इसकी लंबाई घटा कर 45mm करना हो तो कितना बल लगाना पड़ेगा? इस भार के कारण तार में कितना अधिकतम अपरूपण प्रतिबल उत्पन्न होगा।

(25 N, 159 N/mm^2)

14. एक सघन कुंडलीदार कमानी में N कुंडलियाँ हैं। यदि कमानी का औसत व्यास D उसमें प्रयुक्त तार के व्यास का 10 गुणा है तो सिद्ध कीजिए कि कमानी का विरूपण गुणक $\frac{D}{N} \times$ स्थिरांक होगा। इस स्थिरांक का मान बताइये।

यदि उपर्युक्त कमानी में 1 kN का भार लगाने से 100mm की दैर्घ्यवृद्धि होती है तो (अ) कमानी का भार बताइये। (ब) कुंडली का औसत व्यास तथा, (स) कुंडली संख्या ज्ञात कीजिए। तार पदार्थ का भार 8000 kg/m^3 मान लीजिए।

(10, 13N 90 mm, 9)

15. एक सयुक्त कुंडलिनी कमानी में भीतरी कमानी बाहरी कमानी के संकेंद्री स्थित है परन्तु लंबाई में बाहरी कमानी से 10mm छोटी है। बाहरी कमानी में 10 कुंडलियाँ हैं जिनका औसत व्यास 25mm है तथा इसके तार का व्यास 3mm है। यदि इस संयुक्त कमानी पर 150N का भार लगने पर बाहरी कमानी की लंबाई में 20mm की कमी होती है तो भीतरी कमानी का विरूपण गुणक बताइये।

यदि दोनों कमानियों के बीच त्रिज्य अवकाश 1.5 mm है तो भीतरी कमानी के तार का व्यास ज्ञात कीजिए यदि उसमें कुंडली की संख्या 8 है।

(लं० वि० वि०)

(0.46 N/mm^2 3.2 mm)

16. एक सघन कुंडलित कमानी 5mm व्यास के तार से बनाई गई है। ज्ञात कीजिए कि इस पर कितना ऐंठन बलाघूर्ण लगाया जाय जिससे कि उसमें 200 200N/mm^2 से अधिक बंकन प्रतिबल न उत्पन्न होगा।

(2.45 N.m)

अध्याय 8

द्वि-अक्षीय प्रतिबल युक्त अवयव

8.1 आंतरिक दाब वाले पतले बेलनी कोश

यदि किसी बेलनाकार पात्र में दाब युक्त तरल भर दिया जाय तो उसके दीवारों के अभिलंब की दिशा में एकसमान दाब लगता रहता है। यह दाब परिमिति के स्पर्श-रेखीय दिशा में पदार्थ पर एक विस्फोटी बल उत्पन्न करता है तथा इसको "परिधीय तनन अथवा हूप तनन" कहा जाता है। इसके अतिरिक्त तरल दाब सिरा प्लेटों पर भी सक्रिय होगा जो दोनों सिरों को बाहर धकेलने का प्रयत्न करेगा तथा इस प्रकार बेलन की दीवार में एक "अनुदैर्ध्य तनन" उत्पन्न होगा। परिधीय तथा अनुदैर्ध्य तनन की तीव्रता संपूर्ण मोटाई में अचर नहीं होती है, परन्तु जब दीवार की मोटाई सिलिंडर के व्यास के $\frac{1}{20}$ से कम होती है तब इसमें अधिक विचलन नहीं होता है तथा इसको पतला बेलन कहा जाता है। हूप अथवा अनुदर्ध्य प्रतिबल का मान ज्ञात करते समय निम्नांकित कल्पनायें सन्निहित होती हैं :—

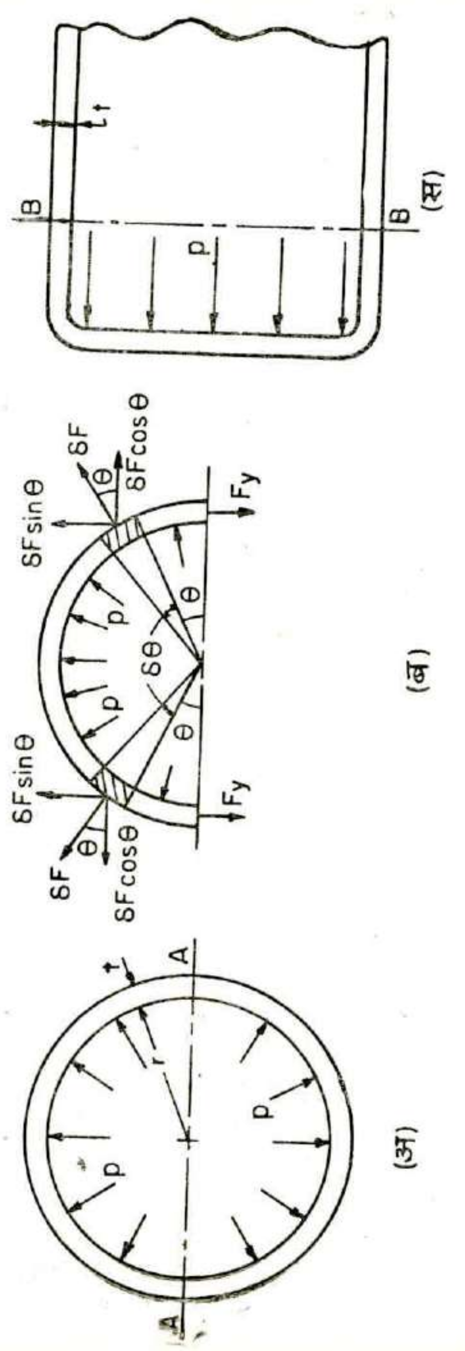
(1) दीवार की संपूर्ण मोटाई में प्रतिबल एक समान है।

(2) तरल तथा बेलन पदार्थ का भार नगण्य होता है।

(अ) हूप प्रतिबल

चित्र 8.1 (अ) में मान लीजिए बेलन का अर्द्धव्यास r उसकी दीवार मोटाई, t तथा उसमें आंतरिक दाब p है। बेलन की लंबाई एकांक मान ली गई है। परिच्छेद AA पर ध्यान दीजिए जो बेलन को दो अर्ध भागों में विभाजित करता है। बेलन का ऊपरी अर्धभाग, तरल दाब P तथा तनन बल 2Fy जो कि निचले अर्द्ध भाग द्वारा लगाया जा रहा है के अंतर्गत संतुलन अवस्था में है। एक छोटे अवयव की कल्पना कीजिए जो केंद्र पर $\delta\theta$ कोण बनाता है जैसा कि चित्र 8.1 (ब) में दिखाया गया है।

इस अवयव पर त्रिज्य बल $\delta F = p \times r\,\delta\theta \times 1$ ($r\delta\theta \times 1$ अवयव के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है जो कागज के समतल के अभिलंबवत है)।



चित्र 8.1

इस अवयव पर ऊर्ध्वाधर बल $= p \times \delta\theta \times \text{Sin}\ \theta$

ऊपरी अर्द्धभाग पर कुल ऊर्ध्वाधर बल $= 2 \int_{0}^{\pi/2} p \times r\ \delta\theta \times \text{Sin}\ \theta$

$= 2\ p.\ r = 2\ Fy$

इस अवयव पर लगने वाले बल का क्षैतिज घटक इसी प्रकार के दूसरे ओर स्थित अवयव पर के बल से निष्क्रिय हो जायगा जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

यदि पदार्थ में हूप प्रतिबल σy है, तब

$\sigma y \times 2t = 2\ Fy = 2p.\ r$

$$\sigma y = \frac{p.\ r}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.1)$$

यदि कोई अन्य अनुदैर्ध्य परिच्छेद लिया जाय तो उस स्थिति में अभिलंब प्रतिबल का मान समान ही होगा तथा उसकी दिशा परिधि के स्पर्शरेखीय होगी।

(ब) अनुदैर्ध्य प्रतिबल

चित्र 8.1(c) में दिखाये गये परिच्छेद B-B पर ध्यान दीजिए। आंतरिक तरल दाब p के कारण अक्षीय विस्फोटन बल $\pi r^2 p$ होगा। इस बल का प्रतिरोध करने वाला क्षेत्र वलय की अनुप्रस्थ काट $2\ \pi rt$ है। अतः यदि σ_x अक्षीय अथवा अनुदैर्ध्य प्रतिबल हो तो प्रतिरोधी बल का मान $2\ \pi rt \times \sigma_x$ होगा।

अत :

$$\pi r^2 p = 2\ \pi rt\ \sigma_x$$

$$\therefore\ \sigma_x = \frac{p.\ r}{2t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.2)$$

समीकरणों (8.1) तथा (8.2) से यह स्पष्ट है कि बेलन में एक समान आंतरिक दाब के कारण उत्पन्न परिधीय अथवा हूप प्रतिबल अनुदैर्ध्य प्रतिबल का दो गुना होता है। हूप प्रतिबल बेलन को अक्षीय लंबाई की दिशा में विस्फोट करने का प्रयत्न करते है तथा अनुदैर्ध्य प्रतिबल इसको अनुप्रस्थ परिच्छेद से विस्फोट करने का प्रयत्न करता है। अतः यह कहा जा सकता है कि आंतरिक दाब से युक्त पतले बेलन में लंबाई से कटने की संभावना अनुप्रस्थ परिच्छेद से फटने की संभावना से दो गुनी होती है।

उदाहरण 8.1 : एक जल मुख्य नल पर जिसका व्यास 2m तथा मोटाई 2cm है $1 N/mm^2$ का आंतरिक दाब लग रहा है। नल पदार्थ में हूप प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\text{हूप प्रतिबल} = \frac{P \times r}{t} = \frac{100 \times 200}{2 \times 2}$$

$$= 50 \ N/mm^2$$

उदाहरण 8.2 : एक वेल्ड किया हुआ पातनाड (Penstock) 2 मी व्यास तथा 12.5 mm मोटाई का है तथा उसमें जल का शीर्ष 160m है। पातनाड में अधिकतम अभिलंब प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।

यदि पातनाड को रिवेटों द्वारा जोड़ कर बनाया गया हो तथा अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता 80% हो तो उसी अधिकतम प्रतिबल के लिए जल का अनुमेय शीर्ष ज्ञात कीजिए। जल का भार 10000 N/ मी³ है ।

हल :

$$\text{जल दाब} = 10000 \times 160 = 1.6 \ MN/m^2$$

$$\text{हूप प्रतिबल} = \frac{p.r}{t} = \frac{1.6 \times 1 \times 100 \times 10^6}{1.25 \times 10^{-2}}$$

$$= 128 \ N/mm^2$$

चूंकि जोड़ की दक्षता 80% है, अनुमेय जल शीर्ष

$= 0.80 \times 160 = 128 \ m$

उदाहरण 8.3 : एक संपीड़ित गैस सिलंडर का आंतरिक व्यास 1.5 मी तथा दीवार 2 सेमी मोटी है। अनुदैर्ध्य तथा परिधीय संधियों की दक्षता क्रमश: 82 तथा 50 प्रतिशत है। सिलंडर पदार्थ का अधिकतम अनुमेय तनन प्रतिबल 100 N/mm^2 हो तो गैस का अनुमेय दाब ज्ञात करो ।

हल :

$$\text{हूप प्रतिबल} = \frac{pr}{\eta_l t}$$

जब कि, η_l अनुदैर्ध्य संधि की दक्षता है ।

$$100 = \frac{p \times 0.75 \times 100}{0.80 \times 2}$$

$$p = \frac{100 \times 0.80 \times 2}{75} = 2.13 \ N/mm^2$$

$$\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल} = \frac{p.\ r}{t \times 2}$$

जबकि m_c परिधीय संधि की दक्षता है ।

$$100 = \frac{p \times 75}{0.5 \times 2 \times 2}$$

$$p = 2.67 \ N/mm^2$$

परन्तु अनुमेय प्रतिबल दोनों में कम मान वाला होना चाहिए, अतः अनुमेय दाब $= 2.13 \ N/mm^2$

उदाहरण 8.4 : एक पीतल का 50 cm आंतरिक व्यास का हूप जिसकी मोटाई 1 cm है एक दूसरे इस्पात के 2 cm मोटे हूप पर कस कर बैठता है। दोनों हूप की चौड़ाई 2 cm है। यदि ताप 20° C कम हो जाय तो प्रत्येक हूप में प्रतिबल तथा उनके मध्य अभिलंब दाब का मान ज्ञात करो ।

$E_s = 200G\ Pa; \ \alpha_s = 12 \times 10^6/C^\circ \quad E_b = 100\ Gpa$

$\alpha_b = 20 \times 10^{-6}/^\circ C$

हल :—

दोनों हूप की मोटाइयाँ उनके व्यास के अपेक्षा काफी कम हैं अत: बिना अधिक त्रुटि के दोनों हूप का माध्य व्यास 50 सेमी० लिया जा सकता है ।

पीतल के हूप में संकुचन $= \pi \times 50 \times 20 \times 10^{-6} \times 180$ cm

इस्पात के हूप में संकुचन $= \pi \times 50 \times 12 \times 10^{-6} \times 180$ cm

इस्पात का संकुचन पीतल से कम होता है अतः इस्पात में संपीडन विकृति तथा पीतल में तनन विकृति होगी क्योंकि पीतल इस्पात को संपीडन में रखने का प्रयत्न करता है ।

इस्पात में संपीडन विकृति+पीतल में तनन विकृति

$$= \pi \frac{(20-12)\times 50\times 180\times 10^{-6}}{50\pi} = 8\times 180\times 10^{-6}$$

विधि I:--

यदि दोनों हूप में असमान संकुचन के कारण उनके मध्य दाब p है

पीतल में तनन प्रतिबल $(\sigma_b) = \frac{p\times 25}{1}$

इस्पात में संपीडन प्रतिबल $(\sigma s) = \frac{p\times 25}{2}$

पीतल में तनन विकृति $= \frac{p\times 25}{1\times 10\times 10^5}$

इस्पात में संपीडन विकृति $= \frac{p\times 25}{2\times 20\times 10^5}$

$$\frac{p\times 25}{10\times 10^5} + \frac{p\times 25}{2\times 20\times 10^5} = 8\times 180\times 10^{-6}$$

$$p = 4.61 \text{ N/mm}^2$$

इस्पात हूप में संपीडन प्रतिबल $= \frac{46.1\times 25}{2} = 57.6 \text{ N/mm}^2$

पीतल के हूप में तनन प्रतिबल $= \frac{46.1\times 25}{1} = 115.2 \text{ N/mm}^2$

विधि II:--

यदि σ_b तथा σ_s क्रमशः पीतल में (तनन) तथा इस्पात में (संपीडन) प्रतिबल हैं तथा इस संतुलनावस्था में कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है। तब इस्पात में संपीड़न बल का मान पीतल में तनन बल के बराबर होना चाहिए।

$$\sigma_b\times 1 = \sigma_s\times 2$$

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_b} = \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.3)$$

$$\frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{\sigma_b}{E_b} = \text{संपूर्ण विकृति}$$

$$\frac{\sigma_s}{20\times 10^5} + \frac{\sigma_b}{10\times 10^5} = 8\times 180\times 10^{-6} \quad . \quad . \quad (8.4)$$

समीकरणों (8.3) तथा (8.4) द्वारा

$$\sigma_s = 57.6 \text{ N/mm } 2$$

$$\sigma_b = 115.2\text{N/mm } 2$$

$$57.6 = \frac{p\times 25}{2}$$

$$\therefore \ p = \frac{576\times 2}{25} = 4.61 \text{ N/mm}^2$$

उदाहरण 8.5 : एक तांबे की नलिका को, जिसका बाह्य व्यास 10 सेमी तथा आंतरिक 9.5 cm है, 0.1 cm व्यास के इस्पात के तार से 20N/mm^2 के प्रतिबल से कुंडलित किया गया है। नलिका में 2 N/mm^2 का आंतरिक दाब लगाने के पश्चात् इसमें परिधीय प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए। नलिका में अनुदैर्ध्य प्रतिबल को नगण्य कर दीजिए। $E_s = 1.6\ E_c$

हल :

नलिकाओं को आंतरिक दाब से सक्षम बनाने के लिए साधारणतया इनको तार से तान कर कुंडलित कर दिया जाता है। अतः आंतरिक तरल दाब लगने से पहले नलिका संपीडन में होगी।

तार को एक बेलनाकार खोल से, जिसका अनुदैर्ध्य समतल में उसके बराबर ही अनुप्रस्थ परिच्छेद हो, प्रतिस्थापित किया जा सकता है। यदि खोल की मोटाई t_s हो तो,

$$tsxd = \pi/4.d^2$$

$$t_s = \pi/4\times 0.1 \text{ cm}$$

यदि नलिका में आरंभिक संपीडन हूप प्रतिबल σc_1 हो तथा इस पर किसी बाह्य बल के न लगने के कारण

$$\sigma c_1\times 0.25 = \pi/4\times 0.1\times 200$$

$$\sigma c_1 = 6.28 \text{ N/mm}^2$$

अतः आरंभ में नलिका में 6.28 N/mm^2 का संपीडन प्रतिबल तथा तार में 20 N/mm^2 का तनन प्रतिबल होगा ।

मान लीजिए कि आंतरिक दाब के कारण नलिका तथा तार में उत्पन्न प्रतिबल क्रमशः σ_c तथा σ_s हैं । तब नलिका के प्रति एकांक लंबाई पर विस्फोटन बल $2 \times p \times r$ के बराबर होगा ।

नलिका में प्रति एकांक लंबाई विस्फोटन बल $= 2 \times 200 \times \frac{10}{2} = 20000N$

तथा नलिका में प्रति एकांक लंबाई प्रतिरोधी बल $= \sigma_c 0.5 + \sigma_s 2 \times \pi/4 \times 0.1$

इसलिए $0.5\,\sigma_c + 0.1\,\frac{\pi}{2}\,\sigma_s = 200$ ....(8.5)

तार तथा बेलन सदैव संपर्क बनाये रखते हैं अतः आंतरिक दाब के कारण विकृति परिवर्तन समान होना चाहिए ।

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{1.6E_c}$$

अथवा $\sigma_s = 1.6\,\sigma_c$ ....(8.6)

समीकरणों (8.5) तथा (8.6) द्वारा

$\sigma_c = 26.6$ N/mm^2 (तनन)

नलिका में अंतिम प्रतिबल $= 26.6 - 6.28$

$= 20.32$ N/mm^2

8.2 आंतरिक दाब के कारण पतले बेलन में आयतन परिवर्तन

पिछले अनुच्छेद में यह स्पष्ट किया जा चुका है कि बेलन के किसी स्थल पर केवल दो प्रतिबल सक्रिय होते हैं एक परिधीय प्रतिबल $\frac{pr}{t}$ जो अनुदैर्ध्य परिच्छेद पर लगता है तथा दूसरा अनुदैर्ध्य प्रतिबल $\frac{pr}{2t}$ जो परिधीय परिच्छेद पर लगता है । ये दोनों ही अभिलंब तनन प्रतिबल हैं अतः ये ही मुख्य प्रतिबल भी हैं ।

परिधीय अथवा व्यासीय विकृति

$$E_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E}$$

अनुदैर्ध्य विकृति $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma y}{E}$

चूंकि आयतनिक विकृति $\frac{\delta v}{v} = (\varepsilon_x + 2\varepsilon y)$

यदि मूल आयतन ज्ञात हो तो आयतन में परिवर्तन δv ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण 8.6 : एक पतली दीवार का सिलिंडर जिनकी लंबाई l, व्यास d है t cm मोटी प्लेटो से बनाया गया है । उसमें आंतरिक दाब p लगता है । यह सिद्ध कीजिये कि इस दाब के कारण सिलिंडर के आयतन में वृद्धि $\pi pd^3 l(5-4\mu)$ होगी जब कि E प्रत्यास्थता मापांक तथा μ पोयशां अनुपात व्यक्त करता है ।

एक इस्पात का सिलिंडर 90 cm लंबा तथा 15 cm आंतरिक व्यास का है तथा इसके प्लेट की मोटाई 0.5 cm है । इसमें 7N/mm^2 का आंतरिक दाब लगता है । इस आंतरिक दाब के कारण इसके आयतन में 16 cm^3 की वृद्धि होती है । प्रत्यास्थता मापांक तथा पोयशां अनुपात का मान ज्ञात करो । मान लीजिए E = 210GPa (लं० वि०)

हल :

परिधीय अथवा व्यासीय विकृति ।

$$E_y = \frac{p.d}{2tE} - \frac{\mu p.d}{4t.E}$$

अनुदैर्ध्य विकृति $\varepsilon x = \frac{p.d}{4tE} - \frac{\mu pd}{2tE}$

$$\frac{\delta v}{v} = (\varepsilon x + 2\varepsilon y)$$

$$= \left[\frac{pd}{4tE} - \frac{\mu pd}{2tE} + \frac{pd}{2tE} - \frac{\mu pd}{2tE}\right.$$

$$\delta v = vx\,\frac{pd}{4tE}\left[1 - 2\mu + 4 - 2\mu\right]$$

$$\delta v = \frac{\pi pd^2 l}{16tE}\left(5 - 4\mu\right)$$

क्योंकि $V = \pi/4\ d^2.\ l.$

उपर्युक्त व्यंजक में $p = 7\ N/mm^2$; $d = 15cm$; $l = 90cm$; $t = 0.5cm$ तथा $E=210\ GPa$ तथा $\delta v = 16cm^3$ रखने पर

$$16 = \frac{\pi \times 70 \times (15)^3 \times 90}{16 \times 0.5 \times 210 \times 10^5}\ (5\text{–}4\mu)$$

$\mu = 0.25$

चूंकि $E = 2G\ (1+\mu)$

$210 \times 10^9 = 2G\ (1+0.25)$

$G =$ दृढ़ता मापांक $= 84\ GPa$

उदाहरण 8.7 : एक बेलनाकार टंकी की लंबाई 300cm, व्यास 200cm तथा मोटाई 1.5cm है । इसमे $1.5N/mm^2$ का आंतरिक दाब लगने पर धारिता में वृद्धि ज्ञात कीजिए, यदि (अ) टंकी पर कोई अक्षीय संपीडन भार नहीं पड़ रहा है (ब) टंकी पर 471 KN का अक्षीय संपीडन भार लग रहा है ।

दोनों परिस्थितियों में टंकी के पदार्थ पर लगनेवाले अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।

$\mu = 0.3$; $E = 200GPa$

हल :

$$(अ)\ \sigma y = \frac{p.r}{t} = \frac{1.5 \times 100}{1.5} = 100\ N/mm^2$$

$$\sigma x = \frac{p.r}{2t} = \frac{1.5 \times 100}{2 \times 1.5} = 50\ N/mm^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{100}{E} - \frac{0.3 \times 50}{E} = \frac{85}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{50}{E} - \frac{0.3 \times 100}{E} = \frac{20}{E}$$

$$\delta v = v(\varepsilon x + 2\varepsilon y)$$

$$= \frac{\pi}{4}(200)^2 \times 300 \left\{ \frac{20}{20 \times 10^4} + \frac{170}{20 \times 10^4} \right\}$$

$$= 8949\ cm^3$$

$$\text{अधिकतम अपरूपण प्रतिबल}\ \frac{\sigma y - \sigma x}{2} = \frac{100-50}{2} = 25\ N/mm^2$$

$$(ब)\ \sigma y = 100\ N/mm^2$$

$$\sigma x = 50 - \frac{47{,}1000}{\pi \times 200 \times 1.5 \times 100} = 45\ N/mm^2$$

$$\varepsilon y = \frac{100}{E} - \frac{0.3 \times 45}{E} = \frac{86.5}{E}$$

$$\varepsilon x = \frac{45}{E} - \frac{0.3 \times 100}{E} = \frac{15}{E}$$

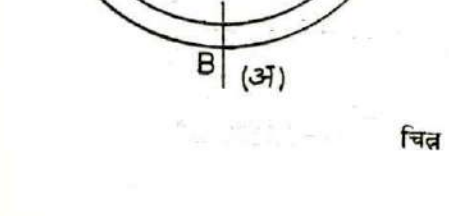
$$\delta v = v\ (2\varepsilon y + \varepsilon x) = \pi/4\ (200)^2 \times 300 \left(\frac{2 \times 86.5}{20 \times 10^4} + \frac{15}{20 \times 10^4} \right)$$

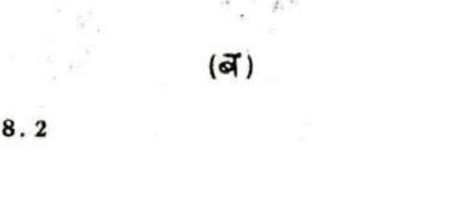
$$\delta v = 8{,}855\ cm^3$$

$$\text{अधिकतम अपरुपण प्रतिबल} = \frac{100-45}{2} = 27.5\ N/mm^2$$

8.3 गोलाकार पतले खोल

मान लीजिए चित्र 8.2 (अ) में गोलाकार खोल का अर्द्धव्यास r, दीवार की एकसमान मोटाई t तथा उसमें लगनेवाला आंतरिक दाब p है । खोल की किसी व्यासीय समतल में विभंग होने की प्रवृत्ति होगी । एक व्यासीय समतल A-A की कल्पना कीजिए । ऊपरी अर्ध गोल चित्र 8.2 (ब) में दिखाये गये बलों के अंतर्गत संतुलनावस्था में होगा ।





चित्र 8.2

एक छोटे वलय पर ध्यान दीजिए जिसका आंतरिक पृष्ठ cc'D'D तथा इसका परिधीय अंश केन्द्र पर $\delta\theta$ कोण बनाता है। वलय का अर्द्धव्यास $\frac{cc'}{2}$ अथवा $\frac{DD'}{2}$ अर्थात $r\cos\theta$ होगा।

इस वलय पर ऊर्ध्वाधर विस्फोटन बल :

$$\delta F_y = 2\pi r\cos\theta \times r\delta\theta \times p \times \sin\theta$$

$$= 2\pi r^2 p \sin\theta . \cos\theta . d\theta$$

संपूर्ण विस्फोटन बल

$$F_y = \int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 p . \sin\theta . \cos\theta . d\theta$$

$$= \pi r^2 p$$

संपूर्ण प्रतिरोधी बल $= 2\pi r . t . \sigma y$

जब कि σy पदार्थ में हूप प्रतिबल है।

$$2\pi r t . \sigma y = \pi r^2 p$$

$$\sigma y = \frac{pr}{2t} \qquad (8.7)$$

इसी प्रकार यदि AA के अभिलंब परिच्छेद BB लिया जाय तो यह दर्शाया जा सकता है कि,

$$\sigma_x = \frac{pr}{2t}$$

"इस प्रकार पतले गोलाकार खोल के किसी स्थल पर दो समान रूप के तथा बराबर मान के मुख्य प्रतिबल क्रियाशील होते हैं। पदार्थ में प्रत्येक स्थान पर अपरुपण प्रतिबल का मान शून्य होता है तथा प्रत्येक समतल मुख्य समतल को व्यक्त करता है"।

8.4 पतले गोलाकार खोल के आयतन में वृद्धि

गोलाकार खोल का आयतन $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

आयतन में परिवर्तन $\delta v = \frac{4}{3} \times \pi \times 3r^2 . \delta r$

आयतनिक विकृति $= \frac{\delta v}{v} = \frac{3\delta r}{r} = \frac{3\delta d}{d}$

परिधीय अथवा व्यासीय विकृति

$$= \frac{\sigma y}{E} - \frac{\mu\sigma x}{E} = \frac{pr}{2tE} - \frac{\mu pr}{2tE}$$

आयतनिक विकृति $= \frac{\delta v}{v} = \frac{3\delta d}{d} = \frac{3pr}{2tE}(1-\mu)$

आयतन में परिवर्तन $\delta v = \frac{3pr}{2tE}(1-\mu) \times v \qquad (8.8)$

उदाहरण 8.8 : एक 480cm व्यास के गोलाकार खोल की जिसके पदार्थ की चरम तनन सामर्थ्य $300 N/mm^2$ है; न्यूनतम मोटाई बताइये यदि इसमे $1.5 N/mm^2$ का आंतरिक दाब लग रहा हो। सुरक्षा गुणक 5 मान लीजिए।

हल :

अनुमेय प्रतिबल $= \frac{300}{5} = 60 N/mm^2$

$$60 = \frac{1.5 \times 240}{2t} \quad ; \quad t = 3 \text{ cm}$$

उदाहरण 8.9 : एक पतला गोलाकार खोल जिसका व्यास 100cm तथा मोटाई 1cm है पानी से भरा गया है। इसमें जल दाब $5 N/mm^2$ करने के लिए कितना पानी पंप करना पड़ेगा। $\mu = 0.3$; $E = 200 GPa$

हल :

$$\text{व्यासीय विकृति} = \frac{pr}{2tE} - \frac{\mu pr}{2tE}$$

$$= \frac{5 \times 500}{2 \times E} - \frac{0.3 \times 5 \times 500}{2 \times E}$$

$$= \frac{875}{E}$$

$$\therefore \delta v = \frac{3\delta d}{d} \times v = \frac{3 \times 875}{E} \times \frac{4}{3}\pi(50)^3$$

$$= 690 cm^3$$

अभ्यास प्रश्नमाला

1. एक 1000mm के आंतरिक व्यास, 20mm मोटे तथा 2m लंबे पतले बेलनाकार कोश में $1 N/mm^2$ का आंतरिक दाब लग रहा है। इसमे हूप तथा अनुदैर्ध्य प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए।

($25 N/mm^2$, $12.5 N/mm^2$)

2. एक 2m व्यास के भाप बॉयलर के निर्माण में प्रयुक्त इस्पात की चरम तनन सामर्थ्य $400 N/mm^2$ तथा बॉयलर कोश की मोटाई 15mm है । यदि सुरक्षा गुणक 5 तथा संधि दक्षता 80 प्रतिशत हो तब प्रयोग की जाने वाली भाप का अनुमेय दाब ज्ञात कीजिए ।

($0.96 N/mm^2$)

3. एक लंबी 15cm आंतरिक व्यास तथा 0.25cm मोटाई की नलिका का पराभवन $300 N/mm^2$ पर होता है । यदि नलिका के सिरों को पूर्णतया बंद करके आंतरिक दाब लगाया जाय तो पराभव होने के लिए इस दाब का मान बताइये यदि यह (अ) अधिकतम मुख्य प्रतिबल के आधार पर (ब) अधिकतम अपरूपण प्रतिबल के आधार पर, होता है । ($10 N/mm^2$, $20 N/mm^2$)

4. एक पहिये पर लगे इस्पात के हाल का आंतरिक व्यास उस पहिये के व्यास से 0.1cm कम है । हाल की मोटाई 2cm तथा पहिये का व्यास 150cm है यह कल्पना करते हुए कि हाल के पहिये पर चढ़ जाने के बाद पहिये का व्यास 0.02cm कम हो जाता है (अ) हाल में दैर्घ्यवृद्धि (ब) हाल में हूप प्रतिबल तथा (स) हाल का पहिये पर दाब, ज्ञात कीजिए । E=200GPa; (0.2512cm; $107 N/mm^2$; $2.86 N/mm^2$)

5. एक ऊर्ध्वाधर वेलनाकार टंकी 250cm व्यास की तथा 25m ऊँची है । टंकी का मुंह खुला तथा जल से भरी हुई है । खोल की मोटाई 0.3cm है । यदि जल का घनत्व 1000 किलो/m^3 हो तो टंकी पदार्थ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल की मात्रा ज्ञात कीजिए ।

($104.1 N/mm^2$)

6. एक इस्पात नलिका पर, जिसका व्यास 20cm तथा दीवार की मोटाई 0.5 cm है, 0.25cm व्यास का तार एक दूसरे से छूता हुआ लपेट दिया गया है । यदि नलिका में 20 N/mm^2 का आंतरिक दाब लगने के पश्चात प्रतिबल की मात्रा $10 N/mm^2$ हो तो किस प्रतिबल पर तार को लपेटा जाना चाहिए । तार के तथा नलिका के पदार्थों का प्रत्यास्थता मापांक समान है ।

($48.1 N/mm^2$)

7. एक 10cm आंतरिक व्यास तथा 0.2 cm मोटी इस्पात नलिका के दोनों सिरों को बंद करके 1 N/mm^2 का आंतरिक दाब लगाया गया है । यदि 4=0.25 तथा E = 200 GPa हो तो नलिका की धारिता में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिये । (0.025%)

8. एक गैस संग्रह करने वाली गोलाकार टंकी का व्यास 20 m है । इसके दीवार की मोटाई 1.5 cm है तथा इसके भीतर गैस दाब 0.6 N/cm^2 है । टंकी पदार्थ में उत्पन्न आधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए । यदि पदार्थ की चरम सामर्थ्य 500 N/mm^2 हो तो सुरक्षा गुणक का मान बताइये ।

(200 N/mm^2; 2.5)

9. प्वांसो अनुपात के रूप में व्यक्त करते हुए, पतले बेलनाकार खोल तथा गोलाकार खोल, जिनके आंतरिक दाब, व्यास, आयतन तथा मोटाई समान हैं, के आयतन परिवर्तन का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

$$\left(\frac{5-4\mu}{3(1-\mu)}\right)$$

अध्याय 9

संयुक्त भार वाले अवयव

9.1 विषय प्रवेश

अध्याय 4, 5, तथा 7 में एसे अवयवों का विश्लेषण किया गया है जो केवल अक्षीय, बंकन, अथवा मरोडी भार वहन कर रहे हों। वास्तविक परिस्थितियों में ऐसा बहुत कम ही संभव हो पाता है जब मशीनी अवयव कार्यकारी परिस्थिति में केवल एक ही प्रकार का भार वहन कर रहे होते हैं। सामान्यत: वे अक्षीय, बंकन, तथा मरोडी भार में से किन्हीं दो अथवा तीनों प्रकार के भार किसी एक क्षण पर वहन कर रहे होते हैं। इस प्रकार के भारण को संयुक्त-भारण कहा जाता है। इस अध्याय में ऐसे अवयवों का विश्लेषण किया जायगा जो उपरिवर्णित संयुक्त भार वहन कर रहे हों।

9.2 अक्षीय भारयुक्त बंकन

एक ऐसे अवयव की कल्पना कीजिए जिसमें एक अक्षीय भार P तथा विशुद्ध बंकन बल आघूर्ण M क्रियाशील हो। जैसा कि हम देख चुके हैं अक्षीय भार के कारण अवयव के संपूर्ण अनुप्रस्थ काट पर एकसमान तीव्रता का अभिलंब प्रतिबल उत्पन्न होगा। बंकन बल आघूर्ण के कारण भी अवयव के अनुप्रस्थ काट पर अभिलंब प्रतिबल उत्पन्न होगा जिसका मान परिवर्ती होगा एवं बंकन सूत्र से प्रतिबल का मान ज्ञात किया जा सकता है। यदि यह भारण प्रत्यास्थता सीमा के भीतर हो जैसा प्राय: होता है तब अध्यारोपण सिद्धात का प्रयोग करते हुए अवयव के अनुप्रस्थ काट के किसी भी बिन्दु पर परिणामी प्रतिबल का मान प्राप्त किया जा सकता है। इस स्थिति मे चूंकि दोनों प्रकार के भारों से अभिलंब प्रतिबल उत्पन्न होगा अत: किसी बिन्दु पर परिणामी प्रतिबल दोनों प्रतिबलों का बीजीय योग होगा।

मान लीजिए अवयव आयताकार परिच्छेद का है जिसके अनुप्रस्थ काट की चौड़ाई b तथा मोटाई d है। अत: ;

अक्षीय बल के कारण उत्पन्न

एक समान तीव्रता का प्रतिबल $= \dfrac{P}{b\,d}$ ....(9.1)

बकन बल आधूर्ण के कारण अधिकतम प्रतिबल

$$= \pm \frac{M}{\frac{b\,d^3}{12}} \times \frac{d}{2}$$

$$= \pm \frac{6M}{bd^2} \quad . \quad (9.2)$$

अत: अवयव में अधिकतम परिणामी प्रतिबल का मान

$$= \frac{P}{bd} \pm \frac{6M}{bd^2} \quad . \quad . (9.3)$$

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि व्यंजक (9.3) के प्रथम $\left(\frac{P}{bd}\right)$ भाग का बीजीय चिन्ह धनात्मक अथवा ऋणात्मक दोनों ही संभव है। यदि P संपीडन बल है तब इसका मान ऋणात्मक होता तथा यदि P तनन बल है तब इसका मान धनात्मक होगा। जहाँ तक दूसरी राशि का संबंध है उसका समुचित चिन्ह बंकन की दिशा (अवतल अथवा उत्तल) एवं उस बिन्दु की ज्यामितीय स्थिति पर निर्भर करेगा जिस पर परिणामी प्रतिबल ज्ञात किया जाना है। चूंकि यह संभव है कि प्रथम एवं द्वितीय राशियों के बीजीय चिन्ह विपरीत हों। अत: परिणामी प्रतिबल का मान कुछ विशेष परिस्थितियों में शून्य भी हो सकता है।

उदाहरण 9.1 : दो मीटर लंबाई की सरल आधारित धरन का परिच्छेद 100mm चौड़ा तथा 150mm मोटा है। धरन के मध्य बिन्दु पर 5 kN का संकेन्द्री भार लग रहा है; इसके अतिरिक्त इस पर 15 kN का अक्षीय तनन भार भी क्रियाशील है। धरन के विस्तृति के मध्य परिच्छेद पर ऊपरी एवं निचले रेशों में प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए। धरन के एक सिरे से उस परिच्छेद की दूरी भी ज्ञात कीजिए जिसके ऊपरी रेशे में प्रतिबल शून्य हो।

हल :

मध्य विस्तृति परिच्छेद पर अक्षीय प्रतिबल $= \dfrac{15 \times 10^3}{150 \times 100} = 1 \text{N/mm}^2$

इस परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण $M = \dfrac{W\,l}{4} = \dfrac{5 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{4}$ (N. mm)

परिच्छेद का जडत्व आघूर्ण $= \dfrac{bd^3}{12} = \dfrac{100 \times (150)^3}{12}$ mm^4

ऊपरी तथा निचले रेशे हेतु $y = \dfrac{150}{2}$

अत: बंकन प्रतिबल $= \dfrac{M}{I}\, y = \pm \dfrac{6M}{bd^2}$

$= \pm\, 6 \times \dfrac{10^7}{1} \times \dfrac{1}{(100 \times 150^2)} = 6.67 \text{ N/mm}^2$

चूंकि धरन के मध्य बिन्दु पर संकेन्द्री भार ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में लग रहा है। अतः धरन के ऊपरी रेशे में बकन प्रतिबल का मान ऋणात्मक तथा निचले रेशे में धनात्मक होगा ।

यहाँ यह भी उल्लेखनीय है कि परिच्छेद के उपरी तथा निचले रेशों पर अपरुपण प्रतिबल का मान शून्य होगा ।

अतः ऊपरी रेशे पर परिणामी प्रतिबल $= -6.67 + 1.0$
$= -5.67 \text{ N mm}^2$

निचले रेशे में परिणामी प्रतिबल $= 6.67 + 1.0$
$= 7.67 \text{ N/mm}^2$

मान लीजिए बाये सिरे से x mm की दूरी पर स्थित परिच्छेद में ऊपरी रेशों में परिणामी प्रतिबल का मान शून्य होगा; अतः इस परिच्छेद पर

बंकन बल आघूर्ण $= \frac{W}{2} x = \frac{5 \times 10^3 \times x}{2}$ N.mm

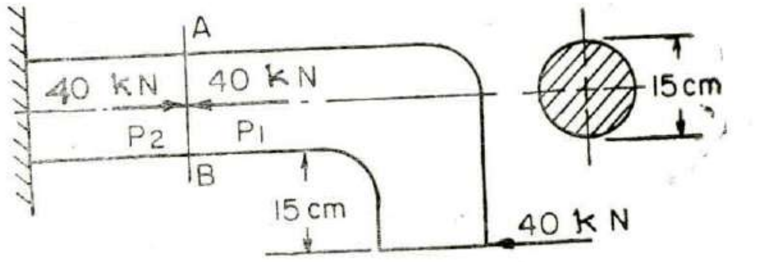
एवं बंकन प्रतिबल $= -\frac{6M}{bd^2} = -\frac{6 \times 5 \times 10^3 \times x}{100 \times (150)^2}$

तथा आक्षीय प्रतिबल $= 1 \text{ N/mm}^2$

अतः $-\frac{6M}{bd^2} + 1 = 0$; अथवा $\frac{6 \times 5 \times 10^3 \times x}{2 \times 100 \times (150)^2} = 1$

$$x = \frac{100 \times (150)^2}{6 \times 5 \times 10^3} = 2 \times 75\text{mm} = 150 \text{ mm}$$

उदाहरण 9.2 : एक L आकार वाले 150 mm व्यास के धातु खंड पर ऊर्ध्वाधर सममितीय समतल में एक 40 kN का क्षैतिज बल लगाया गया है। परिच्छेद AB के ऊपरी तथा निचली सतह के रेशों में प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।



चित्र 9.1

हल :

चित्र 9.1 देखिये । धातु खंड के किसी परिच्छेद जैसे AB पर दो बराबर परिमाण के परन्तु विपरीत दिशा में लग रहे बल लगाइये जिनका मान 40 kN है। ऐसा करने से किसी बिन्दु पर प्रतिबल की मात्रा तथा संतुलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा ।

क्षैतिज भाग के किसी परिच्छेद पर $P = 40$ kN का अक्षीय भार वाह्य बल P_2 के साथ संयुक्त रूप से दक्षिणावर्त बलयुग्म बनाएगा जिसका परिमाण $40 \times 10^3 (15 + 7.5)$ N.cm है तथा यह भाग में दक्षिणावर्त बंकन उत्पन्न करेगा। धातु खंड के संपूर्ण क्षतिज भाग में बंकन बल आघूर्ण का यह मान एक समान रहेगा।

अभिलंब संपीड़न प्रतिबल $= \frac{40000}{\pi/\pi(15)^2} = 2.26 \text{ N/mm}^2$

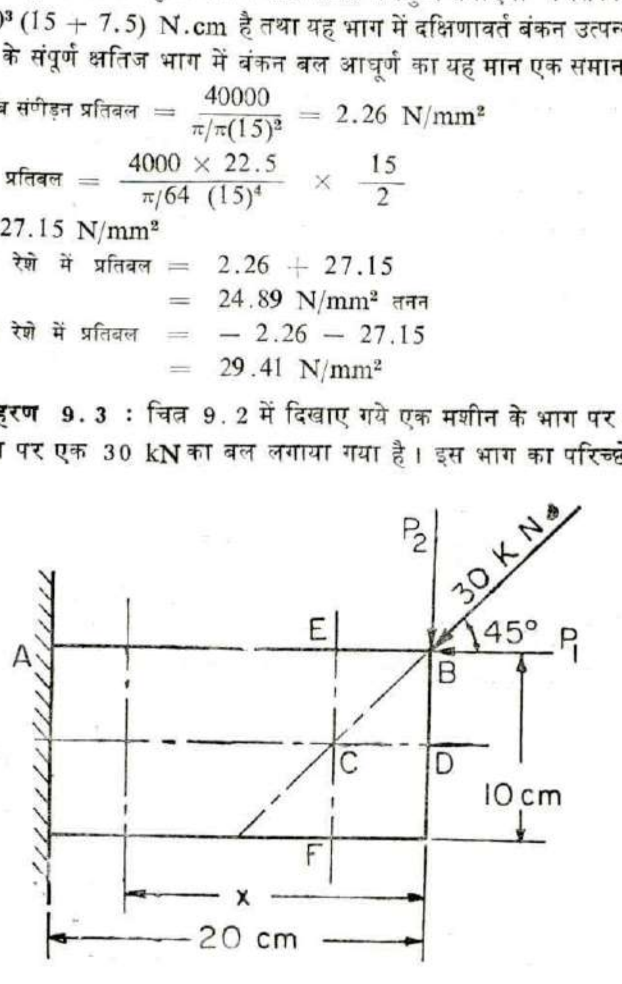
बंकन प्रतिबल $= \frac{4000 \times 22.5}{\pi/64 \ (15)^4} \times \frac{15}{2}$

$= 27.15 \text{ N/mm}^2$

ऊपरी रेशे में प्रतिबल $= 2.26 + 27.15$
$= 24.89 \text{ N/mm}^2$ तनन

निचले रेशे में प्रतिबल $= -2.26 - 27.15$
$= 29.41 \text{ N/mm}^2$

उदाहरण 9.3 : चित्र 9.2 में दिखाए गये एक मशीन के भाग पर क्षैतिज से 45° कोण पर एक 30 kN का बल लगाया गया है। इस भाग का परिच्छेद 2 cm



चित्र 9.2

चौड़ा तथा 10 cm मोटा आयताकार है । अधिकतम तथा न्यूनतम बंकन बल आघूर्ण लगने वाले परिच्छेदों को बताइये । इन परिच्छेदों के ऊपरी तथा निचले रेशों पर प्रतिबल का मान भी बताइए ।

हल :

बिन्दु B पर लग रहे 30 kN के बल को दो घटकों में प्रथम 30000cos 45N क्षैतिज तथा 30000sin 45N के ऊर्ध्वाधर बलों में विभाजित किया जा सकता है । इसके अतिरिक्त बिन्दु B पर लग रहे 30000cos 45N के बल को बिन्दु B पर इसी परिमाण के एक क्षैतिज बल तथा एक आघूर्ण से जिसका मान 30000cos 45×BD है, प्रतिस्थापित किया जा सकता है । अतः सिरा B से X काफी दूरी पर स्थित किसी परिच्छेद पर निम्नप्रकार के बल लगेंगे–

(अ) एक 30000 sin 45 N का अपरुपण बल तथा 30000sin 45×x का एक ऋणात्मक बंकन बल-आघूर्ण ।

(ब) 30000 cos 45 का एक अभिलंब संपीडन बल ।

(स) एक धनात्मक बंकन बल-आघूर्ण जिसका मान 30000 cos 45×BD होगा ।

अतः दाहिने सिरे से X cm की दूरी पर लगने वाले बंकन बल आघूर्ण का मान $= 30000 \sin 45 \times x - 30000 \cos 45 \times 5$.

इस प्रकार X = 5 cm की दूरी वाले परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण का मान शून्य होगा । ज्यामिति के साधारण प्रयोग से भी यह स्पष्ट है कि 30000 N का कोणीय बल बिन्दु C से होकर जायगा । यह बिन्दु C शून्य बंकन बल आघूर्ण वाले परिच्छेद का उदासीन अक्ष से परिच्छेदन को व्यक्त करता है ।

इस परिच्छेद पर केवल अभिलंब संपीडन बल 30000 cos 45 के कारण प्रतिबल उत्पन्न होगा ।

ऊपरी तथा निचले रेशों में संपीडन प्रतिबल

$$= \frac{30000 \text{Cos} 45}{2\times10} = 10.6 \text{N/mm}^2$$

अधिकतम बंकन बल आघूर्ण बद्ध सिरे पर होगा जहाँ पर X का मान 20 cm है ।
अधिकतम बंकन बल आघूर्ण $= 30000 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 20 - 30000 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 5$

$$= 31{,}8150 \text{N.cm}$$

$$\text{बंकन प्रतिबल} = \frac{318150}{2\times(10)^3} \times \frac{10}{2} \times 12$$

$$= 95.45 \text{ N/mm}^2$$

चूंकि बंकन बल आघूर्ण ऋणात्मक है अतः ऊपरी रेशे में तनन प्रतिबल तथा निचले रेशे में संपीडन प्रतिबल उत्पन्न होगा ।

ऊपरी रेशों में प्रतिबल $= 95.46 - 10.6$

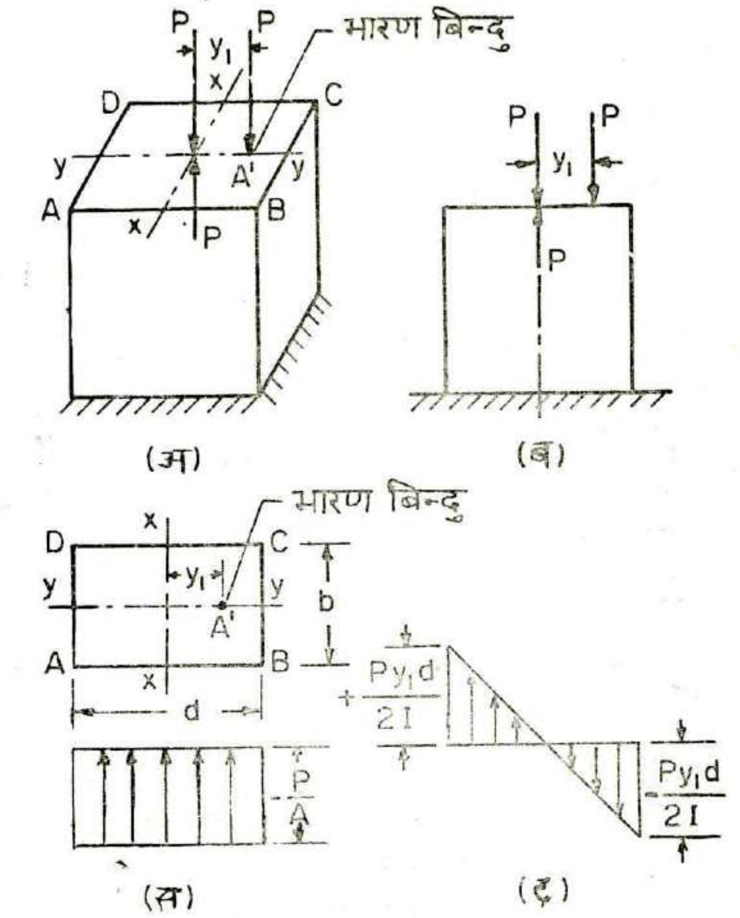
$= 84.86 \text{N/mm}^2$ (तनन)

निचले रेशे में प्रतिबल $= -95.46 - 10.6$

$= 106.06 \text{N/mm}^2$ (संपीडन)

9.3 स्तंभ का उत्केंद्री भारण

एक छोटा आयताकार स्तंभ जिसकी विमायें b तथा d हैं आधार से बद्ध है जैसा कि चित्र 9.3(अ) में दिखाया गया है । इसके ऊपरी सिरे पर ऊर्ध्वाधार अक्ष से y_1 की दूरी पर एक भार P लग रहा है । भार P ऊर्ध्वाधर सममिति तल में स्थित है । यदि अब अक्ष पर दो समान परन्तु विपरीत दिशा वाले भार लगाये जाँय जिनका मान P है तो स्तंभ पर एक अक्षीय भार P तथा बंकन बल आघूर्ण Py_1 लगेगा जो कि स्तंभ का XX के सापेक्ष बंकन करेगा । यह बंकन बल आघूर्ण स्तंभ के बायें पार्श्व के रेशों में तनन प्रतिबल उत्पन्न करेगा । अभिलंब अक्षीय बल तथा बंकन बल आघूर्ण के कारण उत्पन्न प्रतिबलों का स्तंभ के आधार पर बंटन चित्र (स) तथा (द) में दिखलाया गया है ।



चित्र 9.3

दाहिने पार्श्व पर प्रतिबल $= -\frac{P}{A} - \frac{Py_1 \times d/2}{Ixx}$

$$= -\frac{P}{bd} - \frac{6Py_1}{bd^2} \left(\text{चूंकि } A = bd \text{ तथा } Ixx = \frac{bd^3}{12} \right)$$

यह सदैव संपीडन प्रतिबल होगा चाहे y_1 का मान कुछ भी हो बायें पार्श्व पर प्रतिबल

$$= -\frac{P}{A} + \frac{Py_1 . d/2}{Ixx}$$

$$= -\frac{P}{bd} + \frac{6Py_1}{bd^2}$$

यह तनन अथवा संपीडन दोनों ही हो सकता है यह दूसरी राशि के मान पर निभर करेगा ।

कुछ भवन संबंधी संरचनायें विशेष कर उस प्रकार की कंक्रीट तथा सीमेंट से निर्मित जो प्रवलित नहीं होती, वे प्राय: तनन में निर्बल होती हैं अत: यह ध्यान रखा जाता है कि उन में तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो । अत: उपर्युक्त उदाहरण में यदि बायें पार्श्व में कोई तनन प्रति बल न उत्पन्न होने दिया जाय (जिसमें अधिकतम तनन प्रतिबल उत्पन्न हो सकता है) तब $\frac{P}{pd} \geq \frac{6Py_1}{bd^2}$ उत्केंद्रता का अधिकतम मान जिससे कि बायें पर्श्व में तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है –

$$\frac{P}{bd} = \frac{6Py_1}{bd^2}$$

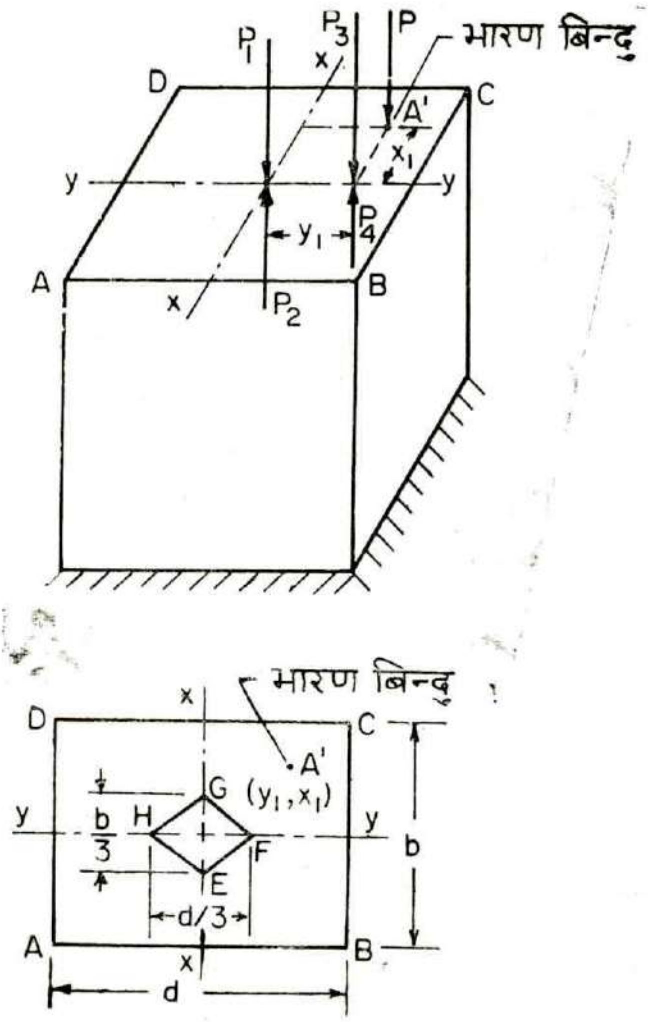
$$\text{अत } y_1 = \frac{d}{6}$$

चूंकि P ऊर्ध्वाधार अक्ष के दोनों ओर सक्रिय हो सकता है अत: दोनों तरफ उत्केंद्रता का मान d/6 से अधिक नहीं होना का चाहिए अत: यह निष्कर्ष निकाला जा सकता हैं कि "भार के विमा d के मध्यवर्ती एक तिहाई भाग में सक्रिय होने से स्तंभ में तनन प्रतिबल को उत्पन्न होने से रोका जा सकता है" ।

इसी विधि से अन्य प्रकार के परिच्छेदों के लिए भी निष्कर्ष निकाला जा सकता है उदाहरणार्थ एक ठोस वृत्ताकार परिच्छेद के लिए उत्केंद्रता का मान d/8 से अधिक नहीं होना चाहिए यहाँ d स्तंभ -परिच्छेद के व्यास को व्यक्त करता है ।

यदि भार दोनों ऊर्ध्वाधार सममिति समतलो के सापेक्ष उत्केंद्री हो तथा क्रमश: दोनों अक्षों से x_1 तथा y_1 की दूरी पर लग रहा हो जैसा कि चित्र (9.4) में दिखाया गया है तब स्तंभ का दोनों अक्षों के सापेक्ष बंकन होगा तथा इसका विश्लेषण निम्नविधि से किया जाना चाहिए ।

परिच्छेद के गुरुत्व केंद्र तथा एक अक्ष के नियत बिन्दु पर दो समान मान के परन्तु विपरीत दिशाओं में लगने वाले भार लगा दीजिए जैसा कि चित्र (9.4) में दिखाया गया है । चूंकि $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ अतः ऐसा करने से न तो प्रतिबल के मान में कोई अन्तर आता है और न ही संतुलन की स्थिति में कोई परिवर्तन होता है । ऐसा करने से विश्लेषण अवश्य सरल हो जाता है ।



चित्र 9.4

स्तंभ में इस प्रकार निम्न प्रतिबल लगेंगे :

(1) अक्षीय बल $P_1 = P$ यह P/A के बराबर संपीडन प्रतिबल उत्पन्न करेगा ।

(2) बल P_4 तथा P एक बल युग्म बनायेंगे जिसका मान $P.x_1$ होगा जो कि yy के सापेक्ष बंकन उत्पन्न करेगा तथा इस प्रकार उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान $\pm \frac{Px_1}{Iyy} \times \frac{b}{2}$ होगा तथा यह क्रमशः फलकों AB तथा CD पर होगा ।

(3) बल P_3 तथा P_2 एक बलयुग्म बनायेंगे जिसका मान $P.y_1$ होगा जो कि XX के सापेक्ष बंकन उत्पन्न करेगा तथा इस प्रकार उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान $\pm \frac{Py_1}{Ixx} \times \frac{d}{2}$ होगा तथा यह क्रमशः फलकों DA तथा CB पर होगा,

$$\text{कोना A पर प्रतिबल} = -\frac{P}{A} + \frac{Px_1 \times b/2}{Iyy} + \frac{Py_1 \times d/2}{Ixx}$$

$$= -\frac{P}{bd} + \frac{6Px_1}{db^2} + \frac{6Py_1}{bd^2}$$

$$\text{कोना B पर प्रतिबल} = -\frac{P}{bd} + \frac{6Px_1}{db^2} - \frac{6Py_1}{bd^2}$$

$$\text{कोना C पर प्रतिबल} = -\frac{P}{bd} - \frac{6Px_1}{db^2} - \frac{6Py_1}{bd^2}$$

$$\text{कोना D पर प्रतिबल} = -\frac{P}{bd} - \frac{6Px_1}{db^2} + \frac{6Py_1}{bd^2}$$

परिच्छेद में अधिकतम संपीडन प्रतिबल कोना C पर होगा जहाँ दोनों ही बंकन प्रतिबल संपीडन में हैं तथा न्यूनतम संपीडन प्रतिबल अथवा अधिकतम तनन प्रतिबल कोना A पर होगा जहाँ दोनों बंकन प्रतिबल तनन में हैं ।

परिच्छेद के किसी बिन्दु पर अर्थात कोना A पर यदि तनन प्रतिबल न उत्पन्न होने दिया जाय तो,

$$\frac{P}{bd} \geqq \frac{6Px_1}{b^2d} + \frac{6Py_1}{d^2b}$$

$$\text{अथवा } 1 \geqq \frac{6x_1}{b} + \frac{6y_1}{d}$$

उस सीमान्त अवस्था में जब कि तनन प्रतिबल का मान ठीक शून्य हो तब,

$$\frac{6x_1}{b} \times \frac{6y_1}{d} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9.4)$$

समीकरण (9.4) एक सरल रेखा FG को व्यक्त करता है जो Y-अक्ष एवं X—अक्ष पर क्रमश: d/6 तथा b/6 का अंतर्छेद बनाती है । यदि भार P इसी प्रकार अन्य तीन चतुष्खंडों में सक्रिय हो तब इसी विधि से तीन अन्य रेखायें GH,HE तथा EF प्राप्त होंगे । यदि इन चार सरल रेखाओं द्वारा निर्मित सीमा समलंब चतुर्भुज EFGH के भीतर कहीं पर भी बल लगे तो परिच्छेद में कहीं भी तनन प्रतिबल नहीं उत्पन्न होगा । इस चतुर्भुज के कर्ण परिच्छेद के मुख्य विमाओं का मध्यवर्ती एक तिहाई भाग होता है ।

उदाहरण 9.4 : एक वृत्ताकार परिच्छेद के स्तंभ पर जिसका व्यास d है लगनेवाले भार की अधिकतम उत्केंद्रता बतलाइये जिससे कि किसी बिन्दु पर तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो ।

हल :

तनन प्रतिबल न उत्पन्न होने के लिए,

$$\frac{P}{A} = \frac{Px_1 \times d/2}{I}$$

यहाँ X_1 भार की उत्केंद्रता अथवा अक्ष से भार की दूरी व्यक्त करता है चूंकि I का तथा सीमान्त रेशों की गुरुत्व केंद्र से दूरी सभी व्यासीय अक्षों के लिए समान होते हैं अत: X_1 का मान किसी भी व्यासीय अक्ष में नापा जा सकता है तथा यह कदापि आवश्यक नहीं हैं कि X_1 सदैव क्षैतिज अथवा ऊर्ध्वाधर व्यास अक्षों की दिशा में नापा जाय

$$\frac{P}{\lambda/4 . d^2} = \frac{Px_1 \times d/2}{\pi/64 \times d4}$$

अथवा $x_1 = a/\theta$

इससे यह स्पष्ट है कि भार अक्ष से d/8 व्यास के वृत्त के भीतर ही लगना चाहिए जिससे कि परिच्छेद के किसी बिन्दु पर तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो ।

उदाहरण 9.5 : एक कंक्रीट का पाया जिसका परिच्छेद $2m \times 2m$ का है उसके ऊपर दोनों संलग्न पाश्वों से 75 cm की दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर भार P लग रहा है । यदि आधार में कहीं भी तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो तो P का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए । कंक्रीट का भार 24000 N/m^3 लिया जा सकता है । पाये की लंबाई 4m है ।

हल :

कंक्रीट के पाये का भार $= 2{,}4000 \times 2 \times 2 \times 4$
$= 38{,}4000$ N

आधार के परिच्छेद पर अभिलंब संपीडन प्रतिबल (बंकन के कारण उत्पन्न प्रतिबल के अतिरिक्त)

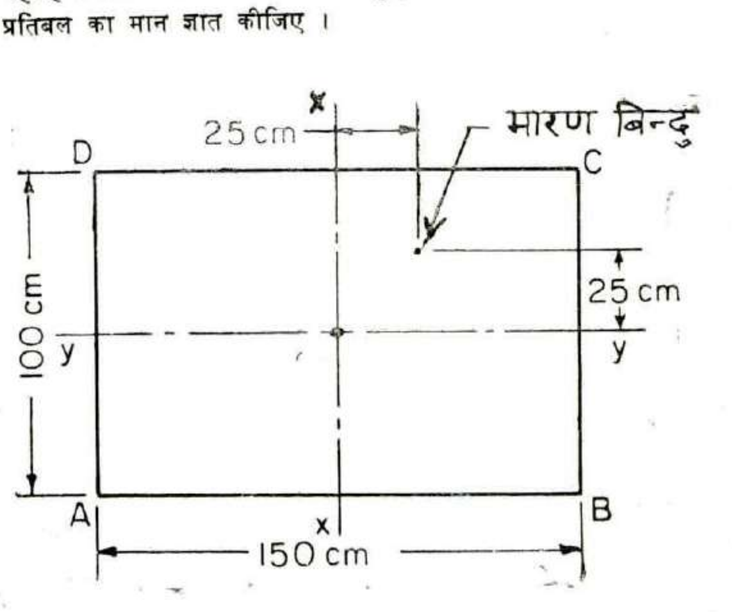
$$\frac{38,\ 4000 + P}{200 \times 200}$$

यदि आधार पर कोई तनन प्रतिबल न हो,

$$\frac{38{,}4000 + P}{200 \times 200} = \frac{6P \times 25}{200 \times (200)^2} + \frac{6P \times 25}{200 \times (200)^2}$$

$P = 76{,}8000$N

उदाहरण 9.6 : एक सीमेंट कंक्रीट के पाये पर, जिसका परिच्छेद $1m \times 1.5$ m है, दोनों सममिति अक्षों से 25 cm की दूरी पर एक 45,0000N का संपीडन भार लग रहा है । पाये के भार को नगण्य मानते हुए उसके किसी परिच्छेद के चारों कोनों पर प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए ।



चित्र 9.5

हल :

अभिलंब संपीडन प्रतिबल $= \frac{45,0000}{100 \times 150} = 0.3\ N/mm^2$

AD तथा BC पर बंकन प्रतिबल $= \frac{6Py}{bd^2}$

$$= \frac{6 \times 45,0000 \times 25}{100 \times (150)^2} = 0.3\ N/mm^2$$

AB तथा CD पर बंकन प्रतिबल $= \frac{6Px}{b^2d}$

$$= \frac{6 \times 45,0000 \times 25}{150 \times 10,000} = 0.45\ N/mm^2$$

कोना A पर प्रतिबल $= -0.3+0.3+0.45 = 0.45\ N/mm^2$ (तनन)

कोना B पर प्रतिबल $= -0.3-0.3+0.45 = -0.15\ N/mm^2$ (संपीड़न)

कोना C पर प्रतिबल $= -0.3-0.3-0.45 = -1.05\ N/mm^2$ (संपीड़न)

कोना D पर प्रतिबल $= -0.3+0.3-0.45 = -0.45\ N/mm^2$ (संपीडन)

उदाहरण 9.7 : एक 25cm व्यास तथा 1m ऊँचाई के एक कंक्रीट के स्तंभ पर चित्र (9.6) में दिखाये गये बिन्दु पर 2,0000N का भार लग रहा है । स्तंभ परिच्छेद में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए यदि (अ) कंक्रीट का भार नगण्य हो, (ब) कंक्रीट का भार 24,000N/m³ लिया जाय ।

हल :

भारण बिन्दु की स्तभ केन्द्र से त्रिज्या दूरी $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm है । चूंकि वृत्ताकार परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण प्रत्येक व्यासीय अक्ष के सापेक्ष एक समान होता है अतः स्तंभ का बंकन अक्ष XX के सापेक्ष होगा क्योंकि यह भारण बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा के अभिलंब है ।

(अ) अधिकतम संपीडन प्रतिबल बिन्दु A पर होगा,

$$= \frac{2,0000}{\pi/4\,(25)^2} + \frac{2,0000 \times 5 \times 25/2}{\pi/64 \times (25)^4}$$

$$= 1.06\ N/mm^2$$

60000 N का भार आधार में संपीडन प्रतिबल उत्पन्न करेगा तथा जल दाब आधार पर 45000 × 1 = 45000 Nm का बंकन बल आघूर्ण उत्पन्न करेगा जिससे पार्श्व B'C' में तनन बंकन प्रतिबल तथा पार्श्व ÁD' में संपीडन बंकन प्रतिबल उत्पन्न होगा ।

$$\sigma B' = -\frac{60000}{100 \times 100} + \frac{6 \times 4,5000 \times 100}{100 \times 100 \times 100}$$

$$= 0.21\ N/mm^2 \quad \text{(तनन)}$$

$$\sigma \acute{A} = -\frac{60000}{100 \times 100} - \frac{6 \times 45000 \times 100}{100 \times 100 \times 100}$$

$$= 0.33 N/mm^2 \quad \text{(संपीडन)}$$

दीवार के भार W तथा जल दाब p को संयोजित करने पर परिणामी बल R आधार को बिन्दु K पर अंतर्छेदित करता है जो कि पार्श्व B'C' से C+d/2 अथवा आधार परिच्छेद के केंद्र से C की दूरी स्थित है । K के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$e = \frac{p}{W} \times \frac{h}{3}$$

यदि आधार परिच्छेद में कोई तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो तो संपीडन प्रतिबल

$$\frac{W}{1 \times d} = p \times \frac{h}{3} \times \frac{6}{d^2} \quad \text{(तनन प्रतिबल)}$$

अथवा $\frac{p}{W} \times \frac{h}{3} = \frac{d}{6} = e$

इससे स्पष्ट है कि यदि परिणामी बल R आधार को मध्यवर्ती एक तिहाई भाग में काटता है तो तनन प्रतिबल नहीं उत्पन्न होगा ।

9.5 बंकन से युक्त मरोड़

शैफ्ट जब शक्ति संचारित कर रहा होता है तब उसमें केवल ऐंठन ही नहीं उत्पन्न होगी अपितु उसके स्वयं का भार. उस पर लगी घिरनियों के भार तथा घिरनियों पर चल रहे पट्टों में तनन के कारण उसमें बंकन एवं अपरुपण बल भी लगता है । अतः शैफ्ट में बंकन बल आघूर्ण, ऐंठन बल आघूर्ण एवं अपरुपण बल के कारण प्रतिबल

उत्पन्न होते है परन्तु अपरुपण बल के कारण उत्पन्न प्रतिबल का मान उदासीन अक्ष पर अधिकतम होता है जहाँ पर अन्य दोनों के कारण उत्पन्न प्रतिबल शून्य होता है । इसका मान बाह्य सतह पर शून्य होता है जहाँ पर बंकन एवं ऐंठन के कारण अधिकतम प्रतिबल होता है ।

ठोस एवं खोखले दोनों शैफ्टों के लिए जिनका बाह्य व्यास D है तथा जिन पर बंकन बल आघूर्ण M एवं ऐंठन बल आघूर्ण T लग रहा हो तब

ऐंठन के कारण अधिकतम अपरुपण प्रतिबल

$$\tau = \frac{T}{J} \times \frac{D}{2} = \frac{TD}{2J}$$

बंकन के कारण अधिकतम अमिलंब प्रतिबल

$$\sigma = \frac{MD}{2I} = \frac{MD}{J}$$ क्योंकि किसी व्यासीय अक्ष के आपेक्ष जड़त्व आघूर्ण ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण का आधा होता है ।

अधिकतम मुख्य प्रतिबल

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{MD}{2J} + \sqrt{\left(\frac{MD}{2J}\right)^2 + \left(\frac{TD}{2J}\right)^2}$$

$$= \frac{D}{2J}\left[M + \sqrt{M^2+T^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9.5)$$

यदि M_E उस बंकन बल आघूर्ण का मान हो जो अकेले लगने पर σ_1 के बराबर असिलंब प्रतिबल उत्पन्न करेगा, तब

$$\sigma_1 = \frac{M_E}{I}\,\frac{D}{2} = \frac{M_E \times D}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.6)$$

समीकरणों (9.5) तथा (9.6) से

$$M_E = \tfrac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2+T^2}\right)$$

M_E को तुल्यमान बंकन बल आघूर्ण कहा जाता है ।

इसी प्रकार

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\frac{MD^2}{2J} + \frac{TD}{2J}^2}$$

$$= \frac{D}{2J}\left\{\sqrt{M2 + T2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9.8)$$

यदि T_E वह ऐंठन बल आघूर्ण हो जिसके अकेले लगने पर τ_{max} आधि का प्रतिबल उत्पन्न हो, तब

$$\tau_{max} = \frac{T_E}{J} \times \frac{D}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.9)$$

समीकरणों (9.8) तथा (9.9) से

$$T_E = \sqrt{M^2+T^2}$$

T_E को "तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण" कहा जाता है ।

उदाहरण 9.10 : एक ठोस शैफ्ट पर 4 kN-m का ऐंठन बल आघूर्ण तथा 3kN-m का बंकन बल आघूर्ण लगाया जा रहा है । शैफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिए यदि (अ) अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का मान 80 N/mm² से अधिक न हो (ब) अधिकतम अभिलंब प्रतिबल का मान 128 N/mm² से अधिक न हो ।

तुल्य मान ऐंठन बल आघूर्ण

$$T_E = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= 5\,kN\text{-}m$$

$$50.00 = \frac{\pi}{16} d^3 \times 80\times10^6$$

$$d = 68.40 \text{ mm}$$

तुल्यमान बंकन बल आघूर्ण

$$M_E = \tfrac{1}{2} [3 + 5] = 4 \text{ kN-m}$$

$$40{,}00 = \pi/32\, d^3\times128\times10^6$$

$$d = 68.4 \text{ mm}$$

उदाहरण 9.11 : एक 80 rpm पर चलने वाले 745 kw शक्ति के इंजन के लिए शैफ्ट की आवश्यकता है। शैफ्ट पर अधिकतम ऐंठन बल आघूर्ण औसत से 1.8 गुना है। शैफ्ट के मुख्य बेयरिंग 450 cm की दूरी पर हैं तथा दोनों बेयरिंग के मध्य में 10,0000 N के भार का एक गतिपाल चक्र शैफ्ट पर चढ़ा है। इस भार के कारण उत्पन्न बंकन बल आघूर्ण तथा भाप के दबाव के कारण उत्पन्न बंकन बल आघूर्ण जो कि ऐंठन बल आघूर्ण का 0.8 गुना है, अतिरिक्त रूप से लग रहा है। यदि शैफ्ट के पदार्थ में अधिकतम तनन प्रतिबल 64 N/mm² से अधिक न हो तो शैफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिए।

(लं० वि० वि०)

हल :—

$$\text{औसत बल आघूर्ण} = \frac{745\times1000\times60}{2\pi\times80} \text{ Nm}$$

$$= 88.93 \text{ kN-m}$$

$$\text{अधिकतम बल आघूर्ण} = 1.8\times88.93$$

$$160.07 \text{ kN-m}$$

अधिकतम बंकन बल आघूर्ण

$$= \frac{90{,}000 \times 540}{4\times10^5} + 0.8\times88.93$$

$$= 1101.43 \text{ kN-m}$$

तुल्यमान बंकन बल आघूर्ण

$$M_E = \frac{1}{2}\left\{ 1101.43 + \sqrt{(1101.43)^2 + (160.07)^2}\right.$$

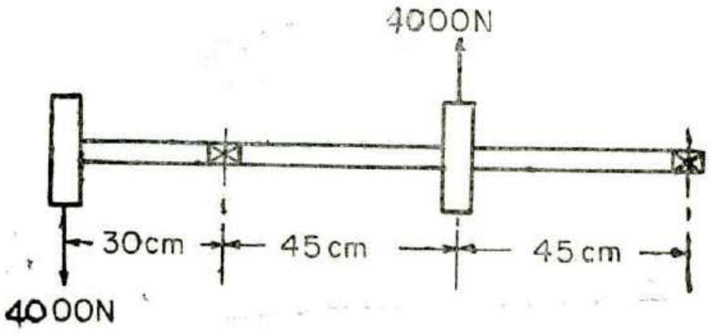
$$= 1107.215 \text{ kN-m}$$

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \text{ अथवा } N = \sigma\times\frac{\pi}{32}\times d^3$$

$$1107.215\times10^6 = \pi/32\; d^3\times64$$

$$d = 560.64 \text{ mm}$$

उदाहरण 9.12 : एक घिरनी A शैफ्ट B पर चित्र (9.9) में दिखाये गए की भाँति बल लगा रही है। पट्टे के दोनों पार्श्वों में कुल ऊर्ध्वाधर तनन 4000 N है। शैफ्ट का व्यास 6 cm है। यदि तनन तथा अपरूपण प्रतिबल क्रमशः 320N/mm² तथा 160 N/mm² से अधिक न हो तथा यदि शैफ्ट 150 rpm पर चले तो उसके द्वारा कितनी शक्ति संचारित की जा सकती है ? शैफ्ट को बेयरिंग में सरल आधारित माना जा सकता है।



चित्र 9.9

हल : —

उर्ध्वाधर दिशा में लगने वाले दोनों बेयरिंग पर प्रतिक्रिया बलों का मान बराबर होगा। बायें बेयरिंग पर $\frac{1000}{3}$ N का प्रतिक्रिया बल ऊपर की दिशा में तथा दाहिने पर नीचे की दिशा में लगेगा। अधिकतम बंकन बल आघूर्ण जिसका मान 0.15 kN-m है चालित घिरनी से होकर जाने वाले परिच्छेद पर होगा।

अधिकतम अनुमेय अपरूपण बल के लिए तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण $= \pi/16\times(6)^3 \times$ 1,6000

$= \pi \times 2160$ N.m

$2160\,\pi = \sqrt{M^2 + T2}$

$= \sqrt{(150)^2 + T2}$

$T = 6784$ N.m

अधिकतम अनुमेय तनन प्रतिबल के लिए तुल्यमान बंकन बल आघूर्ण

$\pi/32 \times (6)^3 \times 3{,}2000 = \pi \times 216000$ N.cm

$216000\,\pi = \frac{1}{2}\left\{ 15000 + \sqrt{(15000)^2 + T2} \right.$

$T = 13.57$ kN.m

दोनों मानों में कम मान वाली T निरापद होगा ।

अतः संचारित अश्व शक्ति $= \dfrac{2\pi \times 6784 \times 150}{1000 \times 60}$

$= 106$kW

उदाहरण 9.13 : चित्र 9.10 में एक क्षैतिज शैफ्ट को दिखाया गया है जिसपर तीन घिरनियाँ C,D, तथा E लगी हैं तथा वह A एवं B पर बेयरिंग में आधारित है । पट्टे के तनन नीचे चित्र में दिखाए गये हैं अज्ञात पट्टा तनन P तथा शैफ्ट द्वारा 400 rpm पर संचारित की जाने वाली शक्ति का मान ज्ञात कीजिए तथा शैफ्ट का निपराद् व्यास भी ज्ञात कीजिए, यदि अधिकतम अभिलंब प्रतिबल का मान 80 N/mm² तथा अपरूपण प्रतिबल का मान 40 N/mm² से अधिक न हो । पट्टों में तनन को उर्ध्वाधर माना जा सकता है ।

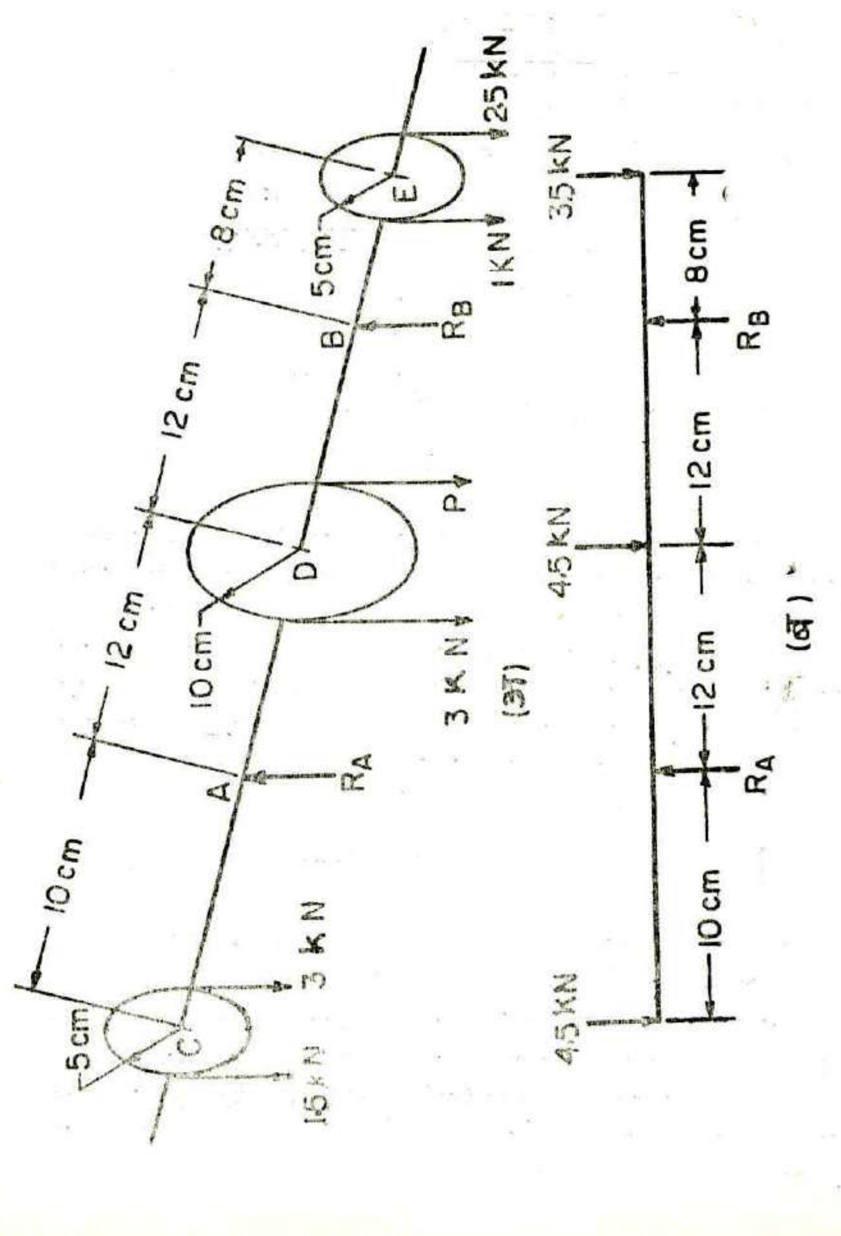
हल :—

शैफ्ट के अक्ष के सापेक्ष पट्टों के तनन के आघूर्ण साम्यावस्था के लिए समान होने चाहिए ।

$1500 \times 5 + 3000 \times 10 + 1000 \times 5 = 3000 \times 5 + P \times 10 + 2500 \times 5$

$P = 1500$N

पट्टों के तने हुए एवं ढीले पार्श्व से यह ज्ञात होता है कि घिरनी D चालक घिरनी है (जो केवल एक ही होती है) तथा C एवं E चालित घिरनियाँ हैं । यह भी जाँच कर लेना चाहिए कि चालक घिरनी D द्वारा दिया गया संपूर्ण बल आघूर्ण घिरनियों C तथा E द्वारा प्राप्त किए गए आघूर्ण के बराबर हो क्योंकि तीनों घिरनियाँ एक ही चाल से चल रही हैं ।



चित्र 9.10

घिरनी D द्वारा दिया गया आघूर्ण $= (3000 - 1500) \times 10$

$= 15000$ N.cm.

घिरनियों C तथा E द्वारा लिया गया आघूर्ण

$= (3000 - 1500) \times 5 + (2500 - 1000) \times 5$

$= 15000$ N.cm.

इसकी भी जाँच हो गई कि P का मान 1500 N ठीक है अथवा नहीं, क्योंकि दोनों मान समान है ।

$$\text{शैफ्ट द्वारा संचारित शक्ति} = \frac{2\pi \times 400(3000-1500)\times 10}{100\times 60\times 1000}$$

$= 6.28$ kW

शैफ्ट को एक सरल आधारित दंड के रूप में माना जा सकता है जिसपर प्रत्येक घिरनी के स्थान पर संकेंद्री भार पट्टों के तनन के भार के योग के बल बराबर लग रहे है । अधिकतम बंकन बल आघूर्ण बिन्दु A पर 4,5000 N.cm के बराबर होगा । भाग DC तथा DE मे बराबर (7500 cm) मान का बल आघूर्ण संचारित होता है अतः अधिकतम अभिलंब एवं अपरूपण प्रतिबल परिच्छेद A पर होगा । परन्तु यदि शैफ्ट के विभिन्न भागों में संचारित होने वाले बल आघूर्ण का मान एक समान न हो तब प्रत्येक भाग में उस स्थान पर जहाँ अधिकतम बंकन बल आघूर्ण लग रहा हो, तुल्य मान ऐंठन बल आघूर्ण तथा तुल्यामान बंकन बल आघूर्ण के मान अलग-अलग प्राप्त किए जाने चाहिए तथा शैफ्ट का व्यास ज्ञात करने के लिए इसका अधिकतम मान लेना चाहिए ।

A पर तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण

$= \sqrt{(45000)^2 + (7500)^2}$

$= 4,5500$ N. cm.

$$d^3 = \frac{16\times 4,5500}{\pi\times 4000}$$

$d = 3.85$ cm

A पर तुल्यमान बंकन बल आघूर्ण

$$= \frac{1}{2}\left\{ 4,5000 + \sqrt{(45000)^2+(7500)^2}\right.$$

$= 4,5250$ N. cm.

$$d^3 = \frac{32\times 45250}{\pi\times 8000}$$

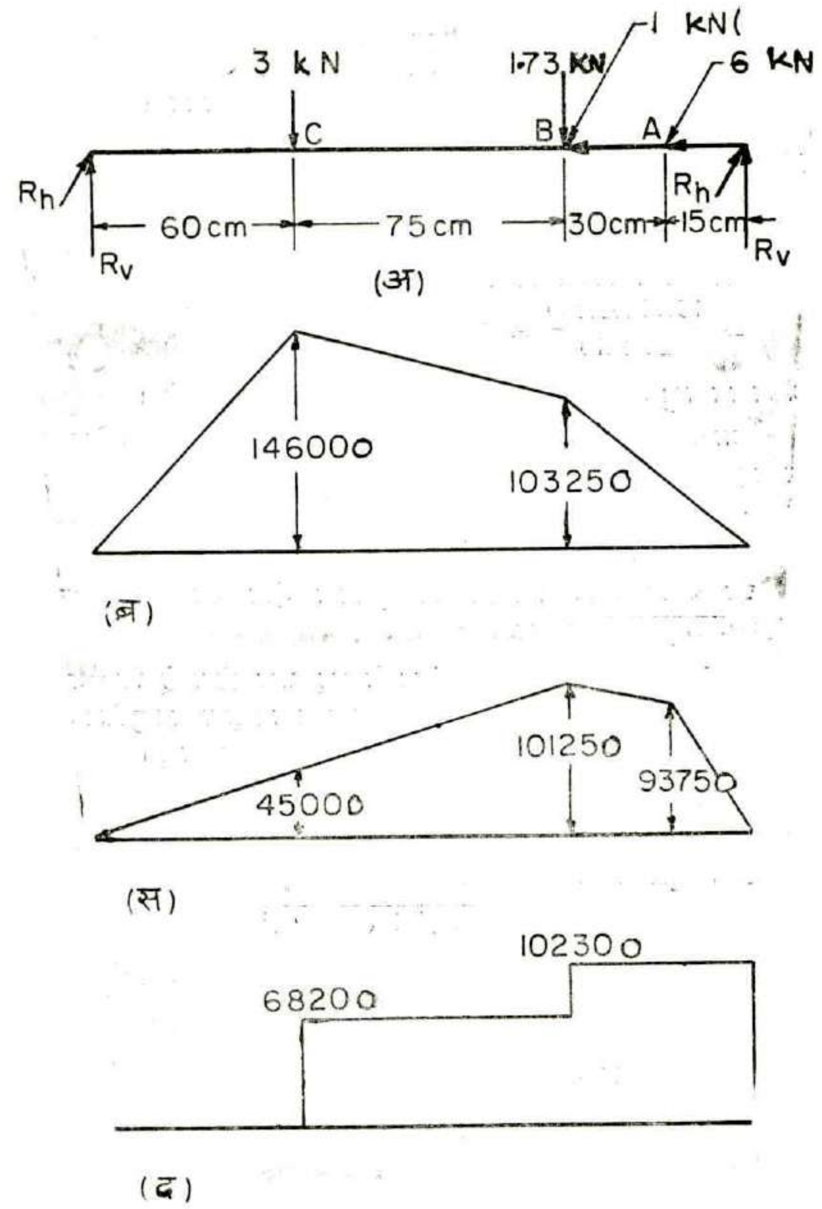
$d = 3.84$ cm.

शैफ्ट का निरापद व्यास $= 3.85$ cm

उदाहरण 9.14: एक शैफ्ट जिसका व्यास एक समान है तथा सिरों पर बेयरिंग पर आधारित हैं 210 rpm की चाल से शक्ति संचारित कर रहा है । A से B तक यह 22.5 kW शक्ति संचारित करता है परन्तु B पर एक घिरनी द्वारा 7.5 kW एक मशीन को दे दी जाती है तथा एक अन्य बिन्दु C पर शेष 15 kW भी एक अन्य घिरनी द्वारा ले ली जाती है । दोनों चालित घिरनियां चालक घिरनी के एक ही ओर हैं । पट्टे घिरनियों पर इस प्रकार लगे हैं A पर क्षैतिज, B पर क्षैतिज से 60° के कोण पर तथा C पर ऊर्ध्वाधर है । घिरनियों A, B तथा C पर पट्टों के कुल तनन का मान क्रमशः 6000, 2000 तथा 3000N है । घिरनियों के मध्य दूरी चित्र 9.11(अ) में दिखाई गई है । शैफ्ट में निरापद अपरुपण बल का मान 4000 N/cm² है । शैफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिए ।

हल :

2000 N के झुके हुए तनन को दो घटकों क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर में वियोजित कर लेना चाहिए । घिरनी B पर तनन का क्षैजित घटक 2000 Cos 60 = 1000N तथा ऊर्ध्वाधर घटक 200 × Sin60 = 1730N होगा ।



चित्र 9.11

चित्र में शैफ्ट पर लगने वाले क्षैतिज समतल एवं ऊर्ध्वाधर समतल में स्थित भार दिखाए गए हैं । दो बंकन बल आघूर्ण आरेख जिनमें एक क्षैतिज समतल में स्थित बलों के कारण तथा दूसरा ऊर्ध्वाधर समतल में स्थित बलों के कारण है चित्र 9.11 (ब) तथा (स) में दिखाया गया है ।

भाग AB में संचारित बल आघूर्ण $= \dfrac{22 \cdot 5 \times 10^3 \times 60}{2\pi \times 210}$

$= 10{,}2300$ N–cm

भाग BC में संचारित बल आघूर्ण

$= \dfrac{15 \times 1000 \times 60}{2\pi \times 210} = 68200$ N. cm

बंकन बल आघूर्ण बंटन आरेख चित्र 9.11(द) में दिखाया गया है ।

प्राप्त आंकड़ों के अनुसार शैफ्ट को अधिकतम अपरूपण प्रतिबल के लिए जाँचना चाहिए । किसी भी शैफ्ट के परिच्छेद पर परिणामी बंकन बल आघूर्ण $\sqrt{M_H{}^2+M_V{}^2}$ होगा जब कि M_H तथा M_V क्रमशः क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर बल आघूर्ण व्यक्त करते हैं ।

इस प्रकार किसी परिच्छेद पर तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण का मान $\sqrt{T^2 + M_H{}^2 + M_V{}^2}$ होगा ।

शैफ्ट में M_H, M_V तथा T के बंकन से यह ज्ञात होता है कि अधिकतम तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण का मान B अथवा C पर होगा परन्तु फिर भी यदि आवश्यकता हो तो अन्य परिच्छेदों पर भी इसकी जाँच की जा सकती है ।

शैफ्ट का व्यास अधिकतम तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण के आधार पर ज्ञात किया जाना चाहिए ।

B पर तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण

$= \sqrt{(10{,}3250)^2 + (10{,}1250)^2 + (10{,}2300)^2}$

$= 17{,}7000$ N. cm

C पर तुल्यमान बल आघूर्ण

$= \sqrt{(14{,}6000)^2 + (4{,}5000)^2 + (6{,}8200)^2}$

$= 16{,}7250$ N. cm

शैफ्ट का व्यास अधिकतम तुल्यमान ऐंठन बल आघूर्ण के आधार पर ज्ञात किया जाना चाहिए ।

$$d^3 = \frac{16 \times 17{,}7000}{\pi \times 4000}$$

$d = 6.08$ cm

उदाहरण 9.15 : एक ठोस गोल शैफ्ट के किसी परिच्छेद पर, जिनका व्यास d है, बंकन बल आघूर्ण M, ऐंठन बल आघूर्ण T एक अपरूपण बल F (बंकन के कारण) तथा एक सिरा प्रणोद P लग रहा है । शैफ्ट में अधिकतम अभिलंब एवं अपरूपण प्रतिबल का मान बताइये ।

हल :—

$$\text{अधिकतम संपीडन प्रतिबल} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}$$

$$\text{न्यूनतम संपीडन प्रतिबल} = \frac{4P}{\pi d^2} - \frac{4M}{\pi r^3}$$

अपरूपण बल F के कारण शैफ्ट के परिच्छेद के ऊपरी तथा निचले सतह पर अपरूपण प्रतिबल शून्य होगा एवं क्षैतिज व्यास के सिरों पर यह अधिकतम होगा ।

$$\frac{16F}{3\pi d^2}$$

$$\text{ऊपर अथवा नीचे कुल अपरूपण प्रतिबल} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

क्षैतिज व्यास के प्रत्येक सिरे पर कुल अपरूपण प्रतिबल

$$= \frac{16T}{\pi d^3} + \frac{16F}{3\pi d^2}$$

अधिकतम अभिलंब तथा अपरूपण प्रतिबल ऊपर अथवा नीचे ही होंगे जहाँ पर अधिकतम तनन संपीडन प्रतिबल लगेगा ।

$$\text{अधिकतम अभिलंब प्रतिबल} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}\right\} + \left\{\left(\frac{4P}{2\pi d^2} + \frac{32M}{2\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{अधिकतम अपरूपण प्रतिबल} = \left\{\left(\frac{4P}{2\pi d^2} + \frac{32M}{2\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

छेद के क्षैतिज व्यास के सिरे पर :

$$\text{अभिलंब प्रतिबल} = \frac{4P}{2\pi d^2} + \left\{\left(\frac{4P}{2\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3} + \frac{16F}{3\pi d^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

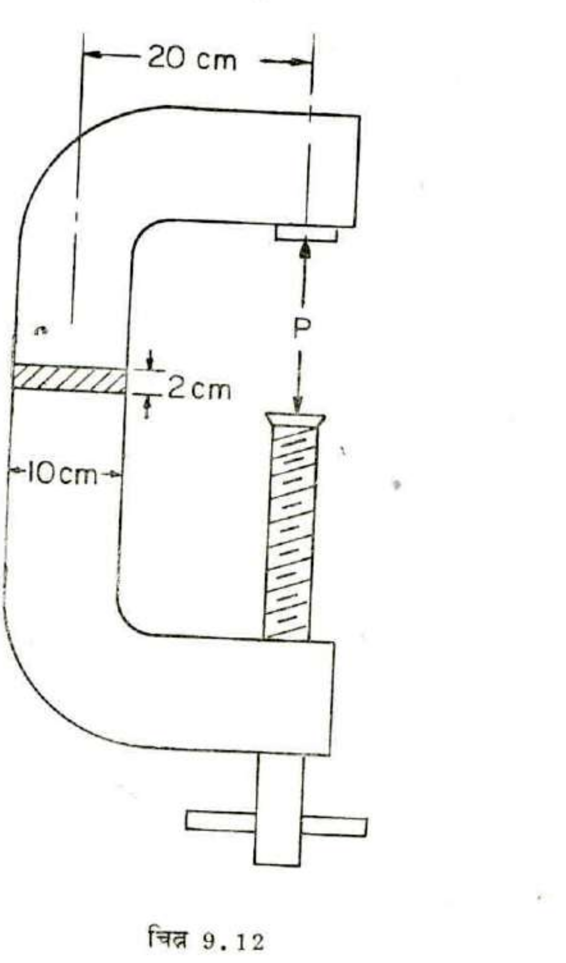
$$\text{तथा अपरूपण प्रतिबल} = \left\{\left(\frac{4P}{2\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3} + \frac{16F}{3\pi d^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

अभ्यास प्रश्नमाला

(यदि किसी प्रश्न के हल के लिए इस्पात के E तथा G के मान की आवश्यकता हो तो उसे क्रमशः 200 GPa एवं 80 GPa मानें)

चित्र 9.12 में दिखाये गए शिकंजे द्वारा लगाए जाने वाले बल P का मान ज्ञात कीजिए यदि उसमें 100 N/mm² का तनन अथवा संपीडन प्रतिबल से अधिक न हो ।

(15.385kN)



चित्र 9.12

2. एक खोखले वृत्ताकार पाये पर जिसका बाह्य व्यास d तथा आंतरिक व्यास d_1 हो लगने वाले भार की अधिकतम उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए यदि उसके किसी भी परिच्छेद में तनन प्रतिबल न उत्पन्न होने दिया जाय ।

$$\left(\frac{d^2+d_1^2}{8d}\right)$$

3. एक 100mm × 200mm के काष्ठ खंडक में 50mm व्यास का छेद किया गया है । इस छेद का अक्ष खंडक के लंबी वाली भुजा के अभिलंबवत है तथा एक छोटी वाली भुजा से 50mm दूर स्थित है इस खंडक के ऊपरी सतह के मध्य में 20 kN का ऊर्ध्वाधर भार लग रहा है । दोनों छोटी भुजाओं पर छेद से होकर जाने वाले परिच्छेद के लिए अभिलंब प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।

4. एक छोटे 100mm व्यास के वृत्ताकार परिच्छेद के ढलवां लोहे के स्तंभ पर 400 kN का ऊर्ध्वाधर भार लग रहा है । इसमें अनुमेय तनन एवं संपीडन प्रतिबल का मान क्रमश: $35N/mm^2$ तथा $150N/mm^2$ है । अतः भार की स्तंभ के अक्ष से अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

(21.1mm)

5. एक 200 मिमी व्यास के ढलवां लोहे के स्तंभ के संपूर्ण उँचाई में 50mm व्यास का छेद बना है । छेद का अक्ष स्तंभ के अक्ष से बायें तरफ 50mm दूर है । स्तंभ के अक्ष की दिशा में लगने वाले अधिकतम भार को ज्ञात कीजिए यदि स्तंभ में संपीडन प्रतिबल $100N/mm^2$ से अधिक न हो । इस बिन्दु से होकर जाने वाले व्यास के दूसरे सिरे पर भी प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।

[2590kN, $91N/mm^2$ (संपीडन)]

6. एक कारखाने की चिमनी के आधार परिच्छेद की विमा 8m × 8m वर्गाकार है । चिमनी का भीतरी भाग गोल है जिसका व्यास 7m है । चिमनी पर 16kN/m उँचाई की दर से क्षैतिज दिशा में वायु दाब लग रहा है । यदि चिमनी का भार $20kN/m^3$ हो तो चिमनी की अधिकतम उँचाई बताइये जिससे उसके आधार परिच्छेद के किसी भी बिन्दु पर तनन प्रतिबल न उत्पन्न हो ।

(142m)

7. एक 80mm व्यास का शैफ्ट 600mm की दूरी पर स्थित बेयरिंग में आधारित है इसके मध्य पर 5 kN का एक गतिपाल चक्रबध्द है । यदि शैफ्ट 360 rpm पर 30kW शक्ति पारेषित कर रहा हो तब गतिपालक चक्र के

समतल में शैफ्ट के ऊर्ध्वाधर व्यास एवं क्षैतिज व्यास के सिरों पर प्रधान प्रतिबल एवं अधिकतम अपरुपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।

(लं० वि० वि०)

($18.4N/mm^2$ $3.45N/mm^2$ $10.9N/mm^2$ तथा $8.6N/mm^2$)

8. एक शैफ्ट पर ऐंठन बल आघूर्ण 'T' तथा बंकन बल आघूर्ण M=1·5 T लग रहा है । सिध्द कीजिए कि इस शैफ्ट में अधिकतम प्रधान प्रतिबल एवं अधिकतम अपरुपण प्रतिबल का अनुपात 1.55 होगा ।

9. एक मृदु-इस्पात का शैफ्ट rpm पर 134.5kW शक्ति पारेषित करता है । यदि शैफ्ट पर ऐंठन बल आघूर्ण के मान के बराबर ही बंकन बल आघूर्ण भी क्रियाशील हो तथा यदि अनुमेय अपरुपण प्रतिबल $40N/mm^2$ हो तो शैफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिए ।

(93mm)

10. एक पतली नलिका के लिए उसके मरोड़ सामर्थ्य एवं भार का अनुपात ज्ञात कीजिए यदि उसमें अनुमेय अपरुपण प्रतिबल τ है । नलिका की लंबाई l, व्यास d तथा प्रति एकांक आयतन भार w मान लीजिए ।

$$\frac{d\tau}{2w}$$

अध्याय 10

स्तंभ विश्लेषण

10.1 विषय प्रवेश

ऐसा भाग जो किसी संरचना अथवा मशीन मे इस प्रकार प्रयुक्त किया जाय कि उसमें अक्षीय संपीडन बल लगे तो उसको टेक कहा जाता है। वे टेक जो ऊर्ध्वाधर होते हैं, स्तंभ कहलाते हैं।

जब टेक अथवा स्तंभ की लंबाई उसकी अन्य अनुप्रस्थ विमाओं की अपेक्षा अधिक होती है तो उसका विभंजन सीधे संपीडन में न हो व्याकुंचन के कारण होता है। आरंभिक अनुप्रस्थ विक्षेप इसमें भार के संकेंद्री न होने के कारण अथवा टेक व स्तंभ के पूर्णतया सिधाई में न होने के कारण उत्पन्न होता है।

बंकन के प्रति प्रतिरोध बंकन दृढ़ता EI पर निर्भर होता है। जहां $I=Ar^2$ (A अनुप्रस्थ परिच्छेद तथा r घूर्णक त्रिज्या है)। टेक अथवा स्तंभ का प्रतिरोध विक्षेप के प्रति उस दिशा में न्यूनतम् होगा जहाँ बंकन दृढ़ता न्यूनतम अर्थात न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण हो। उसका अर्थ न्यूनतम r भी है।

टेक अथवा स्तंभ की लंबाई एवं उसकी न्यूनतम घूर्णक त्रिज्या के अनुपात को तनुता अनुपात, कहा जाता है। इस तनुता अनुपात का मान जितना ही न्यून होगा स्तंभ में विक्षेप एवं व्याकुंचन द्वारा विभंग होने की प्रवृत्ति भी उतनी ही कम होगी।

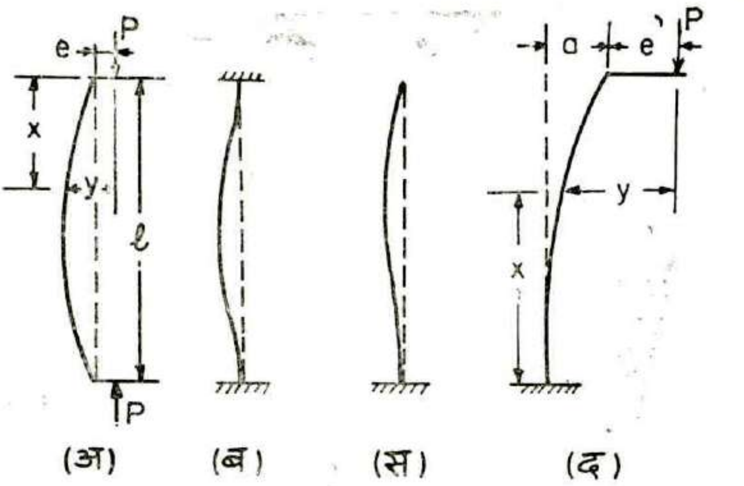
10.2 ऑयलर का स्तंभ सिद्धांत

एक स्तंभ की कल्पना कीजिए जो 'सिरों' पर हिंज द्वारा जुड़ा है तथा उस पर एक भार **P** अक्ष के समान्तर परन्तु उससे e की दूरी पर लगाया गया है। स्तंभ का विक्षेप चित्र 10.1 (अ) में दिखाए गए की भाँति होगा। भारण रेखा से नापा गया विक्षेप तथा बंकन बल आघूर्ण का मान स्तंभ की लंबाई के विभिन्न परिच्छेदों में अलग अलग होंगे। बंकन बल आघूर्ण का मान उस परिच्छेद पर जो ऊपरी सिरे से **x** की दूरी पर स्थित है **P.y** होगा।

अतः $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -Py$

अथवा $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{P}{EI}y = 0$

अथवा $\dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2y=0$ यदि $k = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$ रखा जाय



(अ) (ब) (स) (द)

चित्र 10.1

उपर्युक्त विभेदी समीकरण के हल को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

$y = A \operatorname{Sin} kx + B \operatorname{Cos} x$

यहाँ A तथा B स्थिरांक हैं।

$x=0$ होने पर $y=e$ अतः $B=e$

एवं $x=l$ होने पर $y=e$ अतः $A= e\dfrac{1-\operatorname{Cos} kl}{\operatorname{Sin} kl}$

इस प्रकार $y = e\left[\dfrac{1-\operatorname{Cos} kl}{\operatorname{Sin} kl}\operatorname{Sin} kx + \operatorname{Cos} kx\right]$

समांमति के कारण $x = l/2$ होने पर विक्षेप अधिकतम होगा

$$y_{max} = e\left[\frac{1-\text{Cos}kl}{\text{Sin}\ kl}\ \text{Sin}\ \frac{kl}{2} + \frac{\text{Cos}kl}{2}\right]$$

$$= e\left[\left(\frac{1-\text{Cos}^2\frac{kl}{2}+\text{Sin}^2\frac{kl}{2}}{2\ \text{Sin}\ \frac{kl}{2}\ \text{Cos}\ \frac{kl}{2}}\right)\text{Sin}\ \frac{kl}{2} + \text{Cos}\frac{kl}{2}\right]$$

$$= e\left[\frac{1-\text{Cos}^2\frac{kl}{2}+\text{Sin}^2\frac{kl}{2}+2\ \text{Cos}^2\frac{kl}{2}}{2\ \text{Cos}\ \frac{kl}{2}}\right]$$

$$= e\left[\frac{1+\text{Cos}^2\frac{kl}{2}+\text{Sin}^2\frac{kl}{2}}{2\ \text{Cos}\ \frac{kl}{2}}\right]$$

अथवा $y_{max} = e\ \text{Sec}\ \frac{kl}{2}$ . . . . . . (10.1)

समीकरण (10.1) से स्पष्ट होता है किसी नियत P भार के लिए अधिकतम विक्षेप का मान e पर निर्भर करता है । यदि e का मान न्यून हो तो विक्षेप भी न्यून होगा एवं $e=0$ होने पर स्तंभ का बिलकुल भी व्याकुंचन नहीं होगा । यह पहिले ही स्पष्ट किया जा चुका है कि स्तंभ का विभंजन उत्केंद्रता द्वारा उत्पन्न व्याकुंचन से ही होता है चाहे इस उत्केंद्रता का मान कितना ही कम क्यों न हो ।

यदि भार P का मान इस प्रकार हो कि $\sqrt{\frac{P}{EI}} \times \frac{l}{2} = \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}$

तब y_{max} का मान अपरिमित हो जाएगा चाहे उत्केंद्रता का मान कितना ही न्यून क्यों न हो तथा इस क्रांतिक भार P को, जो बहुत अधिक विक्षेप उत्पन्न करेगा "ऑयलर का व्याकुंचन भार" कहा जाता है तथा इसको Pc द्वारा व्यक्त किया जाता है । यह ध्यान देने योग्य है कि इस भार पर यदि स्तंभ में तनिक भी उत्केंद्रता हो तो वह बढ़ती ही जाती है तथा स्तंभ अस्थायी हो जाता है । भार का मान इससे कम होने पर विक्षेप का मान सीमित रहता है तथा स्तंभ स्थायी बना रहता है ।

$$P_C = \frac{EI\ \pi^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10.2)$$

यहाँ I–परिच्छेद के न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण को व्यक्त करता है ।

उपर्युक्त वर्णन में स्तंभ के पदार्थ में भार के कारण उत्पन्न प्रतिबल पर ध्यान नहीं दिया गया है । यह संभव है कि स्तंभ पर लग रहे-संयुक्त भार के कारण (अभिलंब तथा बंकन) उत्पन्न प्रतिबल का मान पदार्थ के अनुमेय प्रतिबल से अधिक हो जाय ऐसी दशा में निरापद भार का मान इसी के द्वारा निर्धारित किया जाना चाहिए । अतः ऐसी परिस्थिति होने पर "ऑयलर का व्याकुंचन भार" निरर्थक सिद्ध होगा । सामान्यतः उत्केंद्रता का मान बहुत न्यून होता है अतः व्याकुंचन भार तक बंकन के कारण उत्पन्न प्रतिबल को नगण्य माना जा सकता है अतः व्याकुंचन भार पर अभिलंब भारण के कारण उत्पन्न प्रतिबल

$$\sigma_C = \frac{P_C}{A} = \frac{\pi^2 EAr^2}{Al^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

यहाँ r परिच्छेद का न्यूनतम घूर्णात्मक त्रिज्या व्यक्त करता है ।

व्याकुंचन भार पर प्रतिबल का मान उसी प्रकार बढ़ता है जैसे $\left(\frac{l}{r}\right)$ अर्थात तनुता अनुपात कम होता जाता है । यदि यह अनुपात इतना हो कि σ_C का मान अनुमेय प्रतिबल से अधिक हो तो स्तंभ का संपीडन के कारण विभंजन हो जायगा तथा भार का मान ऑयलर भार से कम होगा । अतः ऑयलर का सूत्र इस प्रकार के स्तंभों के लिए उपयुक्त होता है जिनकी तनुता अनुपात इस प्रकार की हो जिससे σ_C का मान अनुमेय अभिलंब संपीडन प्रतिबल से कम हो तथा ऐसे स्तंभ को दीर्घ स्तंभ कहा जाता है । दीर्घ स्तंभों का विभंजन प्रायः व्याकुंचन द्वारा ही होता है ।

10.3 सिरा—स्थितियाँ

इससे पूर्व के अनुच्छेद में ऑयलर व्याकुंचन भार का मान ऐसे स्तंभ के लिए ज्ञात किया गया है जो दोनों सिरों पर पिन द्वारा जुड़ा हुआ है । इसी प्रकार यदि सिरों पर किसी अन्य प्रकार की स्थिति हो तब भी व्याकुंचन भार ज्ञात किया जा सकता है । अन्य सिरा स्थितियों के लिए व्याकुंचन भार का मान नीचे दिया गया है ।

1. दोनों सिरे बद्ध होने पर

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

2. एक सिरा बद्ध तथा दूसरा सिरा पिन से जुड़ा होने पर

$$P_c = \frac{9\,\pi^2\,EI}{4l^2}$$

3. एक सिरा बद्ध तथा दूसरा सिरा मुक्त होने पर

$$P_c = \frac{\pi^2\,EI}{4l^2}$$

उदाहरण 10.1 : एक ऐसे टेक के लिए निरापद भार का मान बताइये जिसकी लंबाई 300 cm तथा व्यास 4 cm है। यदि (अ) उसके दोनों सिरे पिन से जुड़े हैं (ब) दोनों सिरे बद्ध हैं। टेक की कितनी न्यूनतम लंबाई हो जब ऑयलर का सूत्र इस पर नहीं लागू होगा। E = 200 GPa तथा पराभवन प्रतिबल 3.50 N/mm^2

हल :

$$I = \pi/64 \times (4)^4 = 4\pi \ \ cm^4$$

$$(\text{अ})\ \ P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^4}{300 \times 300 \times 10^4}$$

$$= 27.5kN$$

मान लीजिए वह न्यूनतम लंबाई l है जिसके नीचे ऑयलर सूत्र लागू नहीं होता अथवा निरापद भार पराभवन सामर्थ्य के आधार पर ज्ञात किया जाना चाहिए। तब

पराभवन सामर्थ्य × क्षेत्रफल = विभंजन भार

$$\text{अतः } 3500 \times \frac{\pi}{4} \times (4)^2 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 20 \times 10^5 \times 4\pi}{l^2}$$

$$\text{अथवा } l^2 = \frac{\pi^2 \times 20 \times 10^5 \times 4\pi}{4\pi \times 3500} = \frac{\pi^2 \times 20 \times 10^5}{3500} = \frac{\pi^2 \times 10^4}{17.5}$$

$$\text{अथवा } l = \frac{100\,\pi}{4.17} = 75\,cm$$

$$(\text{ब})\ \ P_C = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 200 \times 10^5 \times 4\pi}{300 \times 300} = 11KN$$

$$3{,}500 \times \pi/4(4)^2 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = \frac{4\pi^2 \times 20 \times 10^5 \times 4\pi}{l^2}$$

$$\text{अथवा } l^2 = \frac{4\pi^2 \times 10^4}{17\cdot 5}$$

$$\text{अथवा } l\ \ \frac{200\pi}{4\cdot 17} = 150cm$$

उदाहरण 10.2 : एक 250 cm लंबी नलिका को यदि दोनों सिरों पर पिन से जुड़ी हुई स्तंभ के रूप में प्रयोग किया जाय तो 20 kN का व्याकुंचन भार प्राप्त

लंबे टेकों में $\frac{1}{P}$ नगण्य होता है अतः

$P_R = P_c$ (लगभग) होता है। अतः इन सीमांत स्थितियों के अतिरिक्त

$$\frac{1}{P_R} = \frac{P + P_c}{P_c \times P}$$

सिरों पर पिन से जुड़े टेक के लिए, $P_c = \frac{\pi^2\,EI}{l^2}$

$$\text{अतः } \frac{1}{P_R} = \frac{\frac{\pi^2\,EI}{l^2} + \sigma_c \times A}{P_c \times A \times \frac{\pi^2\,EI}{l^2}}$$

$$\text{अथवा } P_R = \frac{\sigma_c \times A}{1 + \frac{\sigma_c \times A \times l^2}{\pi^2\,EI}} = \frac{\sigma_c \times A}{1 \times \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

यहाँ $\alpha = \frac{\sigma_c}{\pi^2 E}$ यह किसी पदार्थ के लिए विमारहित स्थिरांक है। तथा $I = Ar^2$

उपर्युक्त सूत्र रैंकिन सूत्र कहलाता है तथा α की सामान्यतः प्रयुक्त होने वाले मान मृदु इस्पात के लिए $\frac{1}{7500}$ तथा ढलवाँ लोहा के लिए $\frac{1}{1600}$ है।

इसी प्रकार अन्य सिरा परिस्थितिओं के लिए भी रैंकिन का सूत्र लिखा जा सकता है परन्तु उनमें α का मान नीचे दिए गये समान होगा

दोनों सिरे बद्ध होने पर	पिन से जुड़े सिरों के मान का 1/4 गुना
एक बद्ध तथा दूसरा मुक्त होने पर	,, ,, ,, 4 गुना
एक बद्ध तथा दूसरा पिन से जुड़ा होने पर	,, ,, ,, 4/9 गुना

टेक के डिज़ाइन के लिए नीचे अन्य सूत्र भी दिए गए हैं—

जॉनसन का सूत्र

$$P = \sigma_c\ A \left\{1 - \beta\left(\frac{l}{r}\right)^2\right\}$$

यहाँ पदार्थ तथा दी गई सिरा परिस्थिति के लिए स्थिरांक है।

सरल रेखा सूत्र

$$P = \sigma\ A \left\{1 - \mu\left(\frac{l}{r}\right)\right\}$$

यहाँ μ पदार्थ तथा दी गई परिस्थिति के लिए स्थिरांक है ।

उदाहरण 10.5 : एक ढलवाँ लोहे के स्तंभ का बाह्य व्यास 8 cm तथा आंतरिक व्यास 6 cm है एवं लंबाई 200 cm है । रैंकिन सूत्र का प्रयोग करते हुए इसका निरापद भार ज्ञात कीजिए यदि (अ) दोनों सिरे बद्ध हों

(ब) दोनों सिरे पिन से जुड़े हों ।

$\sigma_c = 600\ N/mm^2$

(पिन से जुड़े सिरों के लिए) $\alpha = \frac{1}{1600}$

हल :

$$A = \pi/4 \left[(8)^2-(6)^2\right] = 7\pi\ cm^2$$

$$I = \frac{\pi}{64}\left[(8)^4-(6)^4\right] = 43.75\pi\ cm^4$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{43.75\pi}{7\pi} = 6.25\ cm^2$$

(अ) $\alpha = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1600}$

$$P = \frac{600\times 7\pi}{1+\frac{1}{1600}\times\frac{200+200}{6.25}} = 660\ kN$$

(ब) $\alpha = \frac{1}{1600}$

$$P = \frac{6000\times 7\pi}{1+\frac{1}{1600}\times\frac{200\times 200}{6.25}} = 264kN$$

उदाहरण 10.6 : एक इंजन का संयोजी दंड (Connecting rod) 50 cm लंबा तथा 8 cm × 3 cm परिच्छेद का है । इसको 8 cm वाली भुजा के अभिलंब अक्ष के सापेक्ष बंकन के लिए, पिन वाले सिरों का स्तंभ तथा 6 cm वाली भुजा के अभिलंब अक्ष के सापेक्ष बंकन के लिए बद्ध सिरों वाला स्तंभ माना जा सकता है । यदि रैंकिन के सूत्र का प्रयोग किया जाय तो 45 cm व्यास के पिस्टन पर अधिकतम कितना दाब लगाया जाय जिससे कि संपीडन प्रतिबल का मान 100N/mm² से अधिक न हो । पिन वाले सिरे के स्तंभ के लिए $\alpha = \frac{4}{2,500}$;

हल :

बद्ध सिरा वाले स्तंभ के लिए

$$I = \frac{8\times(3)^3}{12} = 18\ cm^4$$

$$r^2 = \frac{18}{8\times 3} = \frac{3}{4}\ cm^2$$

$$\text{निरापद भार} = \frac{\sigma_c\times A}{1+\alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2} = \frac{24,0000}{1+\frac{1}{2500}\times\frac{50\times 50}{3/4}}$$

$$= \frac{24,0000\times 3}{7} = 103\ kN$$

पिन वाले सिरे के स्तंभ के लिए

$$I = \frac{3\times 8^3}{12} = 128cm^4$$

$$r^2 = \frac{128}{8\times 3} = \frac{16}{3}\ cm^2$$

$$\text{निरापद भार} = \frac{24,0000}{1+\frac{4}{2500}\times\frac{50\times 50}{16/3}} = \frac{24.000\times 4}{7}$$

$$= 137.1\ kN$$

अतः निरापद भार 103 kN होगा ।

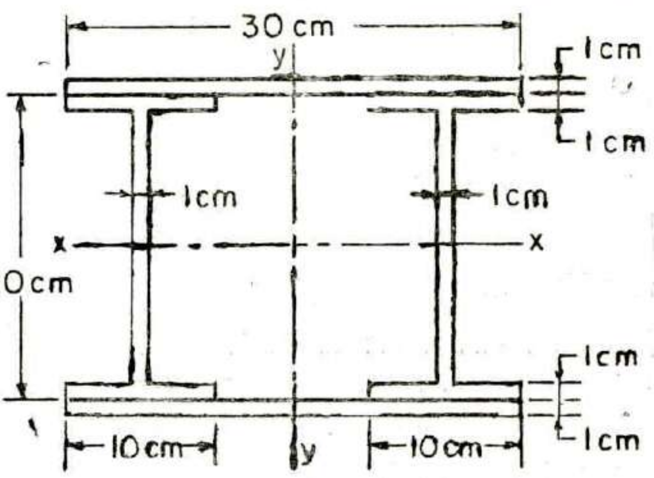
यदि पिस्टन पर अनुमेय दाब p हो, तब

$\pi/4a^2 \times p = 10,6660$

अथवा $p = \frac{10,3000\times 4}{\pi\times(45)^2} = 6.2\ N/mm^2$

उदाहरण 10.7 : एक इस्पात का स्तंभ दो I परिछेद वाली इस्पात की कड़ियों को जो 20 cm × 10 cm × 1 cm है, दो इस्पात की 1 cm मोटी तथा 30 cm चौड़ी पट्टियों को उनके फ्लैंज पर जोड़कर बनाया गया है जैसा कि चित्र में स्पष्ट है । यदि इस स्तंभ की लंबाई 4m हो तो रैंकिन सूत्र का प्रयोग करते हुए इस स्तंभ के लिए व्याकुंचन भार ज्ञात किजिए । प्लेट के किनारे कड़ियों के किनारों से मिलाकर सपाट कर दिए गए है । $\sigma_c = 3500\ N/mm^2$ तथा $\alpha = \frac{1}{7,500}$

दोनों कड़ियों को कितनी दूरी पर रखा जाय जिससे कि स्तंभ की व्याकुंचन क्षमता दोनों दिशाओं में एक समान हो ।



चित्र 10.2

हल :

$$\text{कड़ियों का } I_{xx} = 2\left[\frac{10\times 20}{12} - \frac{9\times 18^3}{12}\right]$$
$$= 4{,}600 \text{ cm}^4$$

$$\text{पट्टियों का } I_{xx} = 2\times\left[\frac{30\times 1^3}{12} + 30\times(10.5)^2\right]$$
$$= 6{,}625 \text{ cm}^4$$

$$\text{परिच्छेद का कुल } I_{xx} = 4600 + 6625$$
$$= 11{,}125 \text{ cm}^4$$

$$\text{पट्टियों का } I_{YY} = \frac{2\times 1\times 30^3}{12} = 4{,}500 \text{ cm}^4$$

$$\text{कड़ियों का } I_{YY} = 2\left[\frac{2\times 10^3}{12} + \frac{18\times 1^3}{12} + 38\times 10^2\right]$$
$$= 7{,}940 \text{ cm}^4$$

$$\text{परिच्छेद का कुल Ixx} = 4{,}500 + 7{,}940$$
$$= 12{,}442 \text{ cm}^4$$

$$\text{इस परिच्छेद का क्षेत्रफल} = 30+30+18+18+4\times 10$$
$$= 136 \text{ cm}^2$$

$$r^2 \text{ का न्यूनतम मान} = \frac{11{,}225}{136} = 82.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{व्याकुंचन भार} = \frac{pc\times A}{1+\alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2} = \frac{3{,}500\times 136}{1+\frac{400\times 400}{7{,}500\times 82.5}}$$

$$= \frac{3500\times 136}{1{,}258} = 3780 \text{ kN}$$

दोनों दिशाओं में समान व्याकुंचन क्षमता के लिए परिच्छेद का XX तथा YY के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण समान होना चाहिए Ixx का मान कड़ियों के बीच की दूरी पर निर्भर नहीं रहता केवल Iyy ही इस पर निर्भर रहता है ।

मान लीजिए दोनों कड़ियों के केंद्रों के मध्य दूरी x है ।

$I_{xx} = I_{YY}$ होने पर

$$11{,}225 = 4500 + 2\times\left[\frac{2\times 10^3}{12} + \frac{18\times 1^3}{12} + 38\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]$$
$$= 4500 + 340 + 19x^2$$

अथवा $19x^2 = 11{,}225 - 4840 = 5385$

अथवा $x^2 = 336$

$x = 18.4$ cm

10.5 स्तंभ का उत्केंद्री भारण

यदि स्तंभ दोनों सिरों पर हिंज द्वारा जुड़ा हो तो अधिकतम विक्षेप उसके मध्य बिन्दु पर होता है तथा इसी परिच्छेद पर अधिकतम बंकन बल आघूर्ण एवं अधिकतम संपीड़न तथा तनन प्रतिबल भी होता है ।

समीकरण (10.1) से

$$y_{max} \text{ अधि} = e \text{ Sec } \frac{kl}{2}$$

$$\text{जहाँ} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

मध्य लंबाई पर अधिकतम बंकन बल आघूर्ण

$= P \times y_{max} = P\, e\, Sec\, \frac{kl}{2}$

अधिकतम बंकन प्रतिबल $= \frac{P\, e\, Sec\, \frac{kl}{2}}{I} \times d/2$

यहाँ बंकन समतल में d मोटाई को व्यक्त करता है तथा I इसका जड़त्व आघूर्ण है ।

अधिकतम संपीड़न प्रतिबल

$$= \frac{P}{A} + \frac{P \times e\, Sec\, \frac{kl}{2}}{I} \times d/2$$

अधिकतम तनन प्रतिबल $= -\frac{P}{A} + \frac{P \times e\, Sec\, \frac{kl}{2}}{I} \times d/2$

उदाहरण 10.8 : एक लंबा टेक जो आरंभ में सीधा है एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरा मुक्त है । इसके मुक्त सिरे पर एक उत्केन्द्री भार लगाया गया है जिसकी दिशा आरंभ में टेक के अक्ष के समांतर है । अतः मुक्त सिरे का आरंभिक अक्ष से विक्षेप ज्ञात करने के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए ।

इस अवस्था के लिए मुक्त सिरे का विक्षेप तथा अधिकतम संपीड़न प्रतिबल ज्ञात कीजिए यदि टेक की लम्बाई 3m, वृत्तीय परिच्छेद का बाह्य व्यास 5 cm तथा आंतरिक व्यास 2·5 cm भार 4000N तथा उत्केंद्रता 8 cm है $E = 200 \times 10^5$ N/cm² (लं०वि०वि०)

हल :

यदि मुक्त सिरे से X दूरी पर भारण रेखा से मापा गया विक्षेप y हो तब इस परिच्छेद पर लगने वाला बंकन बल आघूर्ण $= P \times y$ मुक्त सिरे के विक्षेप को चित्र 10.1 (द) में 'a' द्वारा दिखाया गया है ।

अतः $EI\, \frac{d^2y}{dx^2} = -P.y$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}\, y = 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$; $k^2 = \frac{P}{EI}$ रखने पर

उपर्युक्त विभेदी समीकरण का हल इस प्रकार लिखने पर

$y = A \sin kx + B \cos kx$

अथवा $\frac{dy}{dx} = A\,k \cos kx + Bk \sin kx$

$x = 0$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$, अतः $A = 0$

$y = B \cos kx$

$x = 0$ होने पर $y = (e+a)$

अतः $B = (e+a)$

अथवा $y = (e+a) \cos kx = (e+a) \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\, x$

$x = l$ होने पर $y = e$

अथवा $e = (e+a) \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \times l$

अथवा $(e+a) = e\, Sec \sqrt{\frac{P}{EI}} \times l$

अथवा $a = e \left[Sec \sqrt{\frac{P}{EI}}\, l - 1 \right]$

$l = 300$ cm

$I = \frac{\pi}{64}\left(625 - 39\right) = \frac{\pi \times 586}{64}$

$\sqrt{\frac{P}{EI}} \times l = \sqrt{\frac{400 \times 64}{586\pi \times 20 \times 10^5}} \times 300 \times \frac{180}{\pi}$

$= 46^\circ$

$a = 8\, [\,Sec\, 46^\circ - 1\,] = 3.5$ cm

अधिकतम बंकन बल आघूर्ण $= 400\,(8+3.5)$

$= 4{,}6000$ N cm

बंकन प्रतिबल $\frac{4,600\times 64}{586\times\pi}\times\frac{5}{2} = 400\ N/mm^2$

अभिलंब प्रतिबल = $\frac{400}{\pi/4\,(25-6.25}$ = $2.7\ N/mm^2$

अधिकतम संपीड़न प्रतिबल = $400 + 2.7$

$= 402.7\ N/mm^2$

10.6 निश्चित निरापद प्रतिबल के लिए भार ज्ञात करना

उत्केंद्री भारण की परिस्थिति में यदि किसी निश्चित प्रतिबल के लिए स्तंभ में आवश्यक भार का मान ज्ञात करना हो तो,

व्यंजक $\frac{P}{A} \pm P\times e\times\frac{d}{2I}\ Sec.\sqrt{\frac{P}{EI}}\times\frac{l}{2}$

का प्रयोग कठिन होता है

चूंकि $\sqrt{\frac{P}{EI}}\ \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l^2P}{\pi^2EI}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{Pc}}$

यहाँ Pc ऑयलर का व्याकुंचन भार है = $\frac{\pi^2EI}{l^2}$

$$Sec\sqrt{\frac{P}{EI}}\ \frac{l}{2} = Sec\ \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{Pc}}$$

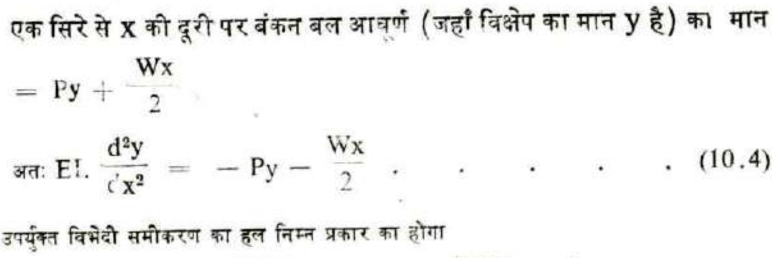
$$= \frac{Pc+0.26P}{Pc-P}$$

Sec. का यह मान सन्निकट मान है तथा इसको पेव का सन्निकट मान कहा जाता है।

अतः प्रतिबल $\sigma = \frac{P}{A} \pm P\times e\frac{d}{2I}\times\frac{Pc+0.26P}{Pc-P}$ . . (10.3)

10.7 अनुप्रस्थ भारित स्तंभ

एक पिन से जुड़े सिरे वाला स्तंभ चित्र (10.3) में दिखाया गया है। इस पर अक्षीय प्रणोद P तथा अनुप्रस्थ भार W इसके मध्य पर लग रहा है।



चित्र 10.3

एक सिरे से x की दूरी पर बंकन बल आघूर्ण (जहाँ विक्षेप का मान y है) का मान

$= Py + \frac{Wx}{2}$

अतः $EI.\frac{d^2y}{dx^2} = -Py - \frac{Wx}{2}$ . . . . . (10.4)

उपर्युक्त द्विभेदी समीकरण का हल निम्न प्रकार का होगा

$$y = \left(A\ Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\ x + B\ Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\ x\right) + a + bx$$

समीकरण के दोनों पार्श्वों का अवलोकन दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}\left(A\ Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\ x + B\ Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\ x\right) \quad (10.5)$$

समीकरण (10.4) द्वारा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}\ y - \frac{Wx}{EI}$$

$$= -\frac{P}{EI}\left(A\ Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\ x + B\ Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\ x\right)$$

$$-\frac{W}{2EI}\ x - \frac{P}{EI}\ (a+bx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.6)$$

समीकरण (10.5) तथा (10.6) द्वारा

$$-\frac{P}{EI}\ (a+bx) - \frac{W}{2EI}\ x = 0$$

दोनों पक्षों में x के गुणांक सम करने पर

$$-\frac{P}{EI}b - \frac{W}{2EI} = 0$$

अथवा $b = -\frac{W}{2P}$

$a = 0$

अतः $y = A\,Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B\,Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{W}{2P}x$

$x = 0$ होने पर $y = 0$ अतः $A = 0$

अतएव $y = B\,Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{W}{2P}x$

$$\frac{dy}{dx} = B\sqrt{\frac{P}{EI}}\,.\,Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{W}{2P}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$: यदि $x = l/_2$

अतः $0 = B\sqrt{\frac{P}{EI}}\,.\,Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/_2 - \frac{W}{2P}$

अथवा $B = \frac{W}{2P}\sqrt{\frac{EI}{P}}\,Sec\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/_2$

अतः $y = \frac{W}{2P}\sqrt{\frac{EI}{P}}\,Sec\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/_2\,Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,X - \frac{WX}{2P}$

$X = l/_2$ होने पर y अधिकतम होगा।

अतः $y_{max} = \frac{W}{2P}\sqrt{\frac{EI}{P}}\tan\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/_2 - \frac{Wl}{4P}$ . . (10.7)

अधिकतम बंकन बल आघूर्ण

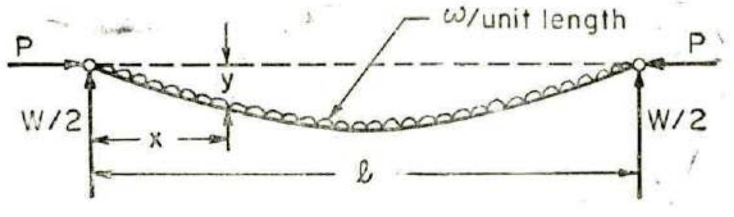
$$= P\,y_{max} + \frac{Wl}{4}$$

$$= \frac{W}{2}\sqrt{\frac{EI}{P}}\tan\sqrt{\frac{P}{EI}}\,.\,l/_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10.8)$$

उदाहरण 10.9 : एक 300 cm लंबे स्तंभ का परिच्छेद 4 cm चौड़ा तथा 10 cm मोटा है। इस पर 100 KN का अक्षीय संपीडन भार तथा 9 KN का एक समान बंटित अनुप्रस्थ भार लगे रहा है। अतः इसके परिच्छेद में उत्पन्न अधिकतम संपीडन तथा तनन प्रतिबल का मान बताइये। $E = 20 \times 10^6\ N/cm^2$

हल :

चित्र (10.4) में एक टेक जिस पर अक्षीय प्रणोद P तथा अनुप्रस्थ भार W प्रति एकांक लंबाई का लग रहा है।



चित्र 10.4

X की दूरी पर किसी परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण

$$= P \times y + \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

तथा $EI.\frac{d^2y}{dx^2} = -Pxy - \frac{wlx}{2} + \frac{wx^2}{2}$ . . . . (10.9)

उपर्युक्त समीकरण का हल निम्न प्रकार का होगा।

$$y = A\,Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,.\,x + B\,Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,.\,x + a + bx + cx^2 \; . \; (10.10)$$

दोनों पक्षों का दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-P}{EI}\left\{A\,Cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B\,Sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,.x\right\} + 2c$$

$$= -\frac{1}{EI}\left[Py + \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}\right]$$ समीकरण (10.9) द्वारा

$$= -\frac{P}{EI} - \left\{A \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right\}$$

$$-\frac{P}{EI}\left(a+bx+cx^2\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^2}{2} - \frac{wlx}{2}\right)$$

अथवा $2c = -\frac{P}{EI}(a+bx+cx^2) + \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^2}{2} - \frac{wlx}{2}\right)$

x^2 के गुणांक बराबर करने पर

$-\frac{p}{EI}C + \frac{w}{2EI} = o$ अथवा $C = \frac{w}{2P}$

X के गुणांक बराबर करने पर

$-\frac{p}{EI}b - \frac{wl}{2EI} = o$ अथवा $b = -\frac{wl}{2P}$

दोनों पक्षों के स्थिरांक बराबर करने पर

$2c = -\frac{p}{EI}a$ अथवा $a = -\frac{2CEI}{P} = -\frac{wEI}{P^2}$

समीकरण (10.10) में a, b, तथा c, का मान रखने पर

$$y = A\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{wEI}{P^2} - \frac{wlx}{2P} + \frac{wx^2}{2P}$$

$x=o$ होने पर $y=o$ अथवा $A = \frac{wEI}{P^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -A\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x$$

$$-\frac{wl}{2P} + \frac{wx}{P}$$

$x = l/2$ होने पर $\frac{dy}{dx} = 0$

अथवा $0 = -A\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2 + B\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos$

$$x\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{wl}{2P} + \frac{wx}{2P}$$

अथवा $B = A.\tan\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2 = \frac{wEI}{P^2}\tan\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2$

अतः $y = \frac{wEI}{P^2}\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + \frac{wEI}{P^2}\tan\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2$

$$x\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x - \frac{wEI}{P^2} - \frac{wlx}{2P} + \frac{wx^2}{2P}$$

$x = l/2$ होने पर y अधिकतम होगा

अतः $y_{max} = \frac{wEI}{P^2}\left\{\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2 + \frac{\sin^n\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2}{\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2}\right\}$

$$-\frac{wEI}{P^2} + \frac{wl^2}{4P} + \frac{wl^2}{8P}$$

$$= \frac{wEI}{P^2}\sec\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2 - \frac{wEI}{P^2} - \frac{wl^2}{8P}$$

$x = l/2$ होने पर अधिकतम बंकन बल आघूर्ण

$$= P.\,y_{max} + \frac{wl}{2} \times \frac{l}{2} - \frac{wl_2}{8}$$

$$= \frac{wEI}{P}\sec\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2 - \frac{wEI}{P} - \frac{wl^2}{8} + \frac{wl^2}{4} - \frac{wl^2}{8}$$

$$= \frac{wEI}{P}\left\{\sec\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l/2 - 1\right\}$$

$$w = \frac{900}{300} = 30\ \text{N/cm}$$

$$I = \frac{4\times10^3}{12} = \frac{1000}{3} \text{ cm}^4$$

जड़त्व आघूर्ण I बंकन अक्ष के सापेक्ष लिया जाता है न कि न्यूनतम मान । बंकन अक्ष अनुप्रस्थ भारण के अभिलंब होगी तथा यह आवश्यक नहीं है कि बंकन न्यूनतम बंकन दृढ़ता की दिशा में हो ।

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\ \frac{l}{2} = 150\ \sqrt{\frac{10,000\times3}{20\times10^5\times1000}}$$

$$= \frac{150}{1000} \times 3.87 \text{ (radian)}$$

$$= \frac{150}{1000} \times 3.87 \times \frac{180}{\pi} = 33.4^\circ$$

अधिकतम बंकन बल आघूर्ण $= \dfrac{3\times20\times b^5\times1000}{3\times10,000}$ (Sec 33.4°—1)

$= 2\times10^5\times0.198$

$= 39,6000$ N-cm

बंकन प्रतिबल $= \dfrac{39,6000\times3}{1000} \times \dfrac{10}{2}$

$= 5940$ N/cm²

अभिलंब संपीड़न प्रतिबल $= \dfrac{10.000}{10\times4} = 25$ N/mm²

अधिकतम संपीड़न प्रतिबल $= 594 + 250 = 84.4$ N/mm²

अधिकतम तनन प्रतिबल $= 34.4$ N/mm²

उदाहरण 10.10 : एक गोल खोखला स्तंभ, जिसका बाह्य व्यास 10cm तथा आंतरिक व्यास 8cm है तथा लंबाई 3m है, के सिरे पिन द्वारा जुड़े हैं। भारण करने से पहिले स्तंभ का आरंभ में इस प्रकार बंकन कर दिया गया है कि इसके मध्य में अधिकतम विक्षेप 0.5 cm होता है। यदि यह मान लिया जाय कि स्तंभ का मुड़ा भाग ज्या वक्रीय है तो बाहर से लगने वाले 20 kN के अक्षीय संपीडन भार के कारण उसमें कितना अधिकतम प्रतिबल उत्पन्न होगा। E = 200 GPa

हल :

मान लीजिए आरंभ में मध्य बिन्दु का विक्षेप e' है तथा A से X की दूरी पर स्थित परिच्छेद का विक्षेप y' है, तब

$$y' = e' \sin\frac{\pi x}{l}$$

यह प्रारंभिक परिस्थिति के अनुकूल है

क्योंकि A पर $x=0,\ y'=0$ B पर $x=l,\ y'=0$

तथा C पर $x=l/2,\ y'=e'$

अतः $y' = e' \sin\dfrac{\pi x}{l}$

तथा $$\frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{\pi^2e'}{l^2} \sin\frac{\pi x}{l} \quad \ldots\ldots (10.11)$$

भार P के लगने पर मान लीजिए A से X की दूरी पर किसी परिच्छेद का विक्षेप y है तब उस परिच्छेद पर बंकन बल आघूर्ण Py होगा तथा विक्षेप का मान y से y हो जाता है, अतः

$$EI\ \frac{d^2}{dx^2}(y-y') = -\ Py$$

अथवा $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = \frac{d^2y'}{dx^2} = -\frac{\pi^2e'}{l^2}\ \frac{\sin \pi x}{l} \quad (10.12)$$

मान लीजिए इस विभेदी समीकरण का हल इस प्रकार का है :—

$$y = a\ e'\ \text{Sin}\ \frac{\pi x}{l} : \text{ जहाँ } a \text{ एक स्थिरांक है ।}$$

तब $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\,e'\,\pi^2}{l^2}\ \dfrac{\text{Sin}\ \pi x}{l}$

तथा $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\ a\,e'\ \dfrac{\pi^2}{l^2}\ \text{Sin}\ \dfrac{\pi x}{l}$

उपर्युक्त से y तथा $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान समीकरण 10.12 में रखने पर

$$-\ \frac{a\,e'\ \pi^2}{l^2}\ \text{Sin}\ \frac{\pi x}{l} + \frac{p}{EI}\ a\,e'\,\text{Sin}\ \frac{\pi x}{l} = -\ \frac{\pi^2}{l^2}\ \text{Sin}\ \frac{\pi x}{l}$$

$$a\left(\frac{l\pi^2}{l^2} - \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}\right) = \frac{\pi^2}{l^2}$$

अथवा $a\left\{1 - \dfrac{Pl^2}{\pi^2 EI}\right\} = 1$

अथवा $a\left\{1 - \dfrac{P}{Pc}\right\} = 1$

इसलिए $a = \dfrac{P}{Pc-P}$ जहाँ $Pc = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$ (ऑयलर-भार)

अतः स्तंभ के विक्षेप वक्र का समीकरण

$$y = \frac{Pc}{Pc-P}\ e'\ \text{Sin}\ \frac{\pi x}{l} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (10.13)$$

अधिकतम विक्षेप इसके मध्य परिच्छेद पर $x = l/2$ पर होगा ।

$$y_{max} = \frac{Pe}{Pc-P}e' \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (10.14)$$

अधिकतम बंकन बलाघूर्ण $= \dfrac{P\times Pc}{Pc-P} \times e'$

उपर्युक्त अभ्यास में वर्णित स्तंभ के लिए

$$Pc = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2\times 20\times 10^5\times \pi 64(10^4-8^4)\ \times 10}{300\times 300}$$

$$= \frac{\pi^3\times 20\times 10^5\times 36\times 164\times 10}{1000\times 9\times 104\times 64} = 635\text{kN}$$

अधिकतम बंकन बल आघूर्ण $= \dfrac{2\times 63.5\times 0.5\times 10}{63.5-2}$

अधिकतम संपीड़न प्रतिबल $= 106$ N. m

$$= \frac{P}{A} + \frac{M}{I}\cdot d/2 = \frac{20000}{\frac{\pi\ (10^2-8^2)}{4}} + \frac{10600}{\frac{\pi\ (10^4-8^4)}{64}} \times 5$$

$$= 7.46\ \text{N/mm}^2$$

अभिलंब संपीडन प्रतिबल की तुलना में बंकन प्रतिबल का मान काफी कम होता है ।

समीकरण (10.14) से स्पष्ट होता है कि अधिकतम विक्षेप का मान P के बढ़ने पर बढ़ता जाएगा । यदि P=Pc तब चाहे e का मान कितना ही कम क्यों न हो y विक्षेप का मान असीमित होगा अतः आरंभ में वक्र स्तंभ के लिए भी व्याकुंचन भार Pc ही होता है जो कि सीधे स्तंभ के लिए ऑयलर भार कहलाता है ।

अभ्यास – प्रश्नमाला

1. ऑयलर सिद्धांत का प्रयोग करते हुए दो दीर्घ स्तंभों की व्याकुंचन सामर्थ्य ज्ञात कीजिए जो समान लंबाई, पदार्थ तथा भार के हैं । इनमें एक ठोस गोलाकार 20mm व्यास का तथा दूसरा ठोस वर्गाकार परिच्छेद का है । दोनों ही सिरों पर पिन द्वारा जुडे हैं । (3/π)

2. एक स्तंभ जिसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा हिंज से जुड़ा है, 1.5 लंबा ठोस आयताकार परिच्छेद का है । यदि इसके परिच्छेद की चौड़ाई 100mm हो तो मोटाई ज्ञात कीजिए । इसके लिए ऑयलर भार 300KN है । E=100 GPa (3.32 cm)

3. एक मिश्रधातु की छड़ जिसकी लंबाई 100cm तथा व्यास 10mm है, $100 N/mm^2$ का तनन प्रतिबल लगाने पर 1mm लंबाई में बढ़ जाती है। यदि इस छड़ को हिंज सिरों वाले स्तंभ के रूप में प्रयुक्त किया जाय तो ऑयलर व्याकुंचन भार का मान बताइये । (484N)

4. एक ढलवाँ लोहे का स्तंभ 240mm बाह्य व्यास तथा 200mm आंतरिक व्यास का है तथा इसपर 200kN का भार लग रहा है। यदि स्तंभ की लंबाई 12mm तथा दोनों सिरे हिंज किए हो तो पदार्थ में अधिकतम संपीडन तथा तनन प्रतिबल ज्ञात कीजिए। यदि भार स्तंभ केंद्र से 40mm की दूरी पर हो तो कितनी उत्केंद्रता तक स्तंभ में तनन प्रतिबल नहीं होगा ?
E=80GPa ($36.9 N/mm^2$, $7.9 N/mm^2$, 27.2mm)

5. एक वर्गाकार 4मी० ऊँचे स्तंभ पर, जिसके सिरे बद्ध हैं, 600 kN का भार लग रहा है। यदि निरापद गुणक 6 हो तो ऑयलर सूत्र को प्रयोग करते हुए परिच्छेद की विमा ज्ञात कीजिए ।
E=200GPa (129mm)

प्रयुक्त हिंदी-अंग्रेजी पारिभाषिक शब्दावली

अधातु	Non Metal
अनुदैर्घ्य प्रतिबल	Longitudinal Stress
अनुदैर्घ्य विकृति	Longitudinal Strain
अनुप्रस्थ विकृति	Transverse Strain
अपरूपण परीक्षण	Shear Test
अपरूपण प्रतिबल	Shear Stress
अपरूपण बल	Shear Force
अपरूपण बल आरेख	Shear force-Diagram
अपरूपण विकृति	Shear Strain
अपरूपण विक्षेप	Shear Deflection
अभिलंब विकृति	Normal Strain
अक्षीय भार	Axial Load
अक्षीय भार युक्त बंकन	Bending Combined With Axial Load
अध्यारोपण सिद्धांत	Principle of Superposition
आकस्मिक भार	Suddenly Applied Load
आधार	Support
आयतन प्रत्यास्थ मापांक	Bulk Modulus of Elasticity
ऑयलर सूत्र	Euler's Formula
आंतरिक दाब	Internal Pressure
उत्केंद्रता	Eccentricity
उत्केंद्री भार	Eccentric Load
उदासीन अक्ष	Neutral Axis
एकसमान चर भार	Uniformly Varying Load
एकसमान वितरित भार	Uniformly Distributed Load
एकल-दिश प्रतिबल	Uniaxial Stress
एकल-दिश भारण	Uniaxial Loading

ऐंठन कोण	Angle of Twist
ऐंठन दृढ़ता	Torsional Rigidity
ऐंठन बलाघूर्ण	Torque
कठोरता	Hardness
कठोरता परीक्षण	Hardness Test
कब्जादार	Hinged
कब्जादार आधार	Hinged Support
कुंडली	Coil
कुंडलीदार कमानी	Helical Spring
कोश	Shell
गोलीय कोश	Spherical Shell
गतिक भार	Dynamic Load
चरम तनन सामर्थ्य	Ultimate Tensile Strength
जड़त्व आघूर्ण	Moment of Inertia
जड़त्व त्रिज्या/घूर्णक त्रिज्या	Radius of Gyration
जड़ भार	Dead Load
टेक	Prop
टेकयुक्त प्रास	Propped Cantilever
टंकी	Tank
तनन परीक्षण	Tensile Test
तनन प्रतिबल	Tensile Stress
तन्तु प्रबलित काँच	Fibre Reniforced Glass
तन्तु प्रबलित प्लैस्टिक	Fibre Reniforced Plastic
तनुता अनुपात	Slenderness Ratio
तापजन्य प्रतिबल	Thermal Stress
द्विअक्षीय प्रतिबल	Biaxial Stress
द्विअक्षीय भारण	Biaxial Loading
द्विविमीय विकृति क्षेत्र	Two Dimensional Strain Field
दंतुरण कठोरता परीक्षण	Indentation Hardness Test
दृढ़ता मापांक	Modulus of Regidity
धरन	Beam

धूसर लोहा	Cast/Iron
नति परिवर्तन बिन्दु	Point of Contraflexure
निरापद	Safe
परख नमूना	Sample
पराभवन प्रतिबल	Yield Stress
परिच्छेद आघूर्ण	Area-Moment
परिच्छेद मापांक	Section Modulus
परिणामी बंकन आघूर्ण	Resultant Bending Moment
परिधीय प्रतिबल	Circumferential Stress
प्वासों अनुपात	Poisson's Ratio
पारेषित शक्ति	Transmitted Power
प्रघाती भार	Shock Load
प्रत्यास्थता	Elasticity
प्रत्यास्थ मापांक	Elastic Modulus
प्रतिबल	Stress
प्रतिबल अवस्था	Stress State
प्रतिबल दीर्घवृत्त	Stress Ellipse
प्रतिबल वृत्त	Stress Circle
प्रतिशत दैर्घ्यवृद्धि	Percentage Elongation
प्रधान प्रतिबल	Principal Stress
प्रधान समतल	Principal Plane
प्रधान विकृति	Principal Strain
प्रलंबी धरन	Overhanging Beam
प्रमापी गणक	Gage Factor
प्रवणता	Slope
प्रास धरन	Contilever Beam
बद्ध आधार	Fixed Support
बलकृत गुणधर्म	Mechanical Properties
बलाघूर्ण	Torque
बहुआधारित धरन	Continuous Beam

व्याकुंचन	Buckling
व्यवकलन विधि	Integration Method
बेलनी कोश	Cylindrical Shell
बंकन आघूर्ण	Bending Moment
बंकन आघूर्ण आरेख	Bending Moment Diagram
बंकन प्रतिबल	Bending Stress
बंकन प्रतिरोध	Moment of Resistance
बंकन भार	Bending Load
बंकन सिद्धांत	Bending Theory
भार	Load
भंगुर पदार्थ	Brittle Material
मरोड़ी अपरूपण	Torsional Shear
मरोड़ी भार	Torsional Load
मापांकी अनुपात	Modular Ratio
मोहर वृत्त	Mohr Circle
मंद विरूपण	Creep
मिश्र धातु	Alloy
यंग मापांक	Young's Modulus
रेखीय विकृति	Linear Strain
रोलर आधार	Roller Support
विकृति	Strain
विकृति मापी	Strain gauge
विक्षेप	Deflection
वैद्युत प्रतिरोध विकृति मापी	Electrical Resistance Strain Gauge
विस्तृति	Span
सतह प्रतिबल	Plane Stress
सतह प्रतिबल अवस्था	Plane State of Stress
सतह विकृति	Plane Strain
सतह विकृति अवस्था	Plane State of Strain
सममिति अक्ष	Axis of Symmetry

समतल	Plane
समतुल्य बलाघूर्ण	Equivalent Torque
समतुल्य बंकन आघूर्ण	Equivalent Bending Moment
स्तंभ	Column
स्थैतिक भार	Static Load
समानुपाती सीमा	Proportional Limit
सार्विक परीक्षण यंत्र	Universal Testing Machine
संकेंद्री भार	Concentrated Load
संघट्ट भार	Impact Load
संघट्ट परीक्षण	Impact Test
संतुलित परिच्छेद	Balanced Section
संपीडन परीक्षण	Compression Test
संपीडन प्रतिबल	Compressive Stress
संयुक्त छड़	Compound Bars
संयुक्त धरन	Composite Beams
शुद्ध आलंब धरन	Simply Supported Beam
शैफ्ट	Shaft
शंक्वाकार छड़	Conical Bar
हुक का नियम	Hook's Law
त्रिविमीय प्रतिबल अवस्था	Threedimensional State of Stress
त्रिविमीय विकृति अवस्था	Threedimensional State of Strain
श्रांति	Fatigue

मप्रभासमुना — 23 एम० ऑफ एच० आर० डी० (एन०डी०)/95—11-6-98—1000

पी०ई०डी०-720
1000-1995 (डीएसके-II)

महाप्रबंधक, भारत सरकार मुद्रणालय, नाशिक-422 006 द्वारा मुद्रित
तथा प्रकाशन नियंत्रक, भारत सरकार दिल्ली-110 054 द्वारा प्रकाशित

PRINTED BY THE GENERAL MANAGER, GOVT. OF INDIA PRESS, NASHIK-422 006
AND PUBLISHED BY THE CONTROLLER OF PUBLICATIONS, DELHI-110 054
1998

ठोस पदार्थ यांत्रिकी

लेखक
प्रो० डी० पी० शुक्ला